Centre Universitaire de Mila

$3^{ème}$ année Licence Mathématiques

Module : *Transformations intégrales dans les espaces Lp*

Nom

Prénom

Groupe

Corrigé type de l'Examen

Date : 18/06/2022. Durée : 1h

Exercice 1 (10 points) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad g_a(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de f (2 pts)

f est une fonction paire alors

$$F(f(x)) = F(e^{-a|x|}) = 2\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos wx \, dx \quad 0{,}5 \times 4$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{iwx} dx\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{(-a+iw)x} dx\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-a+iw} e^{(-a+iw)x}\Big|_0^{\infty}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-iw}\right)$$

$$= \frac{2a}{a^2+w^2}$$

2) Déduire par deux méthodes la transformée de Fourier de g_a

1=ér Méthode [*La propriété* $F(F(f(x))) = 2\Pi f(-x)$] (1.5 pts)

Nous avons $F(f(x)) = \dfrac{2a}{a^2+w^2} = 2a\, g_a(w)$ $\quad 0{,}5 \times 3$

donc $F(F(f(x))) = F(2a\, g_a(w)) = 2\pi f(-x) = 2\pi e^{-a|x|}$

$\Rightarrow 2a\, F(g_a(w)) = 2\pi e^{-a|x|}$ d'où $F(g_a(w)) = \dfrac{\pi}{a} e^{-a|x|}$

2=ÉME Méthode [*La transformée inverse de Fourier*] (3 pts)

Nous avons: $\hat{f}(w) = F(f(x)) \Leftrightarrow f(x) = F^{-1}(\hat{f}(w))$ $\quad 0{,}25$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw. \quad 0{,}5$$

Comme $F(f(x)) = F(e^{-a|x|}) = \dfrac{2a}{a^2+w^2}$ $\quad 0{,}25$

alors $e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+w^2} e^{iwx}\, dw$

$= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+w^2} e^{+iwx}\, dw$ 0,5 (*)

D'autre part. $\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} e^{-iwx}\, dx$ 0,5

$\overset{(*)}{=} \frac{\pi}{a} e^{-a|-w|}$ $\boxed{\frac{\pi}{a} f(w)}$

$= \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$ 0,5

d'où $F(g(x)) = \hat{g}(w) = \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$ 0,5 (**)

3) Maintenant, soit l'équation avec le produit de convolution suivante

$$h * g_1(x) = g_2(x)$$

*Ecrire l'équation intégrale correspondante (1 pt)

$h * g_1(x) = g_2(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\cdot g_1(t-x)\, dt = g_2(x)$ 0,5

$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)\cdot \frac{1}{1^2+(t-x)^2}\, dt = \frac{1}{2^2+x^2}$ 0,25

d'où $\int_0^x \frac{f(t)}{1+(t-x)^2}\, dt = \frac{1}{4+x^2}$ 0,25

*Déterminer $\hat{h}$ (1 pt)

Nous avons $h * g_1(x) = g_2(x)$ alors: $\hat{h}\cdot\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ 0,5

donc $\hat{h}(w) = \frac{\hat{g}_2(w)}{\hat{g}_1(w)} = \frac{\frac{\pi}{2} e^{-2|w|}}{\pi e^{-|w|}} = \frac{1}{2} e^{-|w|}$ 0,5

*Déduire la formule de h (1.5 pts)

Nous avons $\hat{h}(w) = \frac{1}{2} e^{-|w|} \Leftrightarrow h(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{2} e^{-|w|}\right)$ 0,5

$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2} F^{-1}\left(e^{-|w|}\right)$

(**) $\Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\pi}{a} e^{-a|w|}\right) = g(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ 0,5

d'où $h(x) = \frac{1}{2\pi(1+x^2)}$ 0,5

Exercice 2 (10 points)

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tq $f(t) = te^{at}$. Calculer la transformée de Laplace de f par deux méthodes

1-ér Méthode [*Par les propriétés*] (1 pt)

Soit $g(t) = t \Longrightarrow G(p) = \frac{1}{p^2}$ 0,25

donc $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{at}g(t)) = G(p-a)$ 0,5

d'où $\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}$ 0,25

2-ème Méthode [*Par la définition*] [Et déterminer l'abscisse de la convergence simple] (2.5 pts)

$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty t e^{at} e^{-pt}\,dt$ 0,5

$= \int_0^\infty t\, e^{-(p-a)t}\,dt$ 0,25

$Re(p-a)>0$ $= t \cdot \frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{p-a}\int_0^\infty e^{-(p-a)t}\,dt$ 0,5

$= \frac{1}{p-a}\left(\frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)t}\Big|_0^\infty\right)$ 0,25

$Re\, p > a$ $= \frac{-1}{(p-a)^2}\left(e^{-(p-a)\infty} - e^0\right)$ d'où $\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}$ 0,5

L'abscisse de la convergence est : a 0,5

2) Trouver la transformée de Laplace inverse de la fraction suivante (3 pts)

$$F(p) = \frac{e^p}{p^2(p-1)}$$

$F(p) = e^p\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1}\right) = e^p\left(\frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right)$ 1

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p-1}\right)$

Nous avons $\mathcal{L}\{f(x-c)\} = e^{-cp}F(p)$ donc $\mathcal{L}^{-1}(e^{-cp}F(p)) = f(x-c)$ 0,5

Alors $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ 0,5 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p}\right) = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = t$ 0,5 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p^2}\right) = t+1$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) = e^t$ 0,5 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p-1}\right) = e^{t+1}$ d'où

$f(t) = e^{t+1} - 1 - (t+1) = e^{t+1} - t - 2$ 0,5

3) Résoudre l'équation différentielle suivante (3.5 pts)

$$y''(t) + 5y(t) = 2\sin(t) \quad avec \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

$$\mathcal{L}(y''(t)) + 5\mathcal{L}(y(t)) = 2\mathcal{L}(\sin t)$$

$$p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + 5Y(p) = \frac{2}{p^2+1}$$ 0,5

$$Y(p)\left[p^2+5\right] = p + 2 + \frac{2}{p^2+1}$$ 0,25

donc $$Y(p) = \frac{p+2}{p^2+5} + \frac{2}{(p^2+1)(p^2+5)}$$

$$= \frac{p+2}{p^2+5} + \frac{A}{p^2+1} + \frac{B}{p^2+5}$$ 0,25 $A = \frac{1}{2}$ $B = -\frac{1}{2}$

$$= \frac{p+\frac{3}{2}}{p^2+5} + \frac{\frac{1}{2}}{p^2+1}$$ 0,5

$$= \frac{p}{p^2+5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2+5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$ 0,5

alors: $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+5}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+5}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right) + \frac{3\sqrt{5}}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

0,25 x 3

d'où $$y(t) = \cos(\sqrt{5}\,t) + \frac{3\sqrt{5}}{10}\sin(\sqrt{5}\,t) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

0,25 x 3

♣♠ *Bonne chance* ♠♣

✓ **N.Haddad** ✓