

Chapitre 04

Restauration et reconstruction d'image

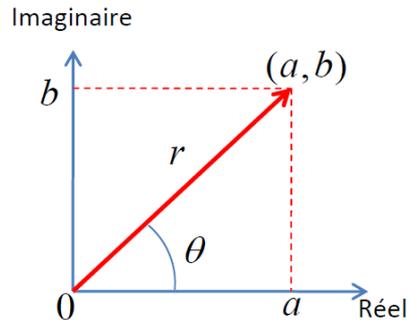
Aissa Boulmerka

2021-2022

1- FILTRAGE D'IMAGES DANS LE DOMAINE DE FOURIER

Rappel sur les nombres complexes

- Si x est un nombre complexe, alors : $x = a + ib$ $a, b \in \mathbf{R}$ et $i^2 = -1$



$$\begin{cases} x = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \text{Amplitude} = r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{Module} = \theta = \arctg(b/a) \end{cases}$$

Formule d'Euler : $x = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Notations:

- Algébrique : $x = a + ib$
- Cartésienne : $x = (a, b)$
- Polaire : $x = (r, \theta)$
- Géométrique : $x = r e^{i\theta}$
- Trigonométrique : $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

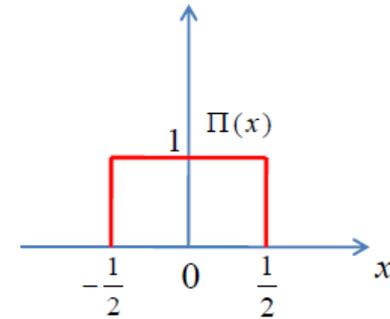
Rappel sur les nombres complexes

Addition	$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$ $a, b, c, d \in \mathbf{R}$
Soustraction	$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
Multiplication	$k(a + ib) = ka + ikb, \quad k \in \mathbf{R}$ $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
Conjugué	$x = a + ib \rightarrow \bar{x} = a - ib$ $x = re^{i\theta} \rightarrow \bar{x} = re^{-i\theta}, \theta, r \in \mathbf{R}$
Notation complexe de cos et sin.	$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

Quelques fonctions utiles

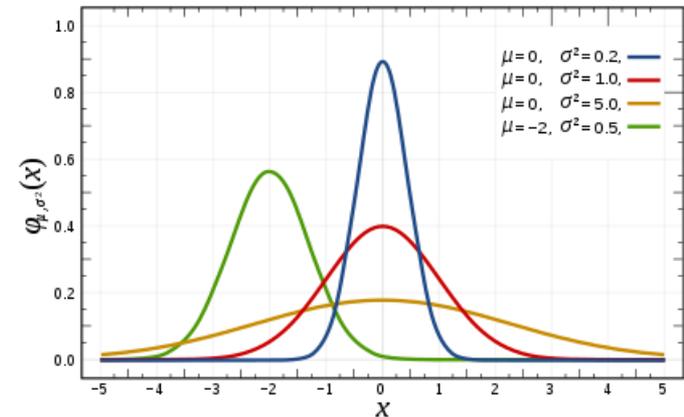
- **Fonction porte :**

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- **Fonction Gaussienne :**

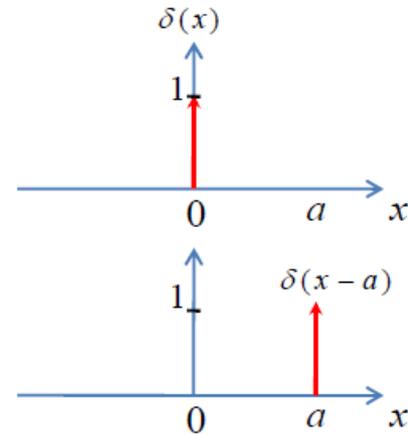
$$N(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Quelques fonctions utiles

- **Fonction Dirac :**

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

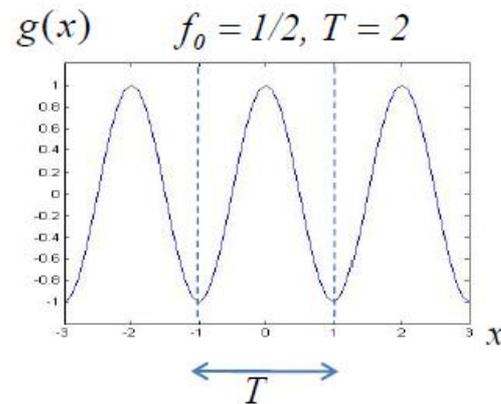


Propriétés:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$

Notion de spectre

Soit un signal g de période T et de fréquence $f_0 = \frac{1}{T}$: $g(x) = r \cos(2\pi f_0 x)$



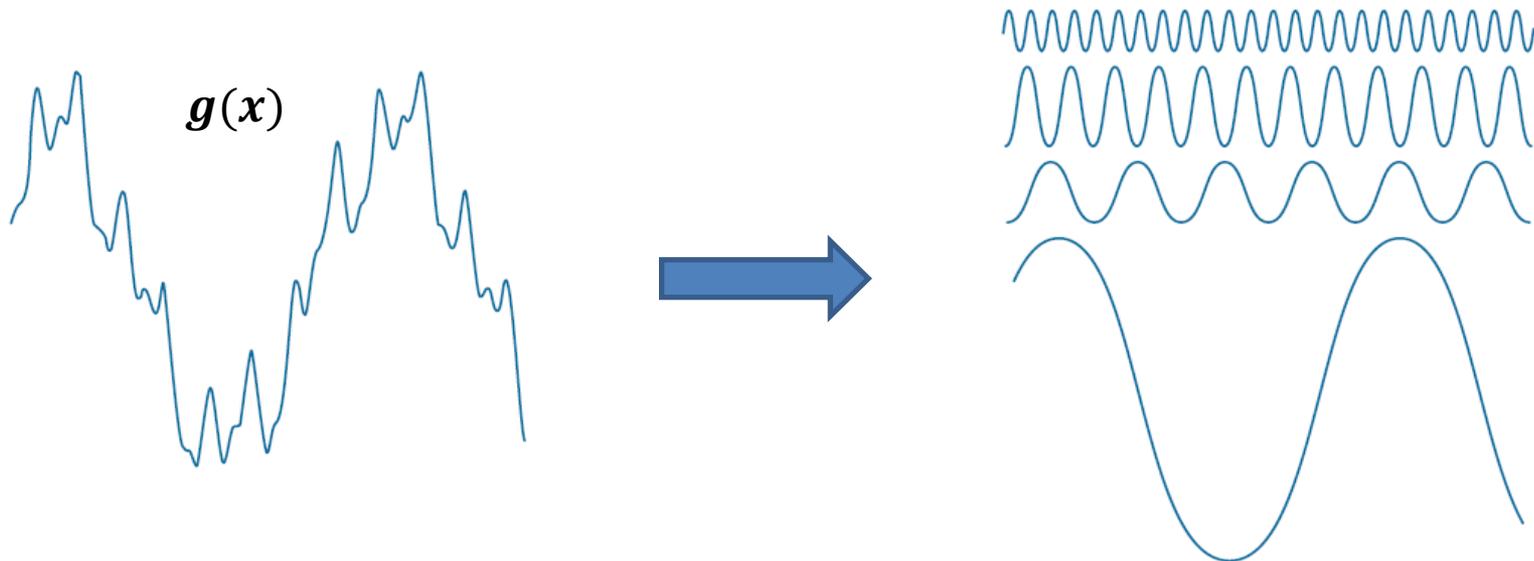
$$g(x) = \frac{r}{2} \left(e^{i2\pi f_0 x} + e^{-i2\pi f_0 x} \right)$$

Séries de Fourier

Soit un signal périodique g de fréquence $f_0 = \frac{1}{T}$

Le signal g peut être décomposé en une somme dénombrable (parfois infinie) de sinus et de cosinus.

- Exemple:



Décomposition de g (à gauche) en sinusoïdales de base.

Séries de Fourier

Soit un signal périodique g de fréquence $f_0 = \frac{1}{T}$

Exprimer un signal $g(x)$ de période T comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples de $f_0 = \frac{1}{T}$ dite **fréquence fondamentale**.

$$g(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

Coefficients de la série:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx$$

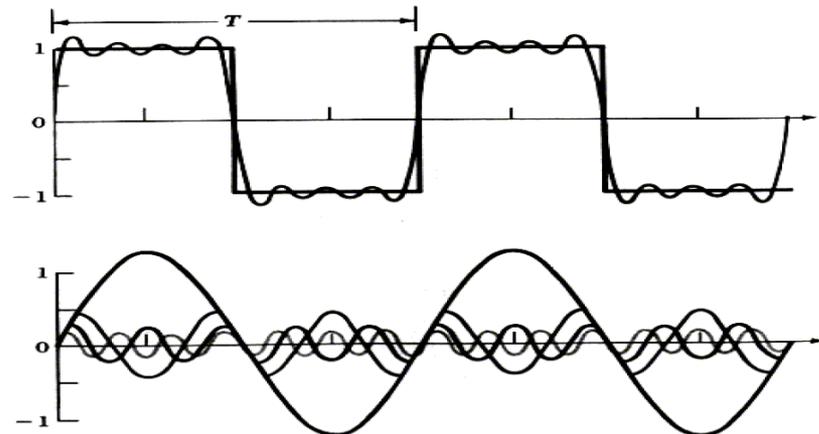
$$R_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) dx$$

Séries de Fourier



$$g(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots \right)$$



Séries de Fourier

$$g(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 x) \quad (\text{Série de Fourier})$$

$$g(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 x} + \overline{C_n} e^{-i2\pi n f_0 x} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) e^{-i2\pi n f_0 x} dx$$

Si $g(x)$ est un signal réel, ce qui est la plupart du temps le cas, alors $C_n = C_{-n}$:

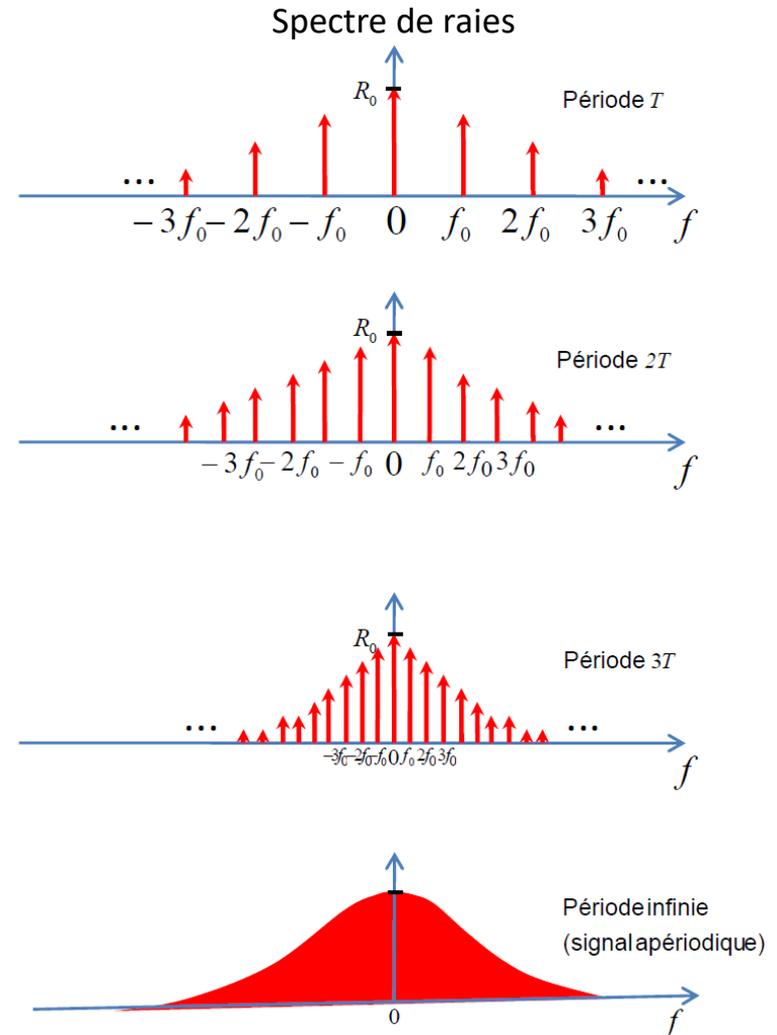
$$g(x) = R_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 x}$$
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) e^{-i2\pi n f_0 x} dx \quad C_0 = R_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) dx$$

Séries de Fourier d'un signal apériodique

Évidemment, plus la période d'un signal périodique est élevée et plus la fréquence fondamentale (ainsi que la distance entre les harmoniques) est petite.

Mathématiquement, on peut voir un signal **apériodique** comme un signal périodique de **période infinie**.

La série de Fourier d'un tel signal est une suite infinie et indénombrable de sinusoides. En d'autres mots, la **somme est remplacée par une intégrale**.



Transformée de Fourier

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 x} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) e^{-i2\pi n f_0 x} dx$$

Pour un signal apériodique $T \rightarrow \infty$ et $n f_0 = n/T \rightarrow u$. En remplaçant la somme par une intégrale et C_n par $G(u)$ on obtient **une transformée de Fourier (TF)** et son inverse :

$$\mathfrak{F}[g(x)] = G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi u x} dx$$
$$\mathfrak{F}^{-1}[G(u)] = g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{i2\pi u x} du$$

Transformée de Fourier

Résumé

Soit $g(x)$ est un signal périodique

$$g(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx \quad R_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) dx$$

En remplaçant les **cos** et **sin** par des **exp**

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 x} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(x) e^{-i2\pi n f_0 x} dx$$

En tendant à l'infini la période T du signal

$$\mathfrak{F}[g(x)] = G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi u x} dx \quad \mathfrak{F}^{-1}[G(u)] = g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{i2\pi u x} du$$

Transformée de Fourier

Définition de la TF

Soit signal $g(x)$ un signal non périodique. La TF de $g(x)$, si elle existe, est:

$$\mathcal{F}[g(x)] = G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i2\pi ux} dx$$

- $G(u)$ indique la "quantité" de fréquence u présente dans le signal $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. $G(u)$ donne des informations fréquentielles sur $g(x)$.

$$G(u) = \underbrace{Re[G(u)]}_{\text{Partie réelle}} + i \underbrace{Im[G(u)]}_{\text{Partie imaginaire}}$$

- $G(u)$: fonction complexe (de la variable réelle u) qui admet
 - Un **spectre d'amplitude**: $|G(u)| = \sqrt{Re^2[G(u)] + Im^2[G(u)]}$
 - Un **spectre de phase**: $\theta(u) = \arctg\left(\frac{Im[G(u)]}{Re[G(u)]}\right)$

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier inverse

Soit signal $g(x)$ un signal non périodique. Si elle existe, la TF inverse est définie par:

$$\mathfrak{F}^{-1}[G(u)] = g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{i2\pi ux} du$$

Notations

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \mathfrak{F}[g(x)] = G(u) & \blacksquare \mathfrak{F}^{-1}[G(u)] = g(x) \end{array}$$

$g(x)$ et $G(u)$ sont deux descriptions équivalentes (temporelle ou fréquentielle) du même signal. On écrit : $g(x) \leftrightarrow G(u)$

Propriétés de la Transformée de Fourier

- **Linéarité:**

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[af(x) + bg(x)] &= aF(u) + bG(u) \\ \mathfrak{F}^{-1}[aF(u) + bG(u)] &= af(x) + bg(x)\end{aligned}\quad a, b \in \mathbb{R}$$

- **Changement d'échelle:**

$$\mathfrak{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^*$$

- **Translation:**

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[g(x - a)] &= e^{-i2\pi ua} G(u) \\ \mathfrak{F}^{-1}[G(u - a)] &= e^{i2\pi xa} g(x)\end{aligned}\quad a \in \mathbb{R}$$

- **Dérivées:**

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^n g(x)}{\partial x^n}\right] &= (i2\pi u)^n G(u) \\ \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{\partial^n G(u)}{\partial u^n}\right] &= (-i2\pi x)^n g(x)\end{aligned}\quad a \in \mathbb{R}$$

Propriétés de la Transformée de Fourier

- Si $g(x)$ est une fonction paire, alors $G(u)$ est réelle (i.e., $\text{Im}[G(u)] = 0$)

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi ux} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) (\cos(2\pi ux) + i \sin(2\pi ux)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cos(2\pi ux) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \sin(2\pi ux) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cos(2\pi ux) dx \end{aligned}$$

Si $g(x)$ est impaire, alors $G(u)$ est imaginaire (i.e., $\text{Re}[G(u)] = 0$)

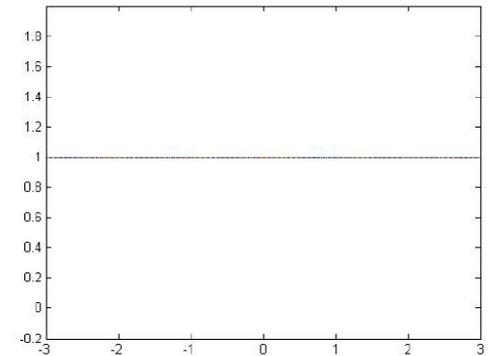
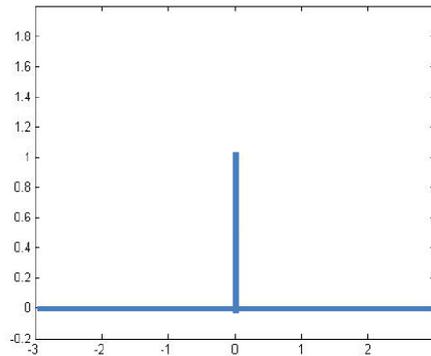
Si $g(x)$ est paire, alors $\mathfrak{F}[g(x)] = \mathfrak{F}^{-1}[g(u)]$

Propriétés de la Transformée de Fourier

- **Fonction Dirac:**

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = 1$$

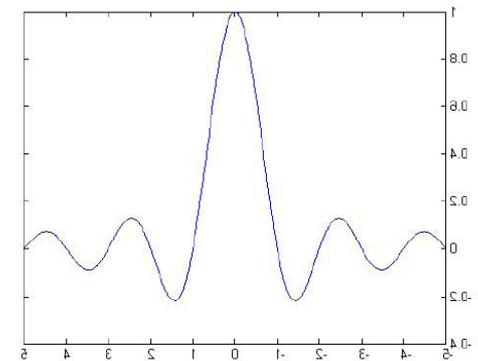
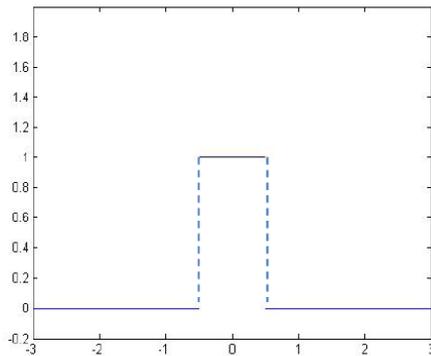
$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(u)] = 1$$



- **Fonction porte:**

$$\mathcal{F}[\Pi(x)] = \frac{\sin(u)}{u} = \text{sinc}(u)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\Pi(u)] = \frac{\sin(x)}{x} = \text{sinc}(x)$$

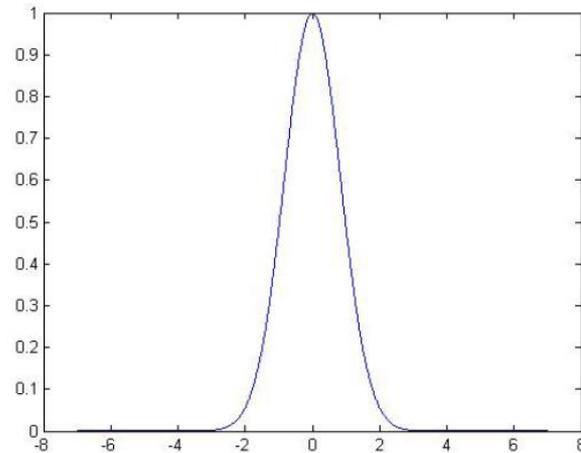
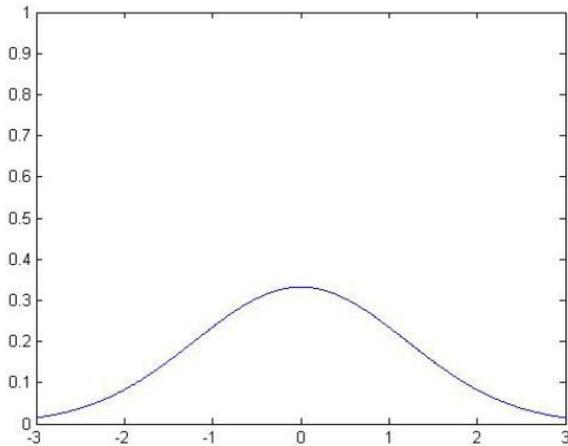


Propriétés de la Transformée de Fourier

- **Fonction Gaussienne:**

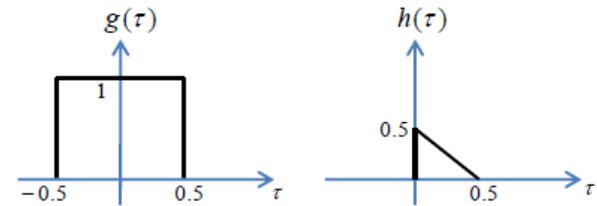
$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right] = e^{-2\pi^2u^2\sigma^2}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[e^{-2\pi^2u^2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

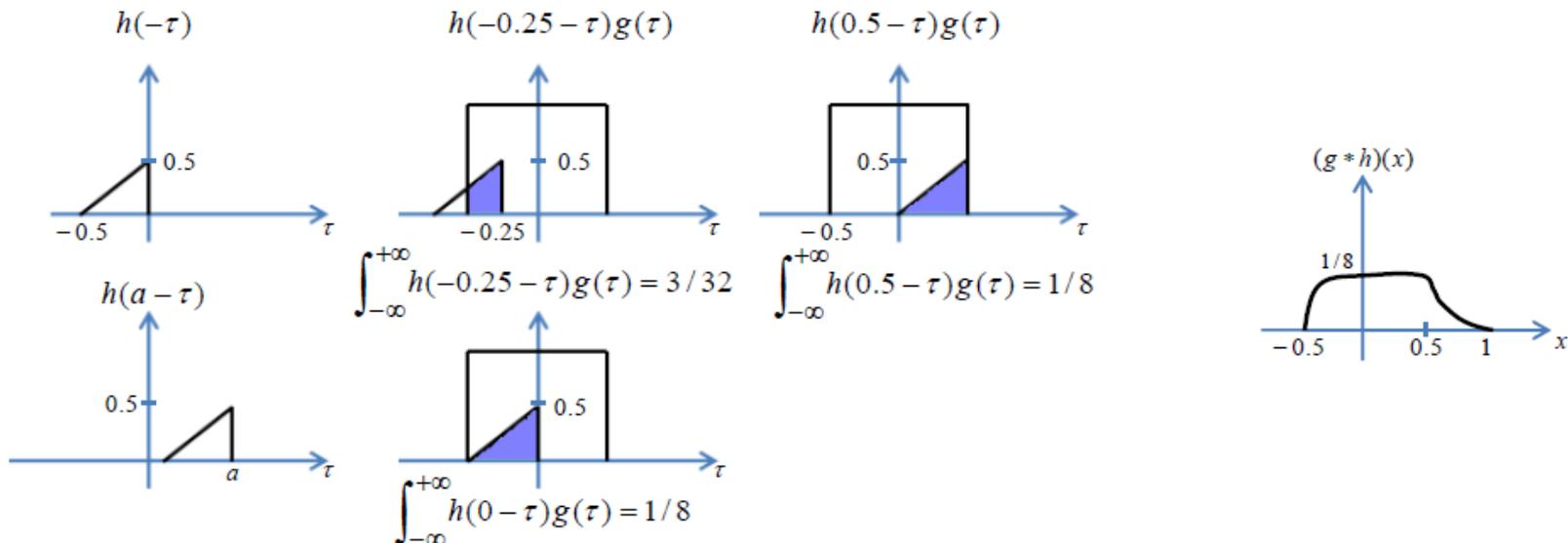


Convolution spatiale

- Concept fondamental en traitement d'images, à la base de nombreux filtres. Soit deux signaux 1D $g(x)$ et $h(x)$:



$$(g * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)h(x - \tau)d\tau$$



Convolution et transformée de Fourier

- On peut facilement démontrer que:

$$\mathfrak{F}[(g * h)(x)] = G(u) \times H(u)$$

où $\mathfrak{F}[g(x)] = G(u)$ et $\mathfrak{F}[h(x)] = H(u)$

- De même:

$$\mathfrak{F}^{-1}[(G * H)(u)] = g(x) \times h(x)$$

Autres propriétés

- Commutativité:

$$(g * h)(x) = (h * g)(x)$$

- Associativité:

$$(f * (g * h))(x) = ((f * g) * h)(x)$$

- Distributivité:

$$(f * (g + h))(x) = ((f * g) + (f * h))(x)$$

- Multiplication par un scalaire:

$$a(g * h)(x) = (ag * h)(x) = (g * ah)(x) \quad a \in R$$

Transformée de Fourier 2D

- Cas 1D:

$$\mathfrak{F}[g(x)] = G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[G(u)] = g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{i2\pi ux} du$$

- Cas 2D:

$$\mathfrak{F}[g(x, y)] = G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)] = g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

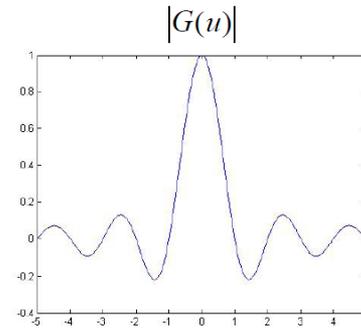
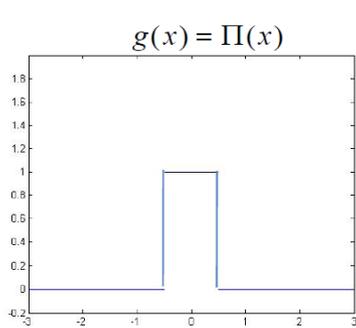
où x, y sont des coordonnées **spatiales** et u, v des coordonnées **spectrales**

$$G(u) = \operatorname{Re}[G(u, v)] + i \operatorname{Im}[G(u, v)]$$

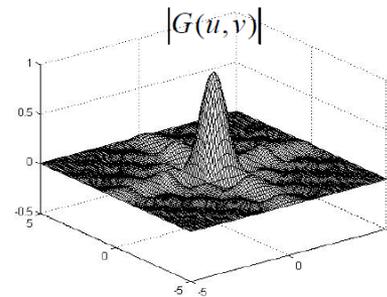
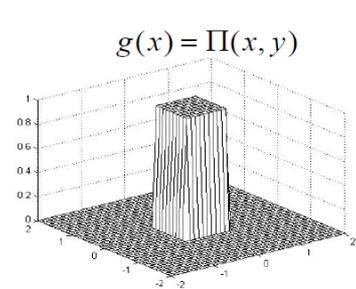
- **spectre d'amplitude:** $|G(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[G(u, v)] + \operatorname{Im}^2[G(u, v)]}$
- **spectre de phase:** $\theta(u, v) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}[G(u, v)]}{\operatorname{Re}[G(u, v)]} \right)$

Transformée de Fourier 2D

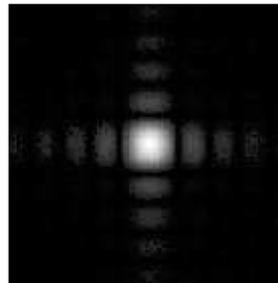
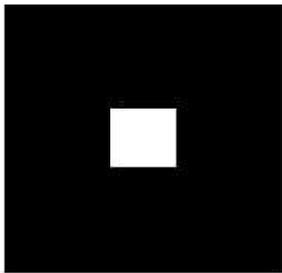
Exemple:



$$G(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$



$$G(u, v) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$$



Transformée de Fourier discrète 2D

- **Cas continu:**

$$\mathfrak{F}[g(x, y)] = G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)] = g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

- **Cas discret:**

$$\text{DFT: } G(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} g(x, y) e^{-i2\pi(ux/N+vy/M)} \quad \begin{array}{l} u = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \\ v = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \end{array}$$

$$\text{IDFT: } g(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} G(u, v) e^{i2\pi(ux/N+vy/M)} \quad \begin{array}{l} x = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \\ y = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \end{array}$$

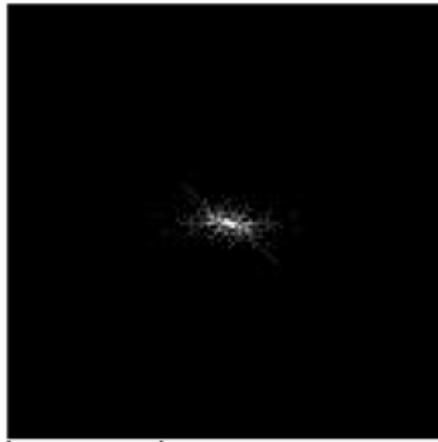
où $g(x, y)$ est une image numérique de taille $N \times M$.

Transformée de Fourier discrète 2D

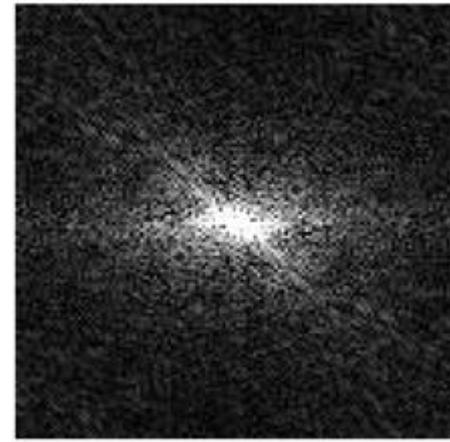
- Exemple:



$g(x, y)$



$G(u, v)$



$255\log(1 + |G(u, v)|)$

Remarques:

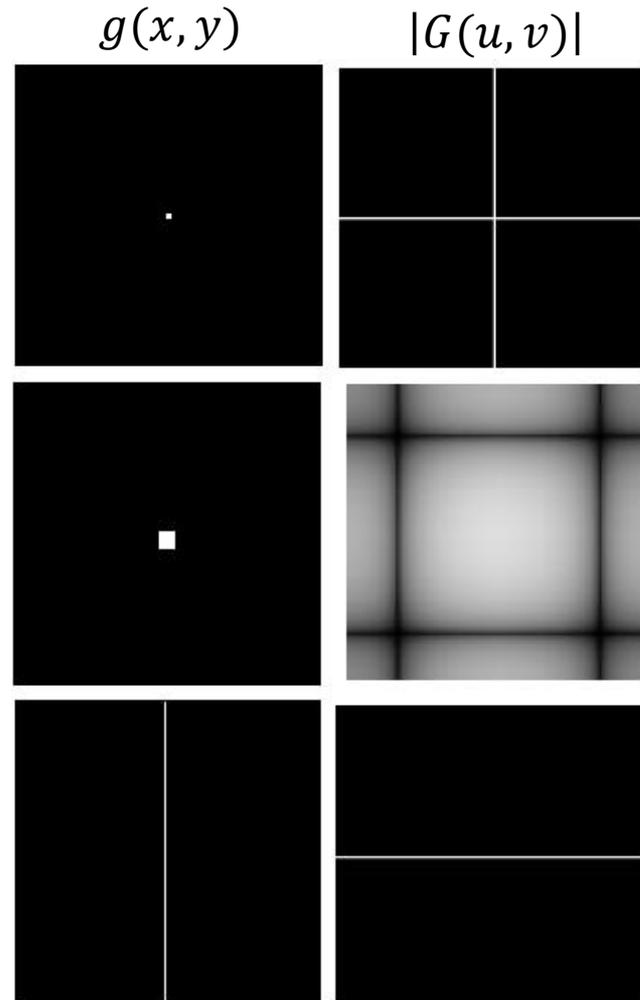
- Puisque les hautes fréquences sont beaucoup plus faibles que les basses fréquences, on utilise fréquemment un recalage logarithmique:
- On positionne l'origine au centre de l'image à l'aide d'un recalage cyclique.
- Les propriétés de la TF 2D sont les mêmes que pour la TF 1D.

Transformée de Fourier discrète 2D

Un pixel isolé peut être vu comme un delta de Dirac en x et en y .

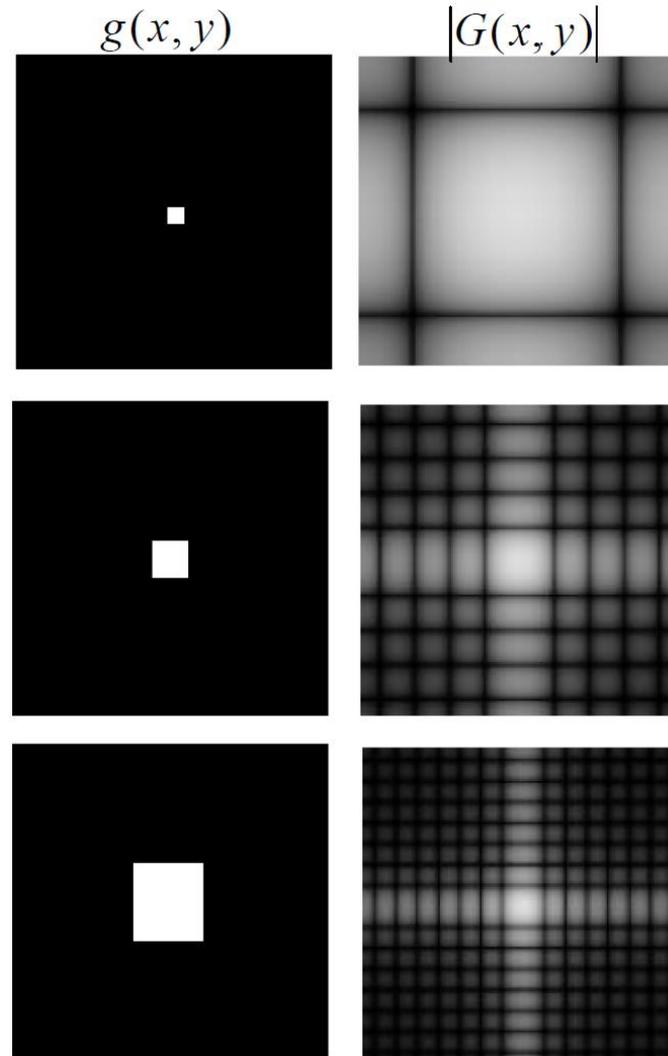
Un carré peut être vu comme une fonction porte en x et en y .

Un trait vertical d'un pixel d'épaisseur peut être vu comme un delta de Dirac en x et comme un signal continu en y .



Transformée de Fourier discrète 2D

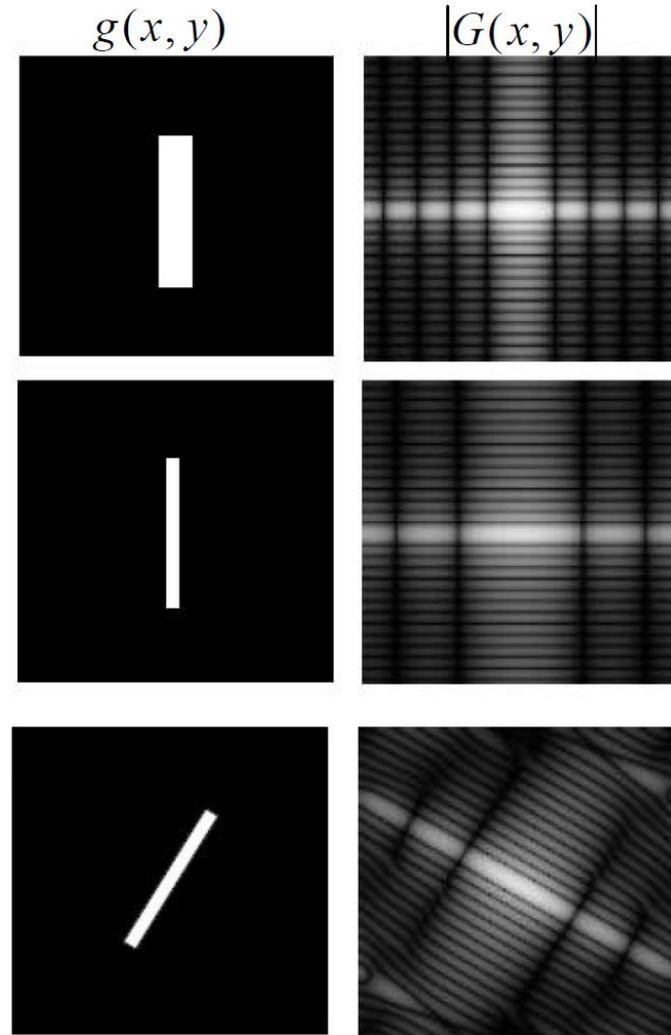
Application de la propriété du changement d'échelle vue précédemment.



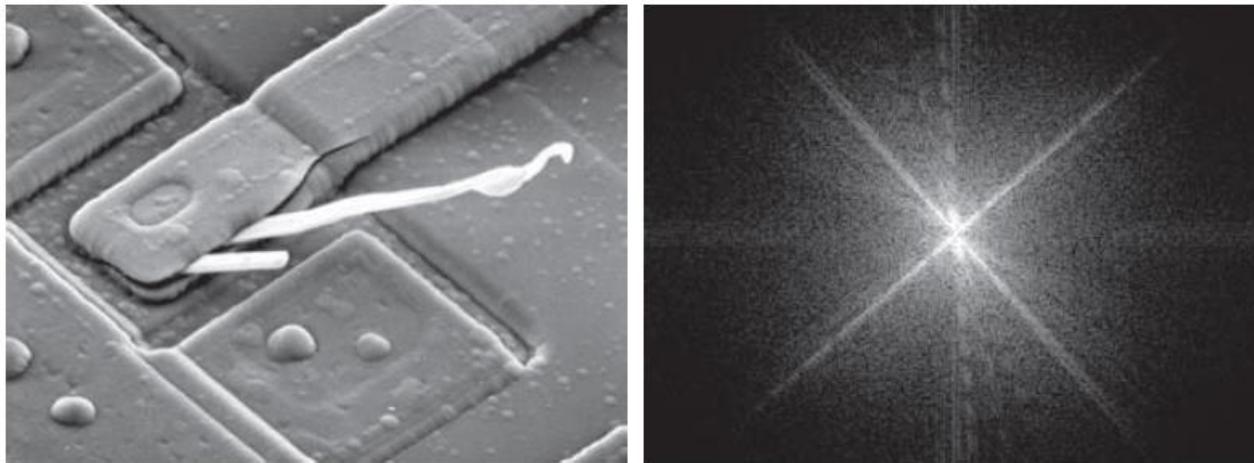
Transformée de Fourier discrète 2D

Application de la propriété du changement d'échelle vue précédemment.

Rotation dans le domaine spatial = rotation dans le domaine spectral.



Transformée de Fourier discrète 2D



a b

FIGURE 4.28 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

Convolution 2D

- **Cas continu:**

$$(g * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)h(x - \tau)d\tau$$

$$(g * h)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau, \ell)h(x - \tau, y - \ell)d\tau d\ell$$

- **Cas discret:**

$$(g * h)(x) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} g(\tau)h(x - \tau)$$

$$(g * h)(x, y) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=+\infty} g(\tau, \ell)h(x - \tau, y - \ell)$$

- **Rappel théorème de la convolution:**

$$\mathfrak{F}[(g * h)(x)] = G(u) \times H(u)$$

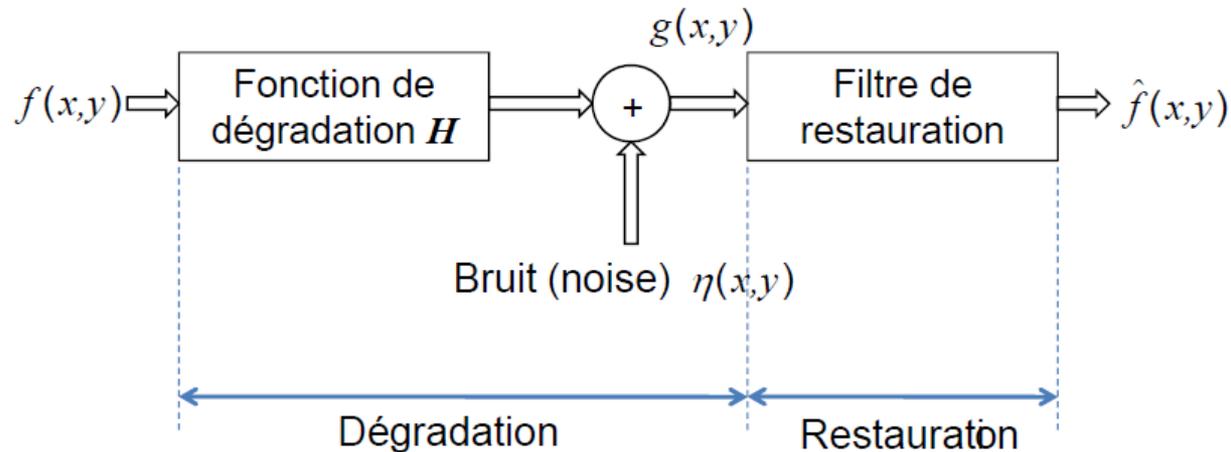
$$\mathfrak{F}^{-1}[(G * H)(u)] = g(x) \times h(x)$$

$$\mathfrak{F}[(g * h)(x, y)] = G(u, v) \times H(u, v)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[(G * H)(u, v)] = g(x, y) \times h(x, y)$$

2- MODÈLES DE DÉGRADATION D'IMAGES

Modèle de dégradation



$$g(x, y) = (h * f)(x, y) + \eta(x, y) \rightarrow \text{Domaine spatial}$$



$$G(u, v) = H(u, v) * F(u, v) + N(u, v) \rightarrow \text{Domaine fréquentiel}$$

Dans le reste de ce cours, on s'intéresse seulement aux dégradations de type bruits.

Modèle de dégradation

Les principales causes de bruit surviennent lors de l'acquisition ou/et la transmission de l'image.

Lors de l'acquisition, la performance des senseurs est généralement affectée par différents facteurs (ex. conditions atmosphériques, la qualité du senseur, etc.).

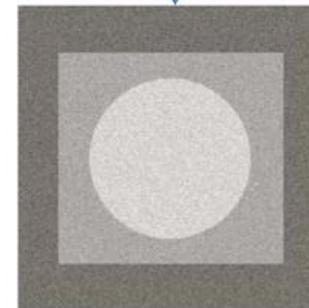
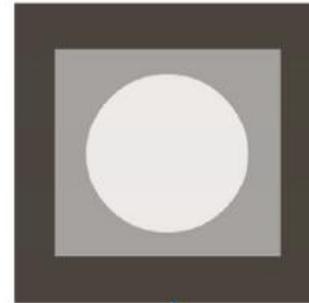
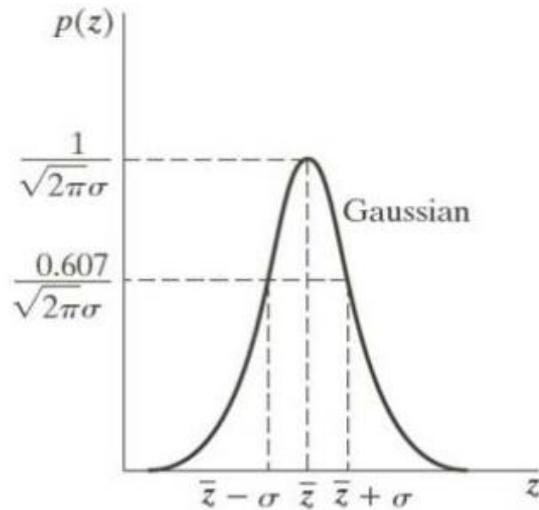
Lors de la transmission, les images peuvent être corrompues à cause d'interférences dans le canal.

L'objectif de la restauration est d'obtenir une estimation de $f(x, y)$ de l'image originale. En général, en connaissant H et η , on obtient $\hat{f}(x, y)$ qui approxime bien $f(x, y)$.

Modèles de bruit

Bruit Gaussien (normal)

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma^2}\right).$$



Modèles de bruit

Bruit Rayleigh

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a) \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{b}\right) & \text{si } z > a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

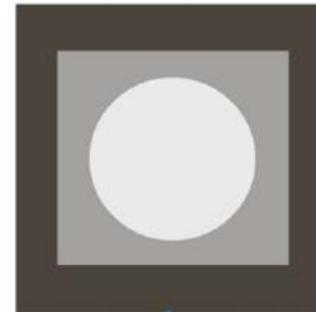
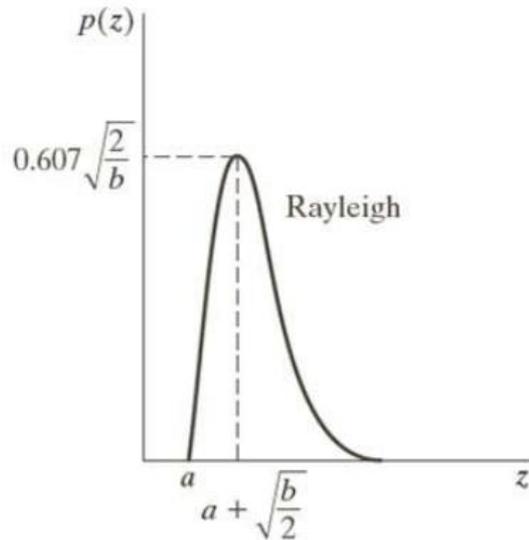


Image originale

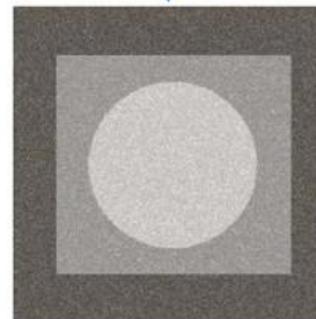
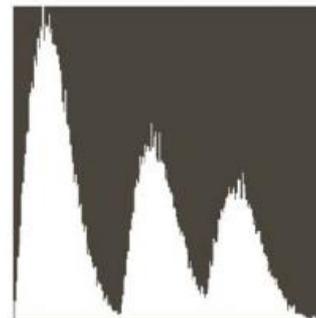


Image bruitée



Histogramme
de Image bruitée

Modèles de bruit

Bruit Gamma (Erlang)

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} \exp(-az) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

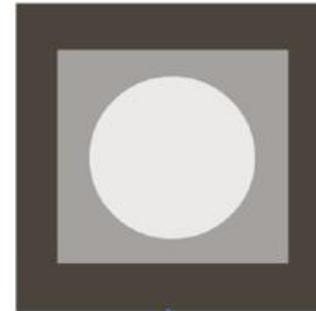
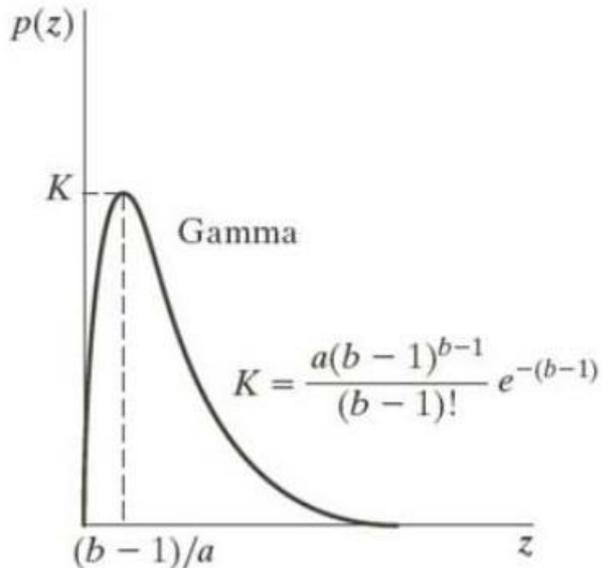


Image originale

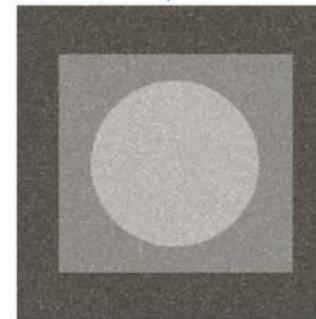
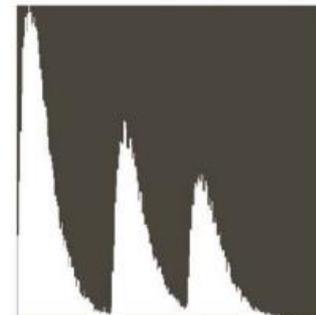


Image bruitée



Histogramme
de Image bruitée

Modèles de bruit

Bruit exponentiel

$$p(z) = \begin{cases} a \exp(-az) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

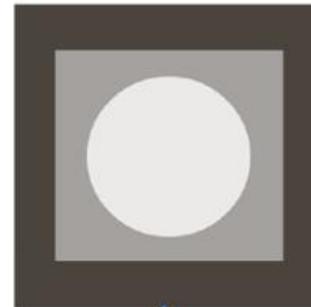
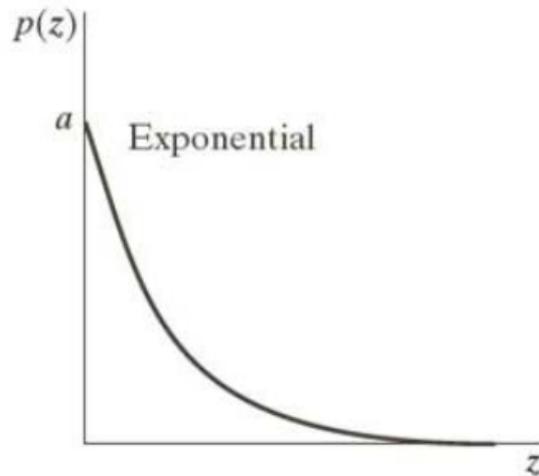


Image originale

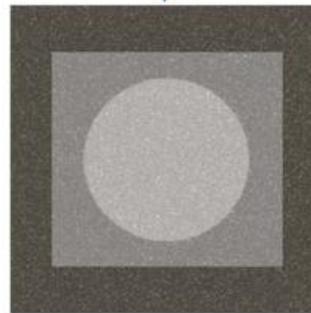


Image bruitée

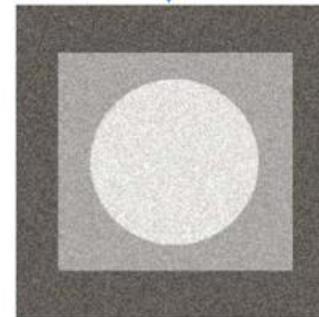
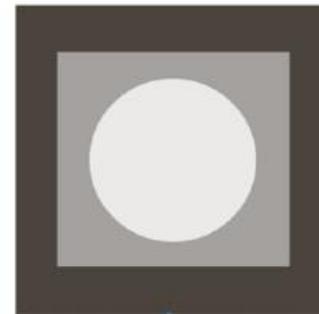
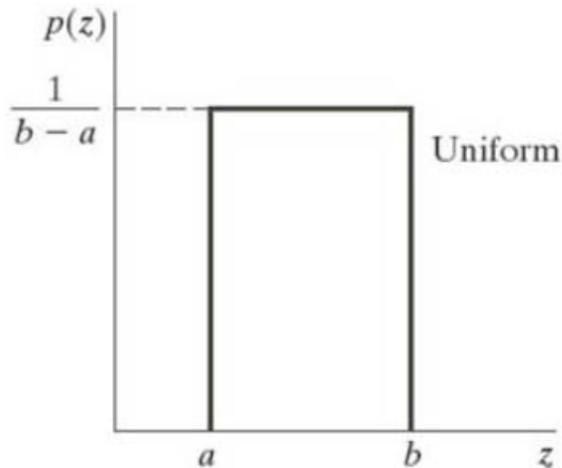


Histogramme
de Image bruitée

Modèles de bruit

Bruit uniforme

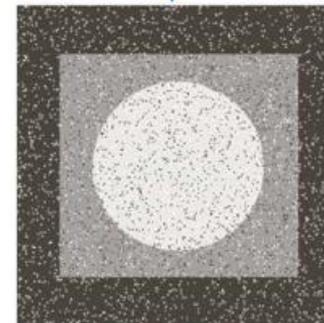
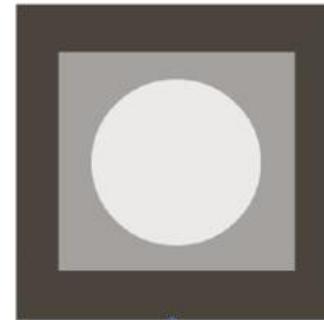
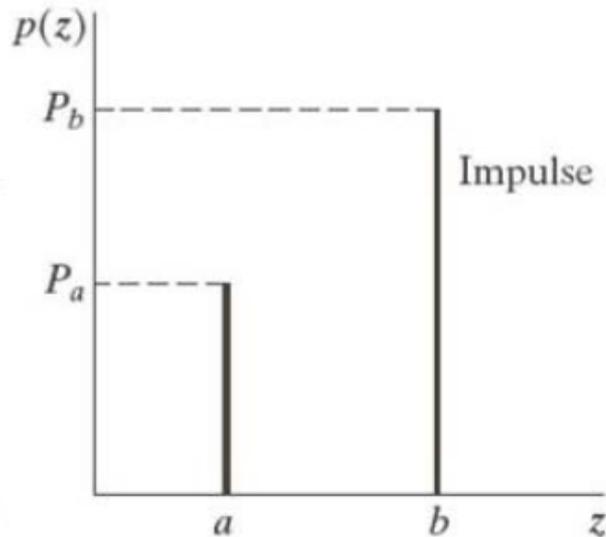
$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Modèles de bruit

Bruit impulsion (sel et poivre)

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{si } z = a \\ P_b & \text{si } z = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Estimation des paramètres du bruit

- Les paramètres du bruit peuvent être estimés par les spécifications du capteur (sensor), ou bien directement sur une image.
- Sur une image, il suffit de voir le profil d'une zone complètement homogène pour estimer la forme (distribution) du bruit.
- **Exemple:**

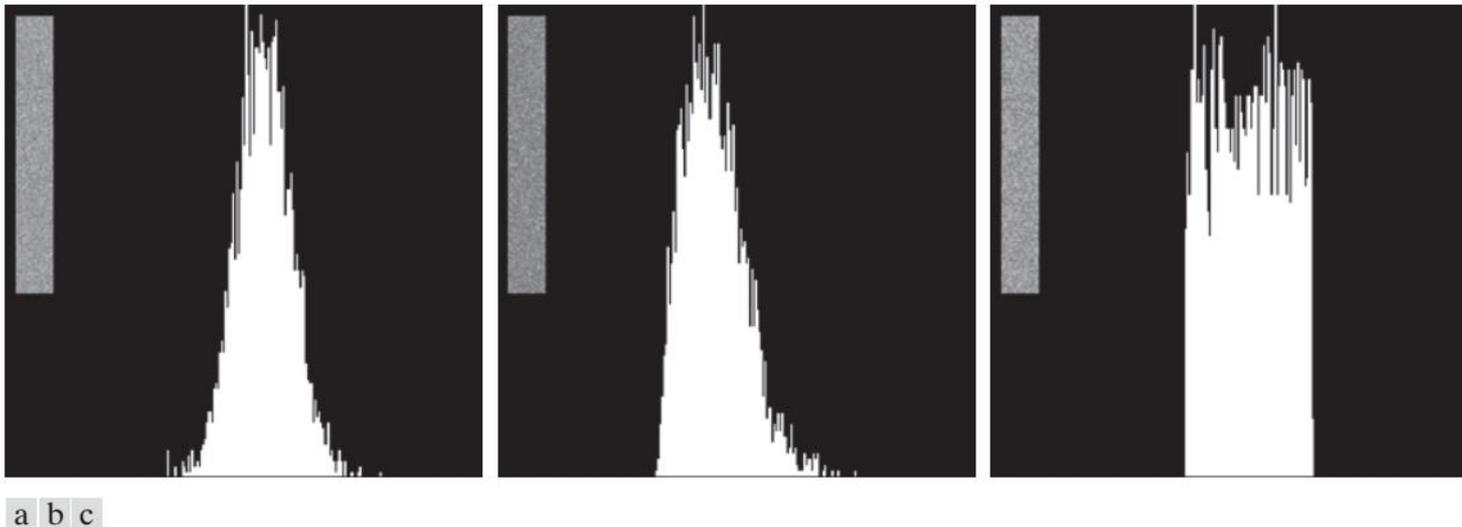


FIGURE 5.6 Histograms computed using small strips (shown as inserts) from (a) the Gaussian, (b) the Rayleigh, and (c) the uniform noisy images in Fig. 5.4.

3- RESTAURATION D'IMAGES BRUITÉES (FILTRES SPATIAUX)

Filtres basés sur la moyenne

Soit $W(x, y)$ le voisinage du pixel (x, y) .

Moyenne arithmétique

$$g(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{(s,t) \in W(x,y)} f(s, t)$$

Lisse localement l'image pour réduire le bruit.

Moyenne géométrique

$$g(x, y) = \left(\prod_{(s,t) \in W(x,y)} f(s, t) \right)^{\frac{1}{MN}}$$

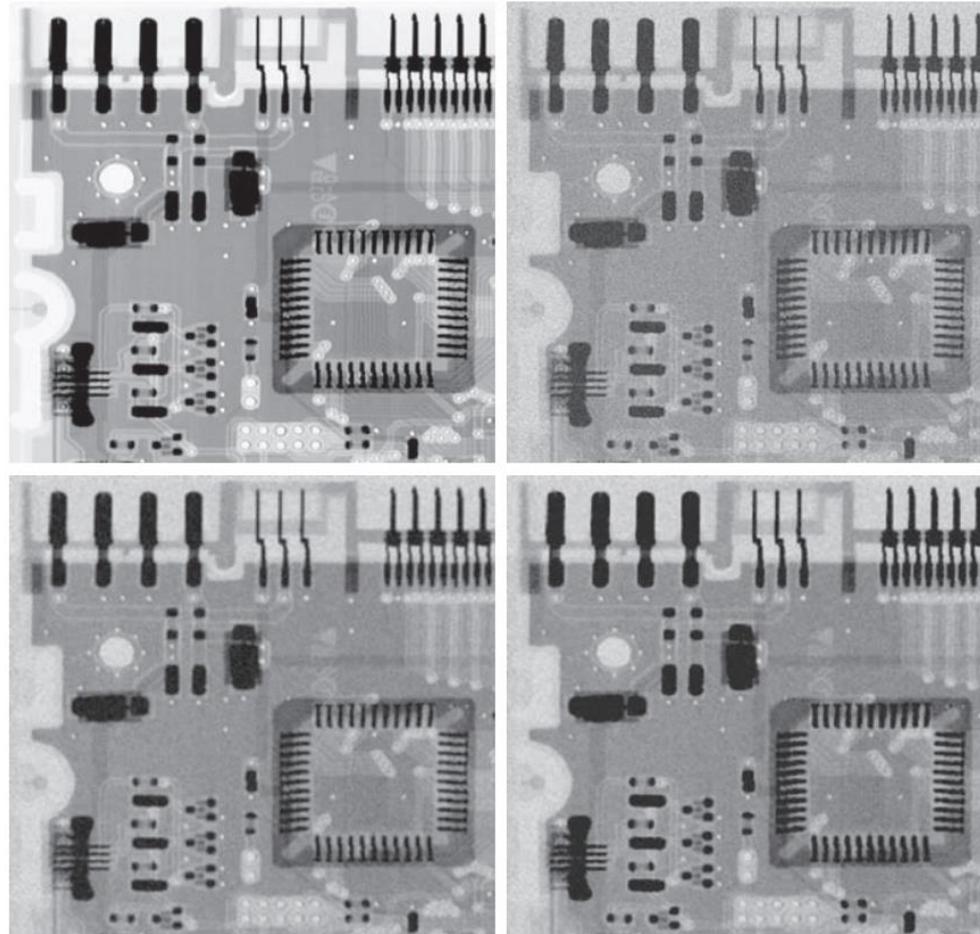
Obtient presque le même résultat que le moyenne arithmétique. Par contre, elle préserve mieux les détails de l'image.

Filtres basés sur la moyenne

a	b
c	d

FIGURE 5.7

(a) X-ray image of circuit board. (b) Image corrupted by additive Gaussian noise. (c) Result of filtering with an arithmetic mean filter of size 3×3 . (d) Result of filtering with a geometric mean filter of the same size. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)



Filtres basés sur la moyenne

Soit $W(x, y)$ le voisinage du pixel (x, y) .

Moyenne contre-harmonique

$$g(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in W(x,y)} f(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in W(x,y)} f(s,t)^Q}$$

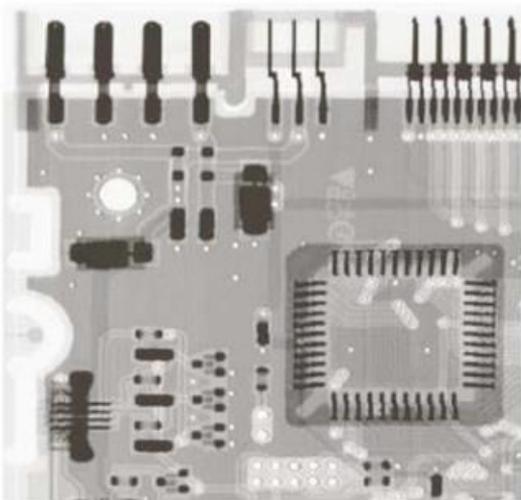


Image originale

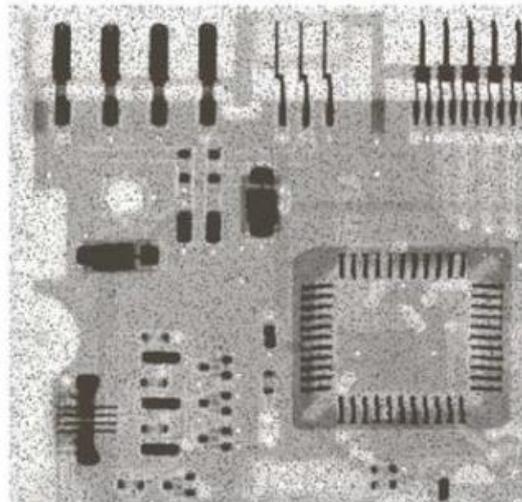


Image avec bruit poivre

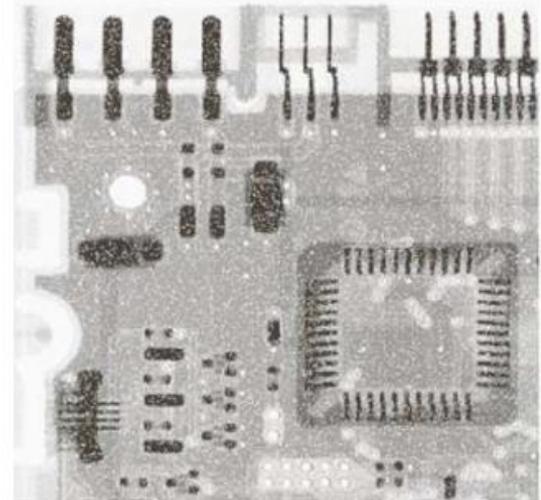


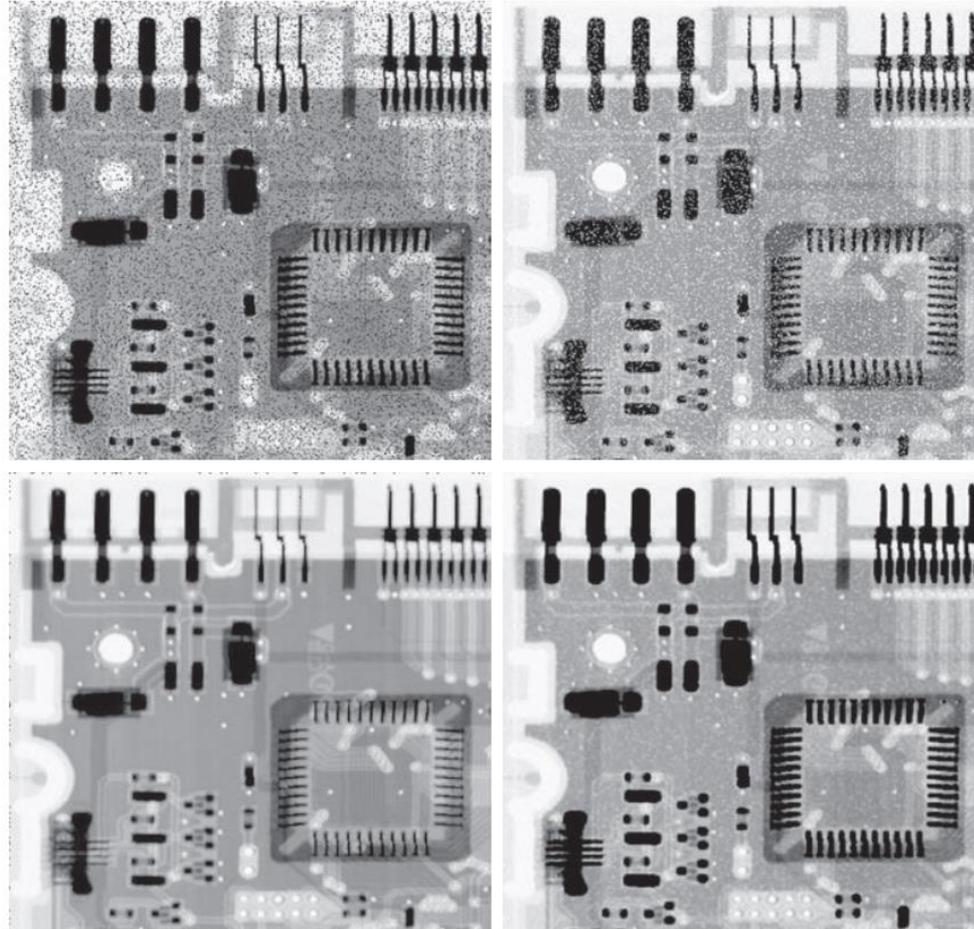
Image avec bruit sel

Filtres basés sur la moyenne

a	b
c	d

FIGURE 5.8

(a) Image corrupted by pepper noise with a probability of 0.1. (b) Image corrupted by salt noise with the same probability. (c) Result of filtering (a) with a 3×3 contra-harmonic filter $Q = 1.5$. (d) Result of filtering (b) with $Q = -1.5$.



Filtres basés sur la moyenne

Résumé:

Filtre	Avantages	Inconvénients
Moyenne arithmétique	Réduit le bruit. Traite tous les genres de bruit.	Introduit le beaucoup de floue.
Moyenne géométrique	Réduit le bruit. Garde mieux les détails de l'image que le filtre moyen. Traite tous les genres de bruit.	Sensible au valeurs nulles des niveaux de gris.
Filtre contre-armonique	Réduit effacement les bruits sel ou (exclusif) poivre. Peut être adapté facilement aux autres types de bruit.	On doit connaitre le genre de bruit (ex. sel ou poivre) pour ajuster la constante Q. Sensible aux valeurs nulles.

Filtres basés sur les statistiques d'ordre

Maximum local

$$g(x, y) = \max_{(s,t) \in W(x,y)} (f(s, t))$$

Pour le bruit poivre

Minimum local

$$g(x, y) = \min_{(s,t) \in W(x,y)} (f(s, t))$$

Pour le bruit sel

Max-min local

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \left(\min_{(s,t) \in W(x,y)} (f(s, t)) + \max_{(s,t) \in W(x,y)} (f(s, t)) \right)$$

Pour le bruit gaussien
et uniforme

Médiane locale

$$g(x, y) = \text{médiane}_{(s,t) \in W(x,y)} (f(s, t))$$

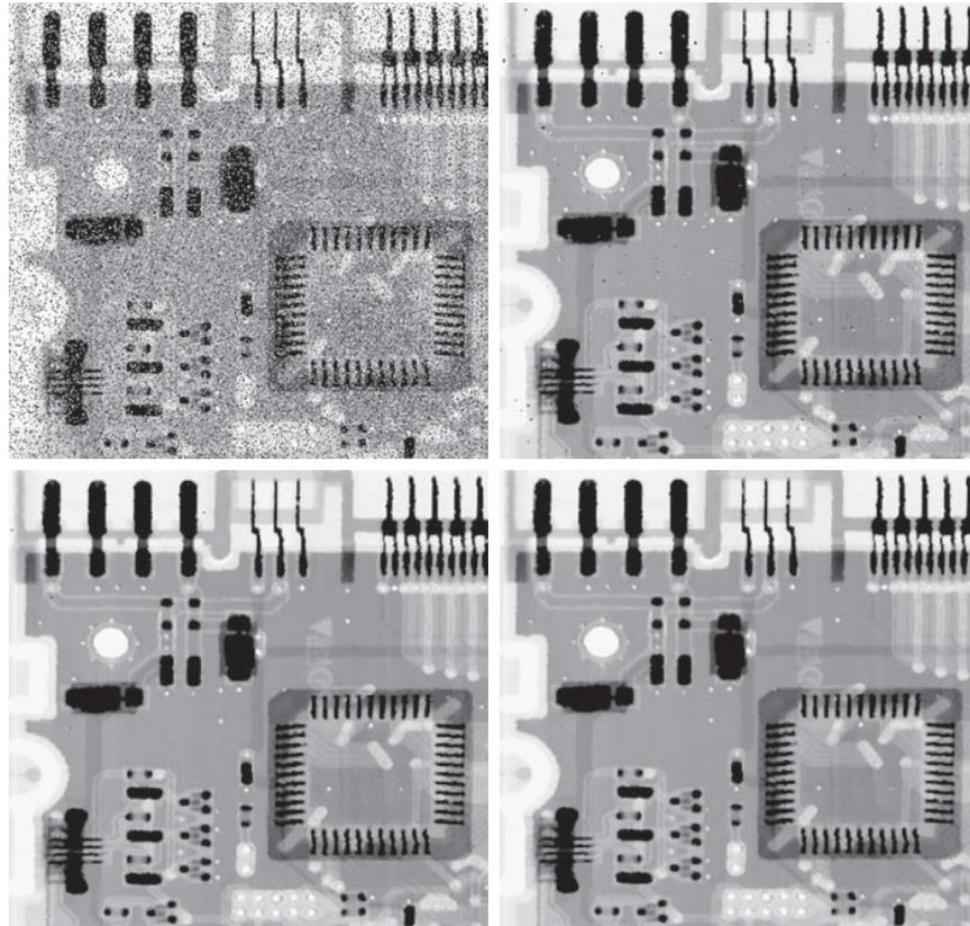
Pour le bruit sel et poivre

Filtres basés sur les statistiques d'ordre

a b
c d

FIGURE 5.10

(a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities $P_s = P_p = 0.1$. (b) Result of one pass with a median filter of size 3×3 . (c) Result of processing (b) with this filter. (d) Result of processing (c) with the same filter.

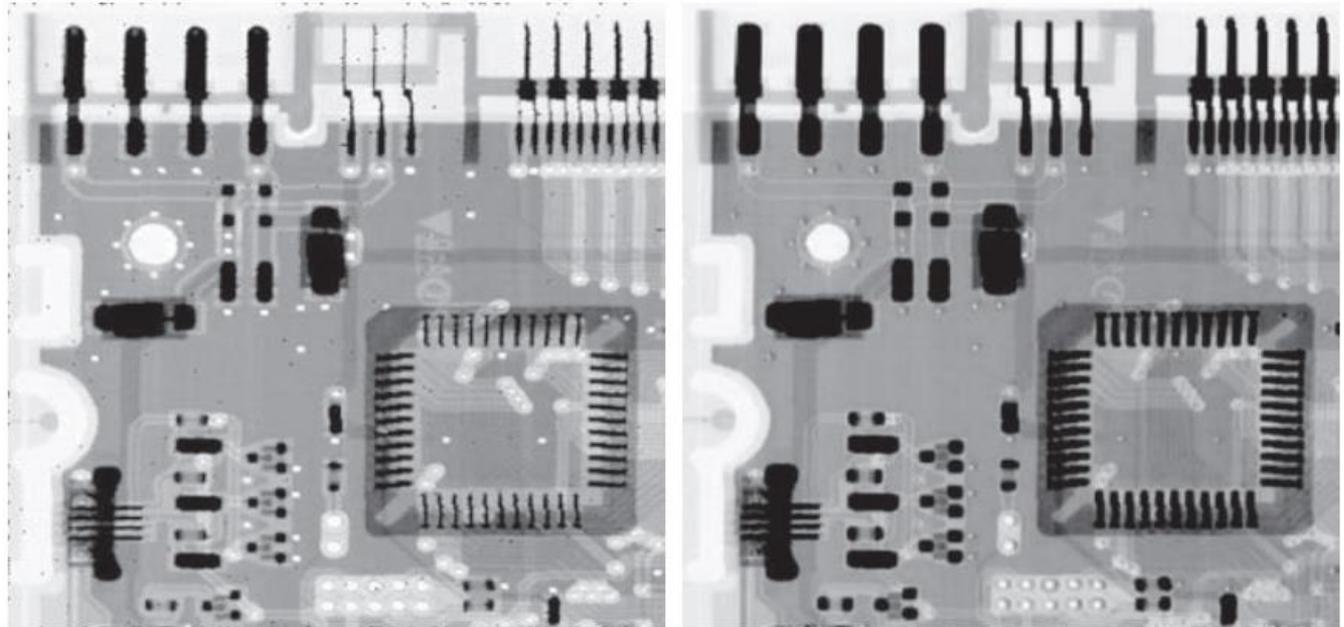


Filtres basés sur les statistiques d'ordre

a b

FIGURE 5.11

(a) Result of filtering Fig. 5.8(a) with a max filter of size 3×3 .
(b) Result of filtering Fig. 5.8(b) with a min filter of the same size.



Filtres adaptatifs

Les filtres proposés précédemment traitent tous les pixels de l'image de manière égale, indépendamment de l'entourage et la position de chaque pixel.

Lorsqu'on veut préserver les contours de l'image, ils ne garantissent pas une bonne performance.

Solution: Filtre adaptatif !

Soit les paramètres suivants:

σ_{η}^2 : La variance du bruit réel qui a corrompu l'image.

σ_L^2 : La variance locale du voisinage $W(x,y)$.

μ_L : La moyenne locale du voisinage $W(x,y)$.

On définit le filtrage adaptatif par :

$$g(x, y) = f(x, y) - \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_L^2} (f(x, y) - \mu_L)$$

Filtres adaptatifs

$$g(x, y) = f(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2} (f(x, y) - \mu_L)$$

Si $\sigma_\eta = 0$, le filtre doit retourner simplement la valeur de $f(x, y)$.

⇒ Pas de bruit.

Si $\sigma_\eta \ll \sigma_L$, le filtre doit retourner une valeur proche de $f(x, y)$.

⇒ Présence d'un contour?

Si $\sigma_\eta \approx \sigma_L$, le filtre doit retourner la moyenne locale de $f(x, y)$.

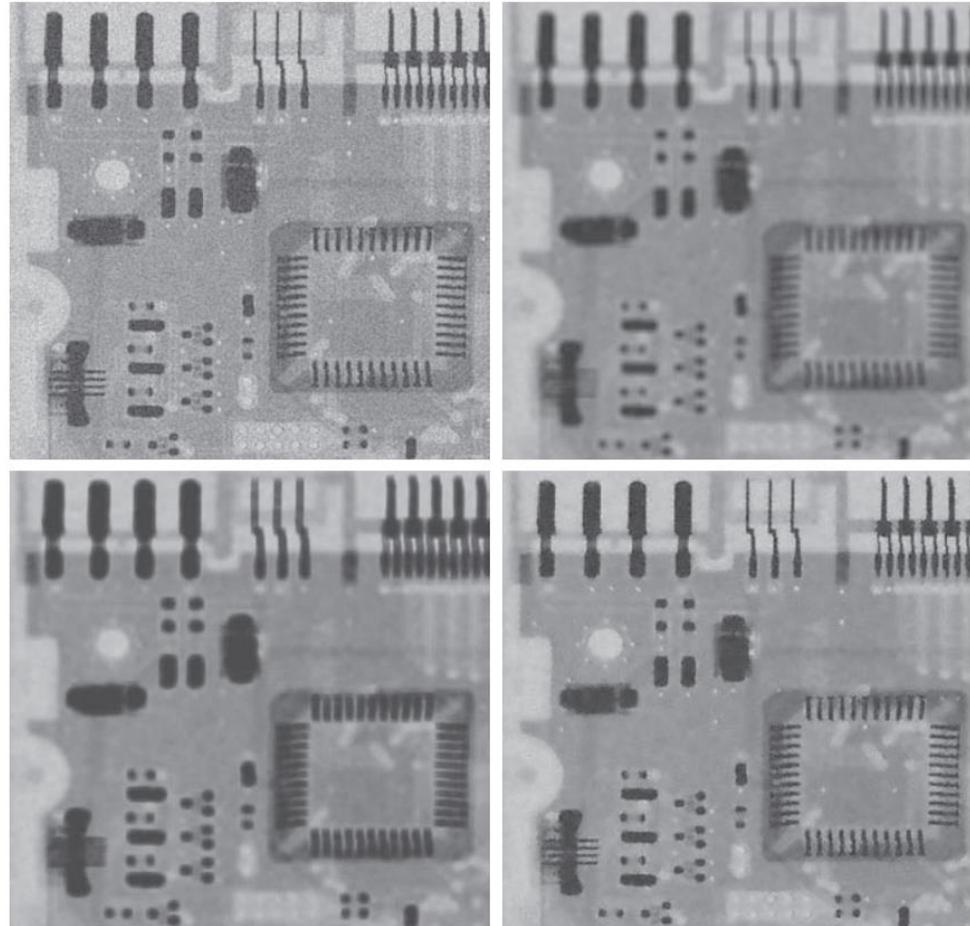
⇒ Présence d'une zone homogène?

Filtres adaptatifs

a	b
c	d

FIGURE 5.13

(a) Image corrupted by additive Gaussian noise of zero mean and a variance of 1000.
(b) Result of arithmetic mean filtering.
(c) Result of geometric mean filtering.
(d) Result of adaptive noise-reduction filtering. All filters used were of size 7×7 .



Filtres basés sur les statistiques d'ordre

Résumé

Filtre	Avantages	Inconvénients
Max	Réduit le bruit poivre seulement.	Augmente la taille des régions claires.
Min	Réduit le bruit sel seulement.	Augmente la taille des régions sombres.
Médiane	Réduit <i>efficacement</i> les bruits sel et/ou poivre. Cette efficacité diminue pour les autres types de bruit.	Aucun.
Adaptatif	Réduit le bruit et préserve <i>efficacement</i> les contours de l'image.	On doit connaître à l'avance la valeur du bruit de l'image.

4- RESTAURATION D'IMAGES BRUITÉES (FILTRES FRÉQUENTIELS)

Filtre par élimination de bande de fréquence

Lorsqu'on connaît la position du bruit dans le spectre des fréquences, on peut construire un filtre adapter pour éliminer (rejeter) les fréquences correspondant au bruit.

Exemples de filtres (band-reject filters):

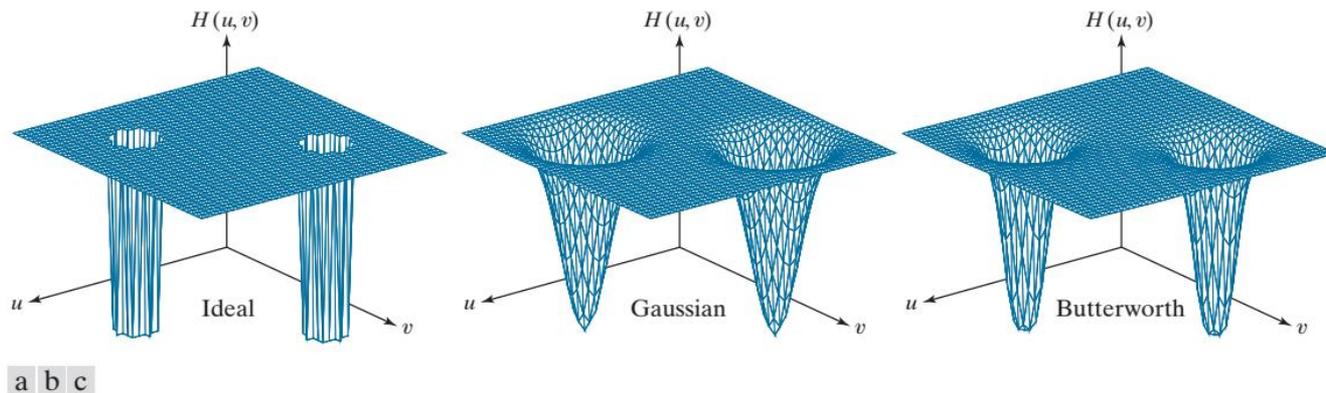
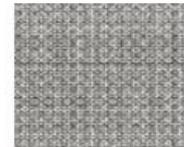


FIGURE 5.15 Perspective plots of (a) ideal, (b) Gaussian, and (c) Butterworth notch reject filter transfer functions.

Filtre par élimination de bande de fréquence

Exemple 1 de filtrage:



Motif (pattern) du bruit

Image contaminé par un bruit périodique



Spectre des fréquences de l'image



Filtre adaptés (vue en image)

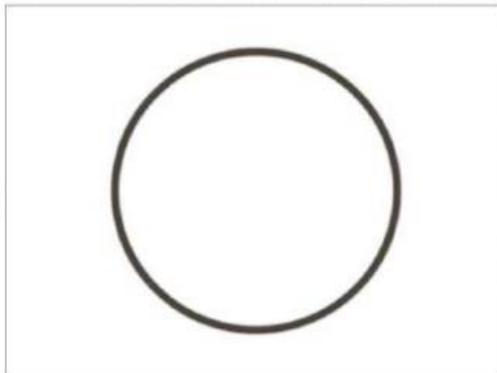


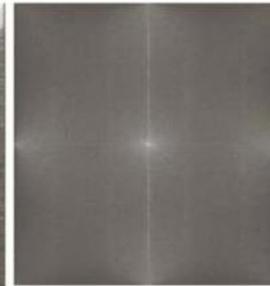
Image obtenue après le filtrage et la TF inverse



Filtre par élimination de bande de fréquence

Exemple 2 de filtrage:

Image contaminé par un bruit périodique



Spectre des fréquences de l'image



Filtre adaptés (vue en image)

Image obtenue après le filtrage et la TF inverse



Motif (pattern) du bruit

Filtre par élimination de bande de fréquence

Exemple 3 de filtrage:

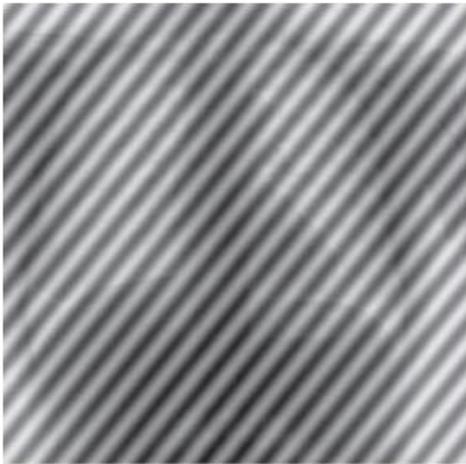
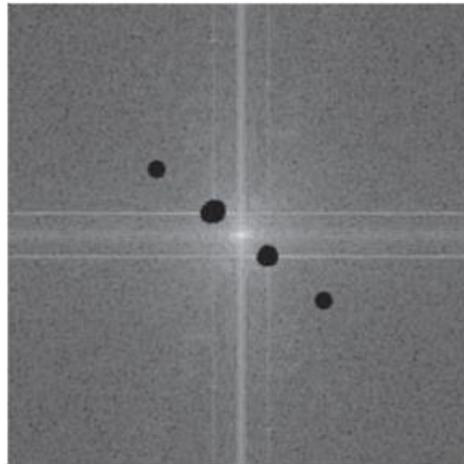


Image bruitée



Filtre fréquentiel

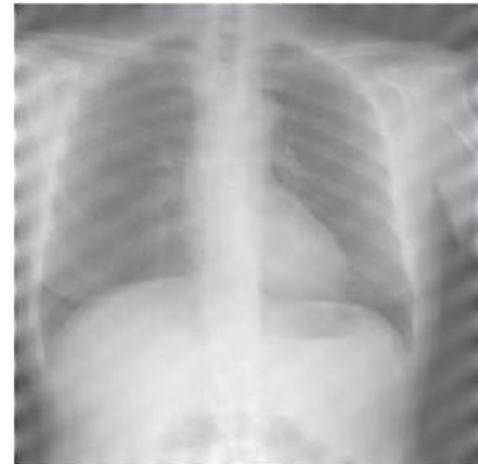


Image restaurée

5- RECONSTRUCTION D'IMAGES À PARTIR DE PROJECTIONS

Introduction

Dans les sections précédentes, nous avons étudié la restauration d'images.

Dans cette section, nous étudierons le problème de reconstruction d'une image à partir d'une série de projections.

Nous nous focaliserons sur les images obtenues par rayons X dans la **tomographie axiale calculée par ordinateur** (*Computerized Tomography*) communément appelée **CT-scan** ou **scanner**.

Soit un objet sur un fond uniforme (*on peut supposer que l'image représente une section transversale d'une région 3D du corps humain, que le fond représente un tissu mou uniforme et l'objet en blanc est une tumeur.*)



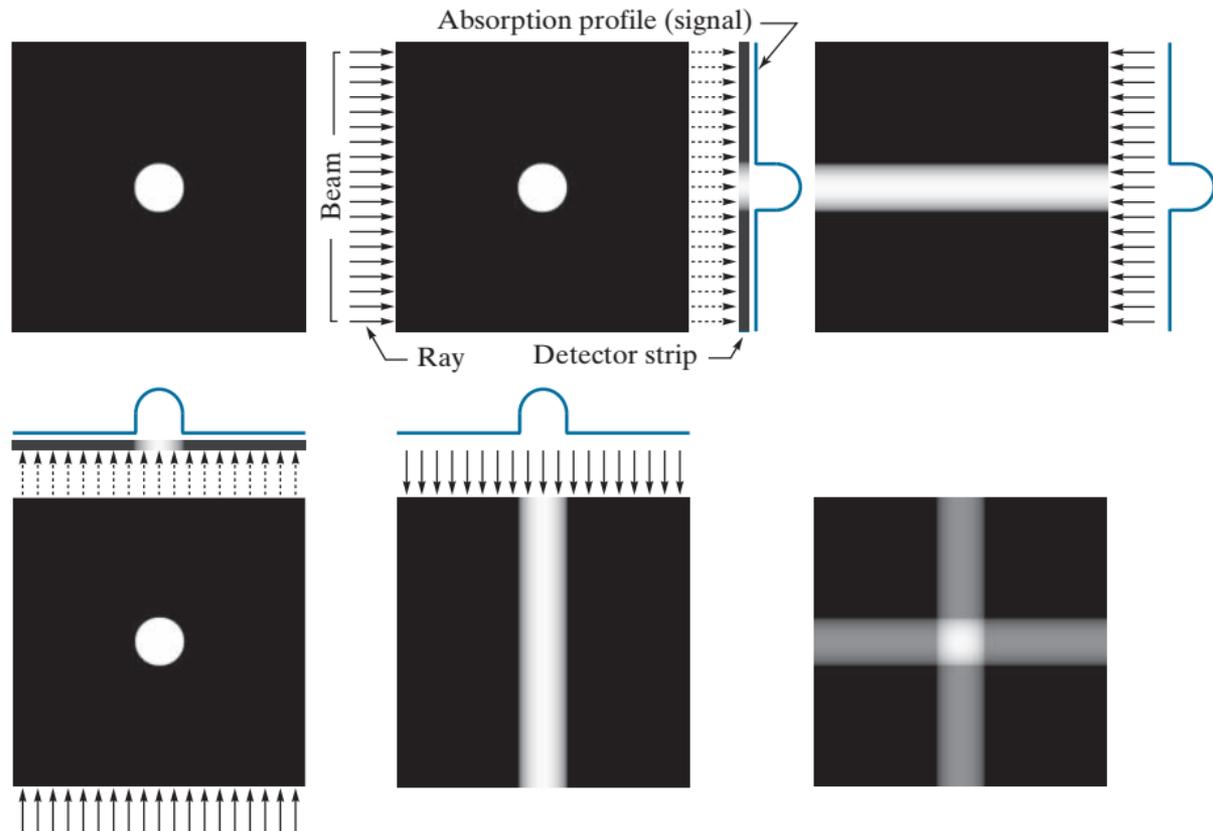
Principe de la CT

Pour localiser spatialement l'objet (la tumeur), on doit envoyer des rayons X dans plusieurs directions, et récupérer ce qui n'est pas absorbé (ou l'intensité d'absorption) dans chaque direction.

a	b	c
d	e	f

FIGURE 5.32

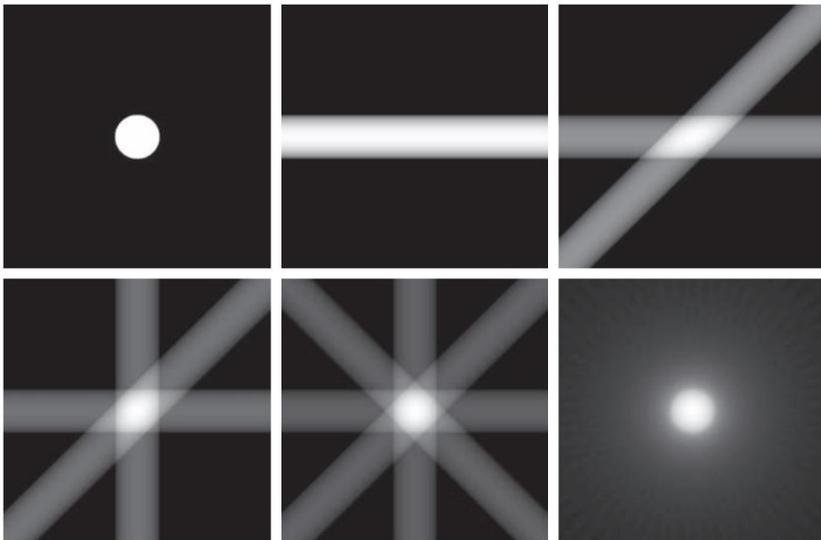
(a) Flat region with a single object. (b) Parallel beam, detector strip, and profile of sensed 1-D absorption signal. (c) Result of back-projecting the absorption profile. (d) Beam and detectors rotated by 90°. (e) Backprojection. (f) The sum of (c) and (e), intensity-scaled. The intensity where the backprojections intersect is twice the intensity of the individual back-projections.



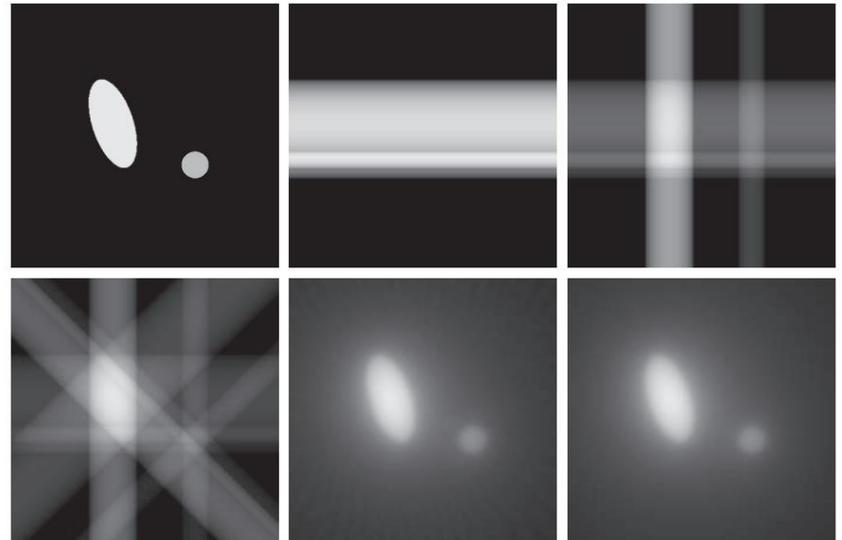
Principe de la CT

Évidemment, plus on a de directions de projections, plus on augmentera la précision de la localisation de l'objet.

Exemple 1:



Exemple 2:

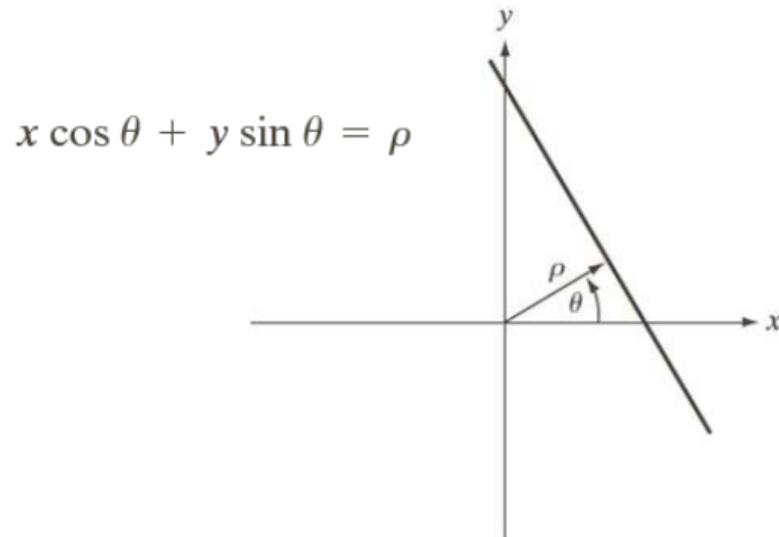


Transformée de Radon

Dans ce qui suit, nous décrivons les mathématiques requises pour la reconstruction d'images dans le contexte de la CT avec rayons X.

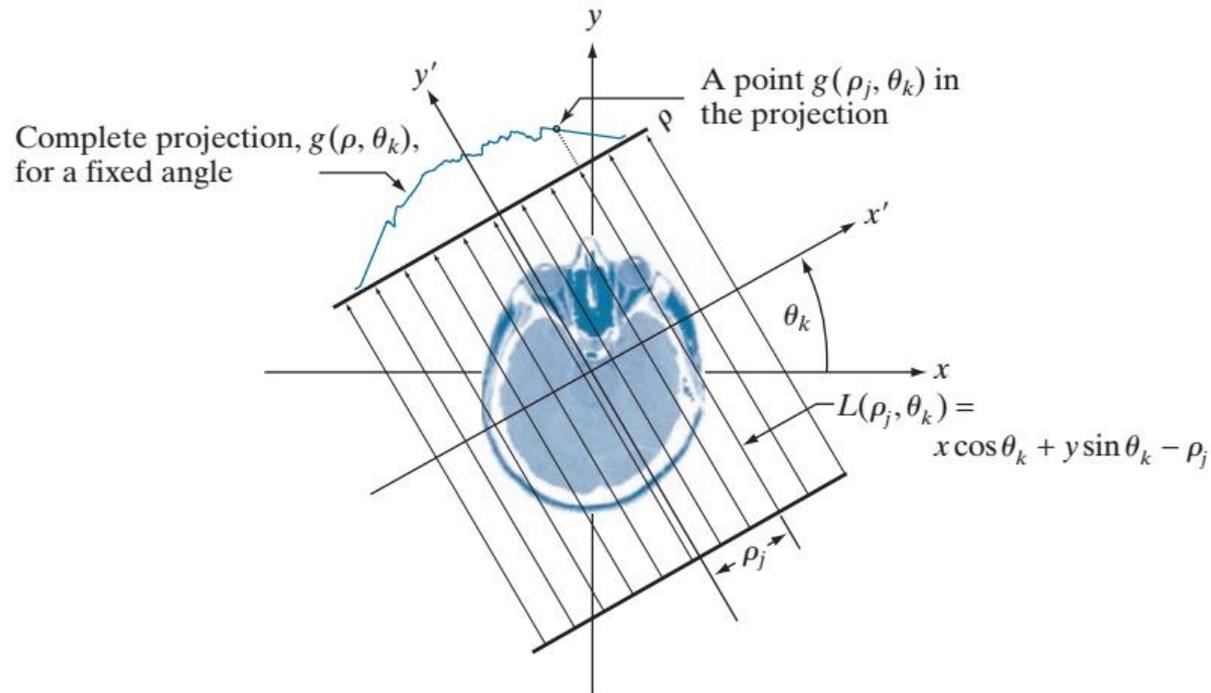
Le même principe s'applique à l'imagerie par résonance magnétique **MRI**, la tomographie par émission de positons **PET**, ainsi que d'autres modalités.

Rappel: Une droite $y = ax + b$ peut s'écrire sous la forme:



La projection de rayons parallèles peut être modélisé par ensemble de ces lignes.

Transformée de Radon



Un point quelconque dans la projection est donné par la somme du rayon à travers la ligne: $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k = \rho_j$. La somme est donnée par :

$$g(\rho_j, \theta_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j) dx dy.$$

Fonction impulsion

- dans l'équation précédente δ représente la fonction impulsion. Cela indique que l'intégrale est calculée seulement sur les points de la ligne (ρ_j, θ_k) .
- La fonction impulsion d'une variable t est définie comme suit:

$$\delta(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } t = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

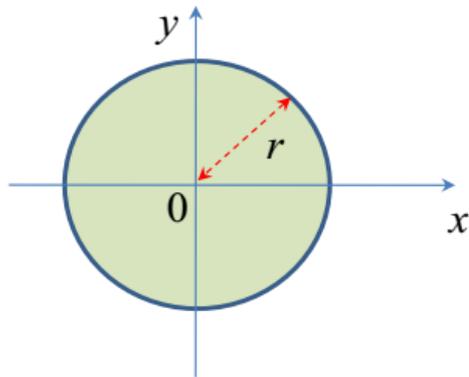
$$g(\rho_j, \theta_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j) dx dy.$$

Transformée de Radon

Dans le cas discret:

$$g(\rho_j, \theta_k) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j)$$

Exemple: (objet circulaire)



$$f(x, y) = \begin{cases} A & \text{si } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que le centre du cercle est l'origine des coordonnées.

Transformée de Radon

Puisque l'objet est symétrique, les projections sont les mêmes pour toutes les directions. Nous nous contenterons de faire l'analyse pour $\theta_k = 0^\circ$.

On a $\cos \theta_k = 1$ et $\sin \theta_k = 0$, alors:

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x - \rho) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho, y) dy$$

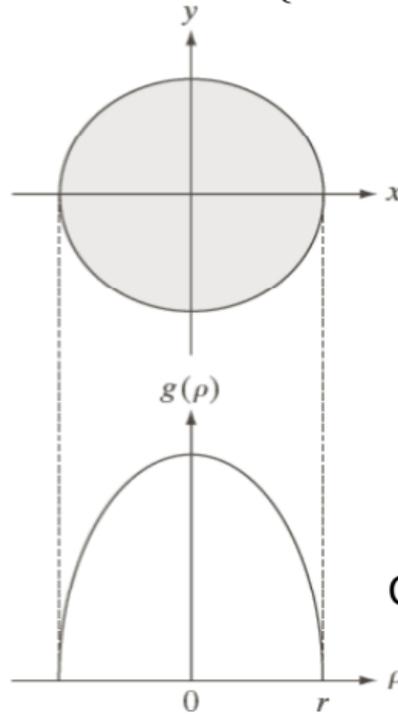
Aussi, notons que $g(\rho, \theta) = 0$ pour $|\rho| > r$. Lorsque $|\rho| \leq r$, l'intégrale est évaluée de $y = -\sqrt{r^2 - \rho^2}$ à $y = +\sqrt{r^2 - \rho^2}$

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{+\sqrt{r^2 - \rho^2}} f(\rho, y) dy = \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{+\sqrt{r^2 - \rho^2}} A dy$$

Transformée de Radon

Finalement, on aura:

$$g(\rho, \theta) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - \rho^2} & \text{si } |\rho| \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Ce graphe est appelé **sinogram**

Reconstruction à partir de projections

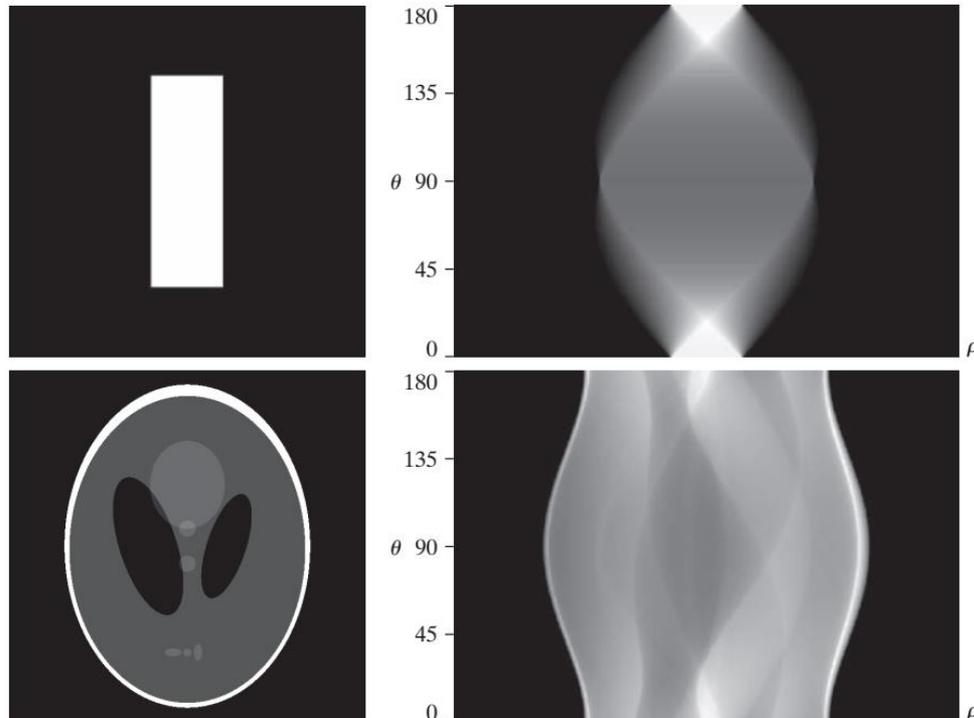
Comme la transformée de Fourier, le sinogram contient les données nécessaires pour reconstruire une fonction $f(x,y)$. Aussi, on peut interpréter les diagrammes pour des exemples simples de régions.

Exemple:

a b
c d

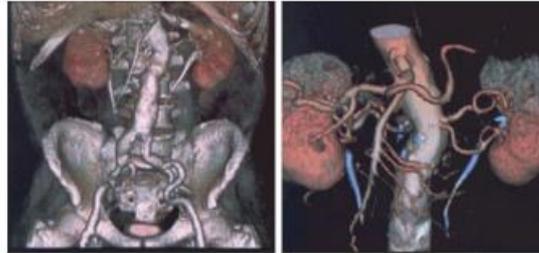
FIGURE 5.39

Two images and their sinograms (Radon transforms). Each row of a sinogram is a projection along the corresponding angle on the vertical axis. (Note that the horizontal axis of the sinograms are values of ρ .) Image (c) is called the *Shepp-Logan phantom*. In its original form, the contrast of the phantom is quite low. It is shown enhanced here to facilitate viewing.



Reconstruction à partir de projections

L'objectif de CT est de reconstruire **une représentation 3D** d'un volume à partir de ses projections.



L'approche consiste à faire la projection inverse (back-projection) des *sinograms*, et sommer les résultats pour générer l'image (image slice).

L'empilement de de toutes les images va générer l'image 3D de l'objet.

Soit un point $g(\rho_j, \theta_k)$ sur le sinogram, la projection inverse de ce point va reconstruire la ligne $L(\rho_j, \theta_k)$, où la valeur de chaque point de la ligne est $g(\rho_j, \theta_k)$.

Reconstruction à partir de projections

En répétant le processus pour chaque ρ_j (en gardant θ_k fixe), on obtient

$$f_{\theta_k}(x, y) = g(\rho, \theta_k) = g(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k, \theta_k)$$

Finalement, pour obtenir la projection pour tous les θ , on procède par :

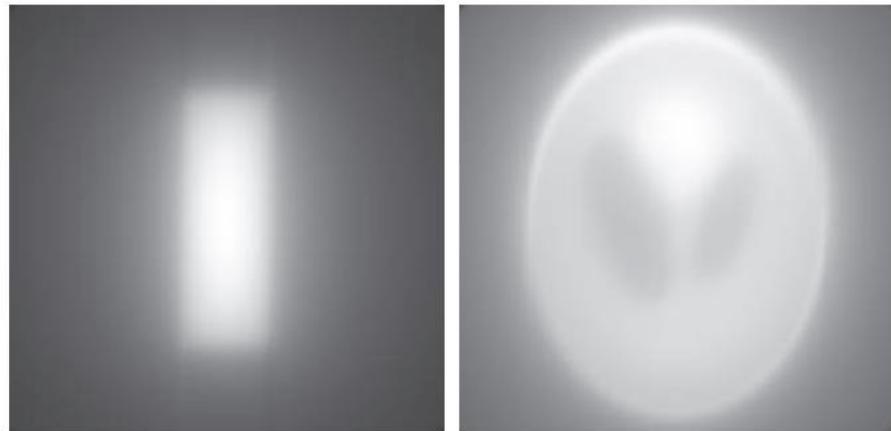
$$f(x, y) = \int_0^{\pi} f(\rho, \theta) d\theta \quad (\text{cas continu})$$

$$f(x, y) = \sum_{\theta=0}^{\pi} f(\rho, \theta) \quad (\text{cas discret})$$

Exemple:

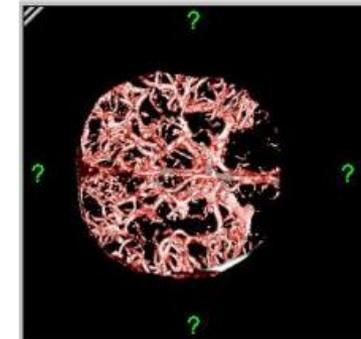
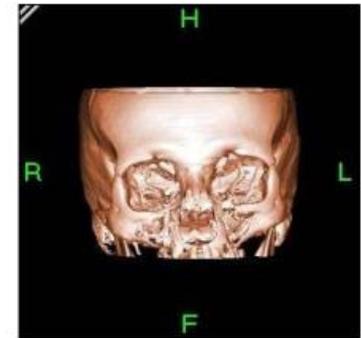
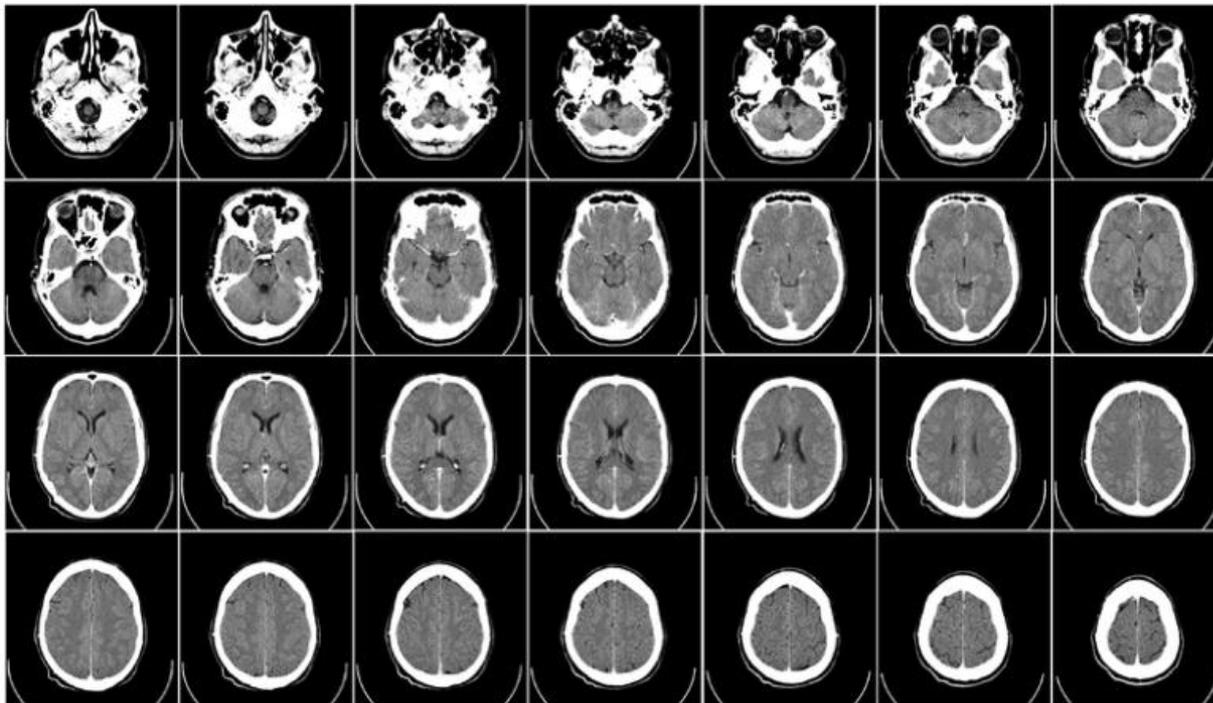
a b

FIGURE 5.40
Backprojections
of the sinograms
in Fig. 5.39.



Reconstruction à partir de projections

Exemple de reconstruction 3D:



Wikipedia

Chapitre suivant

Chapitre 05

Modèles de couleur de l'image

Références:

1. M. S. Allili. *Eléments Avancés d'Analyse d'Images (Cours de 2e cycle)*. Université du Québec en Outaouais (UQO), Québec, Canada. Hivers 2014.
2. R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital image processing*. Pearson Education. 3rd Edition. 2008.
3. R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital image processing*. Pearson Education. 4th Edition. 2018.
4. R. C. Gonzalez, R. E. Woods, and S. L. Eddins. *Digital image processing using Matlab*. Gatesmark Publishing. 2nd Edition. 2009.