



République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
Université de Abdelhafid Boussouf-Mila



*Faculté de sciences et Technologies
Département de sciences et techniques
1er année Master-structures*

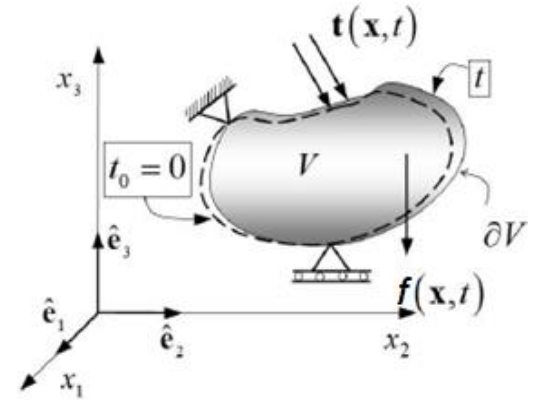
*Présenté par :
Dr. BELGHIAT Choayb*

CHAPITRE V

Equations générales de l'élasticité linéaire

Année universitaire 2023-2024

L'élément élastique isotrope de volume V , comme montre la figure, est sollicité par des charges surfaciques représentées par la résultante $t(x, t)$ et des force volumiques $f(x, t)$. La recherche d'un système d'équations qui produit les champs de déplacement $u(x, t)$, déformation $\varepsilon(x, t)$ et de contrainte $\sigma(x, t)$ à chaque particule et dans chaque instant du temps est appelé le problème d'élasticité linéaire.



Inconnues de problème

3 Déplacements : u_1, u_2, u_3

6 Déformations : $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$

6 Contraintes : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$

Données de problème

Caractéristiques géométriques du corps

Les charges surfaciques et leurs répartitions

Les charges volumiques appliquées au corps

Equations disponibles

3 Équations d'équilibre : $\text{div}(\sigma_{ij}) + f_i = \rho \cdot \frac{dx_i^2}{dt^2}$

6 Équations de la loi de Hook : $\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \delta_{ij}$

6 Équations géométriques: $\varepsilon = \frac{1}{2}(u \otimes \nabla + \nabla \otimes u)$

Note:

En statique le terme $(\rho \cdot \frac{dx_i^2}{dt^2})$ des équations d'équilibre devient nul

Equations d'équilibres

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \cdot \frac{dx_1^2}{dt^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho \cdot \frac{dx_2^2}{dt^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \cdot \frac{dx_3^2}{dt^2}$$

En notation indicielle : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \text{div}(\sigma_{ij}) + f_i = \rho \cdot \frac{dx_i^2}{dt^2}$

Équations de la loi de Hook

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G} \\ \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G} \\ \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G} \end{array} \right.$$

En notation indicielle :

Avec les coefficients de Lamé :

Formule fondamentale de Cauchy :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{Tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij})$$

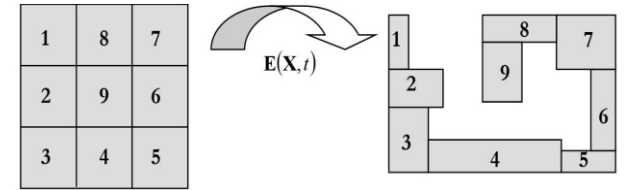
$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{Tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{Tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Équations géométriques

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

Les déformations peuvent être obtenus par la dérivation du champs de déplacement mais dans le cas contraire pas tout tenseur de déformation possède un champs de déplacement correspondant. Afin de garantir l'existence de ce champs de déplacements le tenseur de déformation doit satisfaire les conditions appelées les conditions de compatibilité (continuité). Ces équations peuvent être obtenus la dérivation seconde de chaque composante par rapport a tout les composantes possibles.



$$\frac{\partial^2 \left(\varepsilon_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)}{\partial x_1^2, \partial x_2^2, \partial x_3^2, \partial x_1 \partial x_2, \partial x_1 \partial x_3, \partial x_2 \partial x_3} \quad 6 \text{ équations}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 \left(\varepsilon_{23} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right)}{\partial x_1^2, \partial x_2^2, \partial x_3^2, \partial x_1 \partial x_2, \partial x_1 \partial x_3, \partial x_2 \partial x_3} \quad 6 \text{ équations}$$

Après réarrangement et remplacement en éliminant les 30 inconnus des troisième dérivée des déplacement on obtient 6 équations de compatibilité comme suit:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

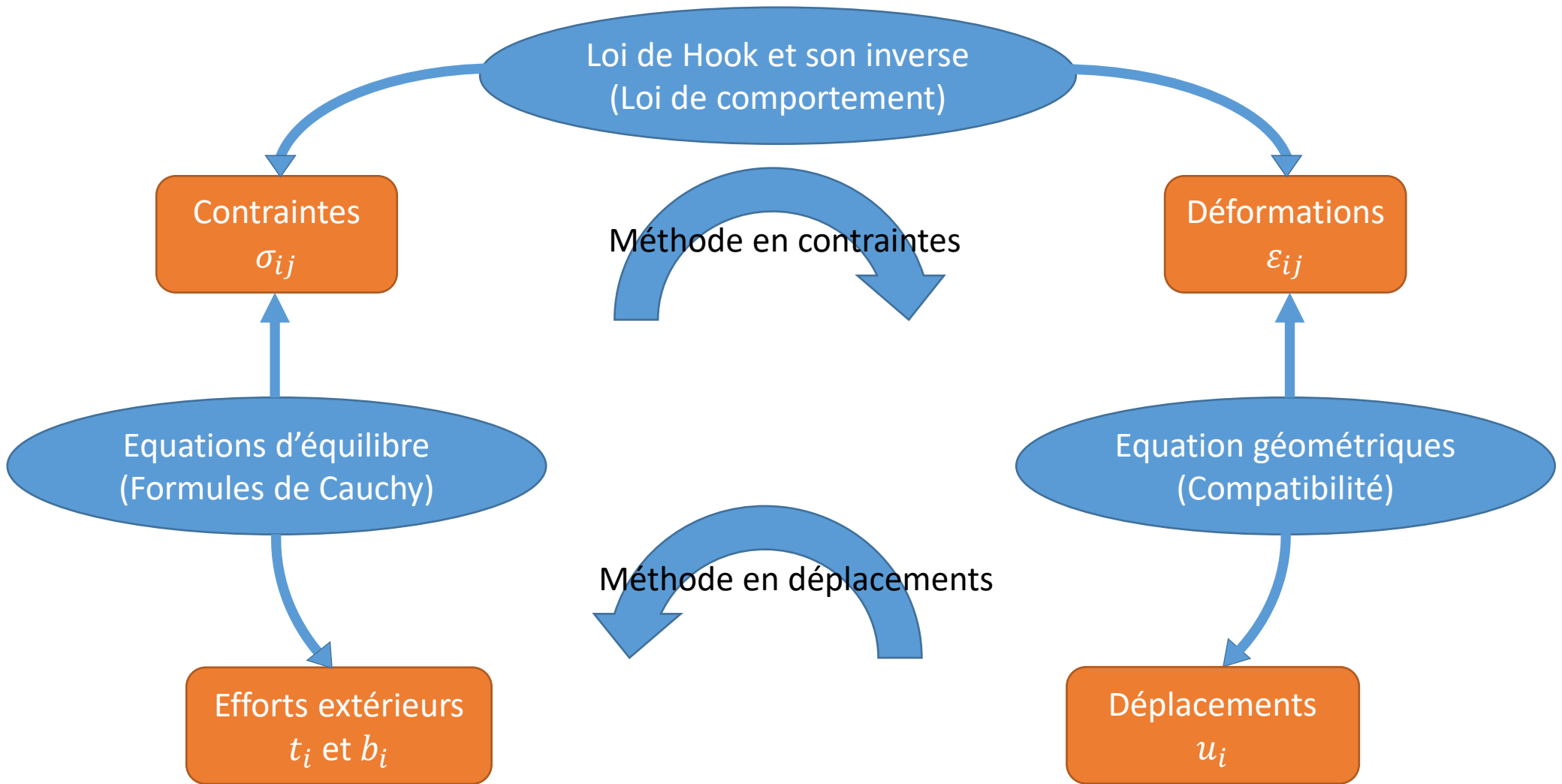
$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

Tenseur antisymétrie de ∇

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Forme compacte: $\nabla \times (\varepsilon \times \nabla) = 0$



L'objectif de cette méthode est de réduire le système en trois équations différentielles partielles juste avec les trois déplacements comme inconnus. La première étape consiste à remplacer la loi de comportement dans les équations d'équilibre pour obtenir les équations de Navier comme rapporté par la suite:

$$\nabla \cdot \sigma + f_i = (\lambda \text{Tr}(\varepsilon) \delta + 2\mu \varepsilon) + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Après un réarrangement on obtient les équations de Navier-Lamé sous forme compacte comme suit:

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dans les condition statique et sous forme explicité ces équations peuvent être s'écrives comme:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 + f_1 = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 + f_2 = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3 + f_3 = 0$$

Sachant que: $\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

Après la résolution de ces trois équations on obtient le champs de déplacement. La dérivé de ce champs et le remplacement dans les équations géométriques produire le champs de déformations qui de son tour conduit au champs de contrainte par l'intermédiaire de loi de comportement (Loi de Hook).

Cette méthode est exclusif au cas statique, elle s'initie par l'intégration des équations géométriques pour obtenir les six équations de compatibilité, dans lesquelles, on remplace l'inverse de la loi de comportement. Par la suite, les résultats sont à remplacer dans les équations d'équilibre. Le résultat final est appelé les équations de Beltrami-Michell sous forme compacte elle s'écrivent comme:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = -\frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} (f_{k,k}) - (f_{i,j}) - (f_{j,i})$$

Sous forme explicite et sachant que ($\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$) les équations de Beltrami-Michell sont :

$$\begin{aligned} (1+\nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{11}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} &= 0 & (1+\nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{12}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{22}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} &= 0 & (1+\nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{13}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{33}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} &= 0 & (1+\nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{23}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Après la résolution de ces six équations on obtient le champ de contrainte. Le remplacement des contraintes dans l'inverse de la loi de comportement produit le champ de déformations qui de son tour conduit au champ de déplacement par l'intermédiaire de l'inverse des équations géométriques mais par l'intégral de ces derniers (Inconvénient de la méthode des contraintes).

Le principe de Saint Venant consiste dans le cas où la distance (δ) entre le point considéré et le contour sur le quel les condition de charge sont changé, est suffisamment grande par rapport à la dimension (l) de ce contour, la réponse des deux système est pratiquement équivalente.

$$\left. \begin{aligned} u^I(P, t) &\approx u^{II}(P, t) \\ \varepsilon^I(P, t) &\approx \varepsilon^{II}(P, t) \\ \sigma^I(P, t) &\approx \sigma^{II}(P, t) \end{aligned} \right\} \forall P \quad \blacksquare \quad \delta \gg l$$

