Résumé du chapitre 1
L'espace $\mathcal{L}(X,Y)$.

I opérateurs linéaires

Soient X et Y deux e.v.n. tous deux réels ou tous deux complexes.

1- **Def**: Un op. A : ..... est dit linéaire si:

1) $D(A)$ est une variété linéaire.
2) $\forall x_1, x_2 \in D(A)$; $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$: $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$.

2- Opérateur linéaire continu

X et Y deux e.n. A: op. lin. $A : X \longrightarrow Y$ $(D(A) = X)$

A continu en $x_0 \in X$ si $A x_n \underset{n \to n_0}{\longrightarrow} A x_0$

3- Théorème

X et Y e. de Banach.

$A : X \longrightarrow Y$ $(D(A) = X)$.

Si A continu au pt $x_0 \in X$ Alors A est continu en tout pt $x \in X$.

4- **Def**: Un op. lin. est dit continu s'il est continu au pt 0.

5- Opérateur linéaire borné :

Def: A op. lin. tel que $D(A) = X$; $R(A) \subset Y$.

A est borné s'il est borné sur la boule unité.

i.e; $\exists c > 0$, $\forall x \in X$; $\|x\| \leq 1$; $\|Ax\| \leq c$.

Théorème : A borné ssi $\forall x \in X$: $\|Ax\| \leq c\|x\|$.

Théorème : $M \subset X$, M borné. alors, l'ensemble $\{\|Ax\|, x \in M\}$ est borné.

Corollaire. Tout op. lin. borné A, est borné sur toute boule $B(x_0, r)$, $\forall x_0 \in X$, $\forall r > 0$.

Théorème : $A : X \longrightarrow Y$; $D(A) = X$. X et Y e. Banach.

A continu $\Leftrightarrow$ A borné.

II Convergence des opérateurs linéaires

1- Convergence uniforme :

Soit $\{A_n\}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

$A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ uniformément si $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 1

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{CV.U} A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ssi $\forall x \in X$, $\|x\| \leq 1 : A_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax$

Corollaire : $M \subset X$; M borné.

Si $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{CV.U} A$ alors $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{CV.U} Ax$ par rapport à $x \in M$.

2- Convergence forte ou convergence ponctuelle :

Définition : $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{CV} A$ fortement si $\forall x \in X$, $\|A_n x - Ax\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Remarque $A_n \xrightarrow[n]{CV.U} A \Rightarrow A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ fortement.

3 Convergence faible

H un e. de Hilbert.

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ faiblement $\Leftrightarrow \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ $\forall y \in H$.

4- Les séries dans $\mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{L}(X)$.

- La série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathcal{L}(X,Y)$ est U. convergente si la suite $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est U. convergente.

- La série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est absolument convergente si la suite $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est convergente.

4- **Théorème**

$\mathcal{L}(X,Y)$ e. de Banach.

$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ absolument CV $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ Uniforment CV

5- **Théorème**

X e.n. , Y e.n.
Y e. de Banach. $\Rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ e. de Banach.

6- **Lemme**

$A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$

$B_n \in \mathcal{L}(X,Y)$

$A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$

Si $\left. \begin{array}{l} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \\ B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B \end{array} \right\}$ **alors** $A_n B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} AB$

III Principe de la borne uniforme :

1- **Théorème** : Soient E e. Banach, F e.v.n. $A_i : E \to F$ $(i \in I)$ une famille d'op$_s$ lin continus bornés est borné (en fortement : i.e; $\forall x \in E$, l'ens $\{A_i x \mid i \in I\}$ est bornée en norme norme). Alors la famille $\{A_i\}_{i\in I}$

i.e; : $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$.

- En d'autres termes :
$\sup_{i\in I} \{A_i x\} < \infty \Rightarrow \sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$

ou bien : $\exists c > 0 : \|A_i x\|_F \leq c \|x\|_E \quad \forall x \in E, \forall i \in I$

2- Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace de Banach, F un e.v. normé et $A_n : E \to F$, $(n \in \mathbb{N})$ une suite d'opérateurs linéaires continus t.que : $\forall x \in E$ il existe $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \in F$.

Alors la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée

i.e; $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ et l'opérateur A est continu.

donc

$$\begin{cases} \{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F) \\ \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax, \ \forall x \in E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty \\ \text{et} \\ A \in \mathcal{L}(E,F). \end{cases}$$

3 – **Corollaire 1** : E, F deux e. de Banach.

$(A_n)_n$ une suite d'op. continus de E dans F. t.que :

$\forall x \in E$: $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$.

Alors :
- $\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$
- $A \in \mathcal{L}(E,F)$
- $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|A_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

4 – **Corollaire 2** : G e. de Banach.

$$\begin{cases} B \subset G \\ \forall f \in G', \ f(B) = \bigcup_{x\in B} \langle f, x\rangle \text{ borné} \end{cases} \Rightarrow B \text{ borné}$$

5 – **Corollaire 3** : G e. de Banach.

$$\left.\begin{array}{l} B' \subset G' \\ \forall x \in G, \text{ l'ensemble } \langle B', x\rangle = \bigcup_{f\in B'} \langle f, x\rangle \text{ borné dans } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow B' \text{ borné}$$

IV Opérateurs à domaine dense

Rappels

1 Proposition

E et F deux e.v.n.

T un op. lin de E dans F.

Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1) T est continu (borné)

2) T " " au point 0.

3) T est borné sur la boule unité fermée de E

4) Il existe un réel $a \geq 0$, t.que : $\|T(x)\| \leq a\|x\|$ pour tout $x \in E$

5) T est lipschitzienne.

Remarque

Pour montrer qu'un op. lin T n'est pas borné, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que la suite $\left(\dfrac{\|Tx_n\|_F}{\|x_n\|_E}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit bornée

Remarques

*) L'opérateur identique $I : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto I(x) = x$ est borné.

*) Tout op. lin dans un e. n. de dimension finie est borné.

(Soit A la matrice carré associée à cet op. alors ; $\forall\, x \in E$: $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$).

*) H. e. de Hilbert. $F \subset H$.

L'op. P_F de projection orthogonale sur F est borné.

*) $$T : \left(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow \left(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$$
$$f \longmapsto T(f) = f'$$

T n'est pas borné.

En effet, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions t. que :

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a : $$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}.$$

$$T f_n = \frac{n \cos nx}{n} = \cos nx.$$

$$\|T f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |T f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\cos nx| = 1$$

donc $\dfrac{\|T f_n\|}{\|f_n\|} = n \longrightarrow \infty$ donc la suite $\left(\dfrac{\|T f_n\|}{\|f_n\|}\right)_n$ n'est pas bornée. d'où T n'est pas borné.

2- Opérateur adjoint dans un e. de Hilbert.
Nous allons maintenant généraliser à la dim ($=\infty$) quelconque la notion de la transposée d'une matrice réelle (ou la transconjuguée d'une matrice complexe) en définissant l'adjoint d'un op. lin borné.

3 - Proposition. Soit H un e. de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$.
Il existe un unique op. lin $A^* \in \mathcal{L}(H)$, t. que :
$\forall x, y \in H ; \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$.
de plus $\|A^*\| = \|A\|$.

- Exemple 1
Etant donnée une base sur $\mathbb{C}^n$ et un op. lin. T défini sur $\mathbb{C}^n$ représenté par une matrice A, alors T^* est représenté par la transposée conjuguée $\bar{A}^T$ (si $A = (\alpha_{jk})$ alors $\bar{A}^T = (\bar{\alpha}_{kj})$).
par conséquent les matrices représentatrices sont
- Hermitienne ($\bar{A}^T = A$) si T est auto-adjoint ($T = T^*$)
- unitaire ($\bar{A}^T = A^{-1}$) si T est unitaire ($T^* T = T T^* = I$)
- normale ($\bar{A}^T A = A \bar{A}^T$) si T est normal ($T^* T = T T^*$)

* Remarque 1 $A, B \in \mathcal{L}(X)$.
On appelle produit AB l'op. C défini par :
$\forall x \in X : Cx = A(Bx)$
On définit aussi : $A^2 = A.A$; $A^3 = A^2.A$, ..., $A^n = A^{n-1}.A$.
* Remarque 2 : $A, B \in \mathcal{L}(X)$.
alors : $AB \in \mathcal{L}(X)$.
$\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$.
par récurrence : $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

adjoint d'un opérateur

<u>exemple</u> 2. T op. lin borné, $T \in L_p(]-\infty, \infty[)$ de Hilbert $1 \leq p < \infty$

$$T : L_p(]-\infty, +\infty[) \longrightarrow L_p(]-\infty, +\infty[)$$

$$f \longmapsto (Tf)(t) = f(t+1)$$

trouver T^* l'adjoint de T.

* T^* adjoint de T s'il vérifie

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

i.e $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle$.

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1)\, g(t)\, dt$$

par changement de la variable
$s = t+1 \Rightarrow t = s-1$
$ds = dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, g(s-1)\, ds$$

$$= \langle f, T^* g \rangle$$

où $(T^* g)(t) = g(t-1)$.

4 - <u>Propriétés de l'adjoint</u> :

* <u>Proposition</u> : (propriétés algébriques)
Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
1) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$
2) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
3) $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$
4) $(A^*)^* = A$.
5) si A a un inverse borné A^{-1} alors A^* a aussi un inverse borné et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

* Proposition (propriétés métriques et géométriques)
Soit H un e. de Hilbert. alors :

1) $\|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(H)}$

2) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ et $(\operatorname{Ker} A^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A}$.

3) Si $F \subset H$. F s.e.v stable par A. alors $F^\perp$ est stable par A^*.

5 Définitions

Soit H un e. de Hilbert. $A \in \mathcal{L}(H)$.
A est appelé
1) Auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$.
2) unitaire si $A^*A = AA^* = Id_H$.
3) normal si $A^*A = AA^*$.
4) isométrique si $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in H$.
5) Projecteur si $A^2 = A$.
 - Si de plus $A^* = A$ on dit que A est un projecteur orthogonal.
6) Positif : si A est auto-adjoint et,
 $\forall x \in H : \langle Ax, x\rangle \geq 0$ (et on le note $A \geq 0$).

exemple : L'op. identique I_H est auto-adjoint, positif, normal, isométrique, et unitaire.

6 — Adjoint d'un opérateur dans l'espace dual.

Notation : $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace des formes linéaires
$\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ " " " fonctionnelles linéaires
où E est un e.v. réel (resp. complexe).
E' est muni de la norme : $\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x)$

Lorsque : $f \in E'$ et $x \in E$ on note $\langle f, x\rangle = f(x)$.

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ est le P.S dans la dualité E', E.

7 **Définition de l'adjoint A^* :**

Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$; $\overline{D(A)} = E$

alors $A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$

$$D(A^*) = \{ v \in F' / \exists\, c \geq 0 : |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|, \forall u \in D(A)\}$$

$D(A^*)$ est un s-e-v de F'.

et on a : $\langle v, Au\rangle_{F',F} = \langle A^* v, u\rangle_{E',E}$, $\forall u \in D(A)$
$\forall v \in D(A^*)$.

__Remarque__

$G(A)^{\perp} = \mathcal{J}[G(A^*)]$ t. que : $\mathcal{J} : F' \times E' \longrightarrow E' \times F'$
$[v, f] \longmapsto \mathcal{J}[v, f] = [-f, v]$

8- __Théorème__ $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$; $\overline{D(A)} = E$

Alors $\exists$ un op. lin. unique A^* adjoint de A

$A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow R(A^*) \subset E'$

et l'égalité $\langle v, Au\rangle = \langle A^* v, u\rangle$, $\forall u \in D(A)$
$\forall v \in D(A^*)$

Dans la suite on considère l'op. lin. A t. que :

$A : D(A) \subset E \longrightarrow F$; $\overline{D(A)} = E$

OPERATEURS A DOMAINE DENSE (suite) E et F e. de Banach

Dans la suite, $\boxed{\text{on considère op. lin. borné } A}$;

$A : D(A) \subset E \to F$ $\quad \overline{D(A)} = E$

Th 1 $\quad A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

Th 2 $\quad$ A possède un adjoint A^* à domaine dense

donc $\quad A^{**}$ est une extension de A.

3. **Définition** $\quad G(A) = \{(x, y) \in E \times F \,/\, x \in D(A),\ y = Ax\}$.

Déf: A est fermé ssi $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

4. **Proposition**

A^* est fermé ($G(A^*)$ fermé dans $F' \times E'$)

Remarque $\quad A$ fermé $\Rightarrow N(A)$ fermé $\quad$ ($N(A) = \operatorname{Ker} A$)

$A : D(A) \subset E \to F$, $\overline{D(A)} = E$ $\quad$ ($R(A) = \operatorname{Im} A$)

5. **Corollaire**

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ N(A) = R(A^*)^\perp \\ \cdot\ N(A^*) = R(A)^\perp \\ \cdot\ N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)} \\ \cdot\ N(A^*)^\perp = \overline{R(A)} \end{cases}$$

V Caractérisation des ops à image fermée

1. **Th 1**

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} i)\ R(A) \text{ fermé} \\ \quad\Updownarrow \\ ii)\ R(A^*) \text{ fermé} \\ \quad\Updownarrow \\ iii)\ R(A) = N(A^*)^\perp \\ \quad\Updownarrow \\ iv)\ R(A^*) = N(A)^\perp \end{cases}$$

Remarque

$R(A)$ fermé $\Leftrightarrow \exists\, c > 0$: $\quad \operatorname{dist}(u, N(A)) \leq c\|Au\|,\ \forall u \in D(A)$

2. **Th 2**

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ A \text{ surjectif} \\ \quad\Updownarrow \\ \cdot\ \exists\, c > 0,\ \|v\| \leq c\|A^* v\|,\ \forall v \in D(A^*) \\ \quad\Updownarrow \\ \cdot\ N(A^*) = \{0\} \text{ et } R(A^*) \text{ est fermé} \end{cases}$$

(11)

Th 3

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ A^* \text{ surjectif} \\ \Updownarrow \\ \bullet\ \exists c > 0 : \|u\| \leq c \|Au\|, \ \forall u \in D(A) \\ \Updownarrow \\ \bullet\ N(A) = \{0\} \text{ et } R(A) \text{ est fermé} \end{cases}$$

Remarque : Si $\dim E < \infty$ ou $\dim F < \infty$

Alors A surjectif $\Leftrightarrow A^*$ injectif

A^* surjectif $\Leftrightarrow A$ injectif

Dans le cas général on a :

A surjectif $\Rightarrow A^*$ injectif

A^* surjectif $\Rightarrow A$ injectif

Th 4

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ D(A) = E \\ \Updownarrow \\ \bullet\ A \text{ borné} \\ \Updownarrow \\ \bullet\ D(A^*) = F \\ \Updownarrow \\ \bullet\ A^* \text{ borné} \end{cases}$$

Dans ces conditions on a : $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$

VI Théorème de l'app. ouverte et du graphe fermé

1. Théorème (de l'app ouverte).

E, F deux e. de Banach, $T : E \to F$, T continu et surjectif. Alors : $\exists c > 0$: $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$

i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E$ / $Tx = b$ et $\|x\| \leq c\|y\|$ ($\|x\| \leq c\|Tx\|$).

2. Corollaire E, F deux e de Banach. $T : E \to F$.

T continu et bijectif. Alors T^{-1} est continu de F dans E.

3. Théorème du graphe fermé:

Soient E et F deux e. de Banach. $T : E \to F$. On suppose que le graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

Alors T est continu.

Banach

* $\boxed{T \text{ continu}} \Rightarrow G(T)$ fermé dans $E \times F$
($E \times F$ étant muni de la norme $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$)

4 - Théorème 1 : $T : E \to F$, E, F e. de Banach.

Si $\left.\begin{array}{l} D(T) = E \\ T \text{ fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ fermé

5 - Théorème 2 $T : E \to F$ E, F e. Banach.

$\left.\begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ A^{-1} \text{ existe} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}$ fermé

6. Corollaire $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(E,F) \\ A^{-1} \text{ existe} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}$ fermé

VII Prolongement par continuité

1- <u>Théorème</u> : $A : D(A) \subset X_{e.n} \longrightarrow Y_{e.Banach}$, $R(A) \subset Y$

<u>Si</u> - $\overline{D(A)} = X$

- A bornée sur $D(A)$

<u>Alors</u> $\exists$ un op. lin borné $\tilde{A}$ t. que : $Ax = \tilde{A}x$ $\forall x \in D(A)$
et $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

- <u>Si</u> E est un e. de <u>Hilbert</u>. $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ $(\overline{D(A)} \neq E)$
et A borné sur $D(A)$
<u>Alors</u> $\exists\ \tilde{A}$ t. que : $D(\tilde{A}) = E$,
$\forall x \in D(A) : Ax = \tilde{A}x$ et $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

VIII <u>Supplémentaire topologique - opérateurs inversibles</u>.

1 - <u>Définition</u>

E e. de Banach. $G \subset E$, G s-e-v fermé de E.

L s-e.v. de E

L suff. topo de G si $\begin{cases} \cdot\ L \text{ fermé} \\ \cdot\ G \cap L = \{0\} \text{ et } G + L = E. \end{cases}$

2- <u>Théorème</u> E, F e. de Banach.

$T : E \to F$, T continu et surjectif

<u>Alors</u> : (T admet un inverse à droite)

$\Updownarrow$

($N(T) = T^{-1}\{0\}$ admet un suff. topo dans E)

<u>Rq</u> $T \circ S = Id$: S est un inverse à droite de T

3 <u>Théorème</u> E, F Banach. $T : E \to F$

T continu et injectif

<u>Alors</u> : (T admet un inverse à gauche)

$\Updownarrow$

($R(T) = T(E)$ est fermé et admet un suff topo dans F)

<u>Rq</u> $S \circ T = Id$: S est un inverse à gauche de T

IV.4 Op. inverses dans les e.v.n. Th. de Banach.

$A : D(A) \subset E \longrightarrow R(A) \subset F$, E, F 2 e.v.

! L'op A met en bije $D(A)$ et $R(A)$ ssi $N(A) = \{0\}$.

IV.5- Théorème 2

$\left.\begin{array}{l} A^{-1} \text{ existe} \\ A^{-1} \text{ borné sur } R(A) \end{array}\right) \underline{ssi} \left(\forall x \in D(A),\ m > 0 : \|Ax\| \geq m\|x\| \right)$.

IV.6 Définition

$A : E \to F$. . A est continûment inversible si :

- $R(A) = F$
- A inversible
- $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$

IV.7 Théorème 3

$(A \text{ est continûment inversible}) \underline{ssi} \left\{ \begin{array}{l} R(A) = F \\ \forall x \in D(A) : \|Ax\| \geq m\|x\| ,\ m > 0. \end{array} \right.$

IV.8- Théorème 4 : E, F 2 e. de Banach.

$A : E \xrightarrow{\text{bijective}} F$

donc A^{-1} est borné.

i.e : $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(E, F), \\ E, F \text{ 2 Banach} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ est continûment inversible

Rq : Si A_d^{-1} existe , $R(A) = F$: ($Ax = y$ vérifie le th d'existence)

Si A_g^{-1} existe $N(A) = \{0\}$: ($Ax = y$ " " " d'unicité)

* Lemme 1 : $A \in \mathcal{L}(E, F)$. A admet les inverses A_d^{-1} et A_g^{-1}

Alors $\exists A^{-1}$ inverse de A t.q :

1) $A^{-1} = A_d^{-1} = A_g^{-1}$
2) $D(A^{-1}) = F$, $R(A^{-1}) = E$.
3) A_d^{-1} et A_g^{-1} sont uniques.

Lemme 2 $A \in \mathcal{L}(E,F)$

Si $\exists U \in \mathcal{L}(F,E)$ t.que :

$U.A = Id_E$ et $AU = Id_F$

Alors A est continûment inversible et $A^{-1} = U$.

9 - Existence de $(I-C)^{-1}$.

E e.de Banach.

I = op. identique de $\mathcal{L}(E)$.

On pose $C = I - A$; $\|I-A\| = \|A-I\| = \|C\|$

10 - Théorème 5

Soit $C \in \mathcal{L}(E)$. t.que $\|C\| < 1$.

L'op. $I-C$ est continûment inversible

et $\|I-C\|^{-1} \leq \frac{1}{1-\|C\|}$

de plus : $\|I-(I-C)^{-1}\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|C\|}$