# III- Intégration numérique

## Introduction

Le but de ce chapitre est d'aborder le calcul général de l'intégrale d'une fonction f(x) sur un domaine fini délimité par des bornes finies a et b (les cas des bornes infinies n'est donc pas couvert ici)

Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée analytiquement (à la main). Cependant, ce n'est que très rarement possible, et le plus souvent un des cas suivants se présente :

– Le calcul analytique est long, compliqué et rébarbatif

– Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer

– Cette intégrale n'a pas d'expression analytique

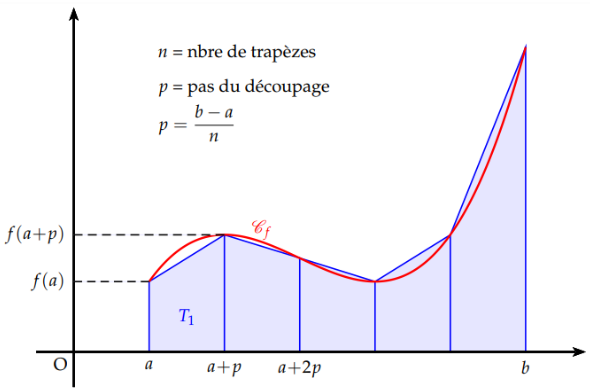
Dans tous ces cas, on préfèrera calculer numériquement la valeur de l'intégrale I.

Le principe L'idée principale est de trouver des méthodes qui permettent de calculer rapidement une valeur approchée $\widetilde{I}$ de l'intégrale à calculer : $\widetilde{I} = \mathrm{I}$

## III-1-méthode des trapèzes

Comme son nom l'indique, cette méthode d'intégration utilise une somme de surfaces de trapèzes.

Sur chaque intervalle, on réalise alors l'approximation suivante :




Pour calculer l'aire du premier trapèze $T_1 = \frac{(Grande\ base + Petite\ base) \times hauteur}{2}$

$$= \frac{(f(a) + f(a+p)) \times p}{2}$$

On fait ensuite un décalage de p pour calculer les aires des trapèzes suivants. L'approximation de l'aire sous la courbe est alors :

$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} T_i$ Somme des aires des trapèzes

**Formule du trapèze généralisée**

$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2}(f(x_2) + f(x_3)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_i) + f(x_n) = \frac{h}{2}(f_0 \sum_{i=1}^{n-1}(f_i + f_n)$$

**Algorithme**

• On initialise S à zéro.

• À chaque boucle, on rajoute d'aire du trapèze : $\frac{(f(a)+f(a+p)) \times p}{2}$

• On affiche S

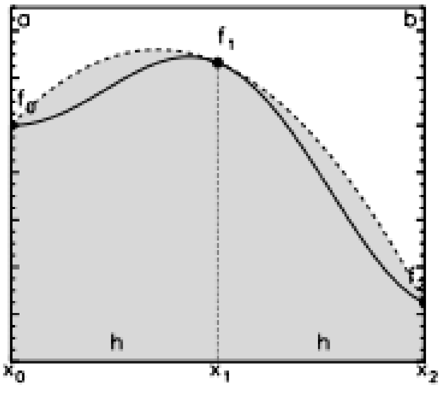
• On rentre dans $Y_1$ la fonction f.

On teste le programme avec la fonction $Y_1$ définie par $Y_1 = \sqrt{1-(x-1)^2}$ entre 0 et 2 représentant un demi-cercle de centre (1 ; 0) et de rayon 1. À comparer avec l'aire d'un demi-cercle π /2 ≈ 1, 571

**III-2- Méthode de Simpson simple (p = 2)**

Pour approximer la fonction f, cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui passe par les trois points $f_0 = f(a)$, $f_1 = f\,(a+b/\,2)$ et $f_2 = f(b)$ :

$$P_2(x) = 2\,\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(x_2 - x_0)^2}\,(x - x_1)^2 + \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0}(x - x_1) + f_1$$



L'intégrale approchée $\tilde{I}_2 = \int_a^b P_2(x)\,dx$ se calcule alors simplement et donne :

$$\tilde{I}_2 = (b-a)\frac{f_0 + 4f_1 + f_2}{6}$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction f (en $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ et $x_2 = b$). Elle est donc en gros 3 fois plus lente que les méthodes à 1 point.

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis. On trouve alors pour h = (b- a)/2 :

$$\exists\ \xi \in [a,b]\ \varepsilon_2 = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \quad c.a.d \quad |\varepsilon_2| \le \frac{h^5}{90}\ Sup_{[a,b]}(|f^{(4)}|)$$

L'erreur $\varepsilon$ n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a,b]$ reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée quatrième sur l'intervalle considéré.

Remarques sur cette erreur :

– Cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions f polynomiales d'ordre 3 (car elles vérifient $f^{(4)} = 0$), ce qui inclut en particulier les fonctions constantes, les paraboles par exemple. Plus généralement elle est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles ($f^{(4)}$ petit).

– Plus l'intervalle [a, b] est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroit en $h^5$ lorsque h diminue. Ainsi, pour des intervalles [a, b] suffisamment petits, la méthode de Simpson est toujours plus précise que la méthode précédente

**En Générale :**

On veut estimer $\int_a^b f(x)\,dx$ a l'aide de cette méthode numérique. On commence par subdiviser l'intervalle [a, b] en **un nombre pair** 'n'de sous intervalles.

Posez $h = \frac{b-a}{n}$

et considérez les points $x_0 = a$ $x_1 = a + h$ $x_2 = a + 2h$ ... $x_n = a + nh = b$

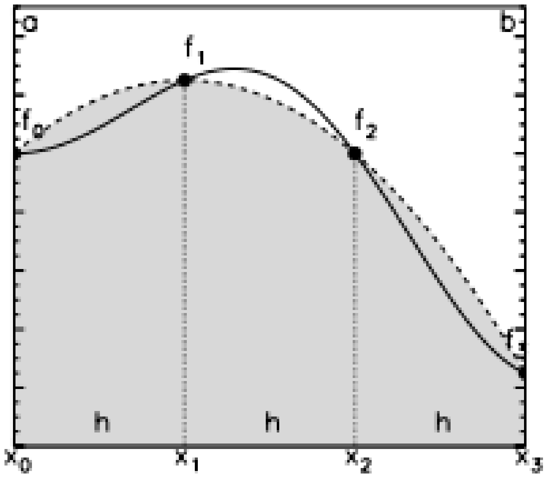
La formule de Simpson dit que :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

**– Méthode de Simpson d'ordre plus élevé (3/8) (degré p = 3) :**

$$\tilde{I} = (b-a)\frac{f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3}{8}$$

$$\varepsilon = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$$




**III-3- Méthode des Trapèzes Composite (p=1, n=m)**

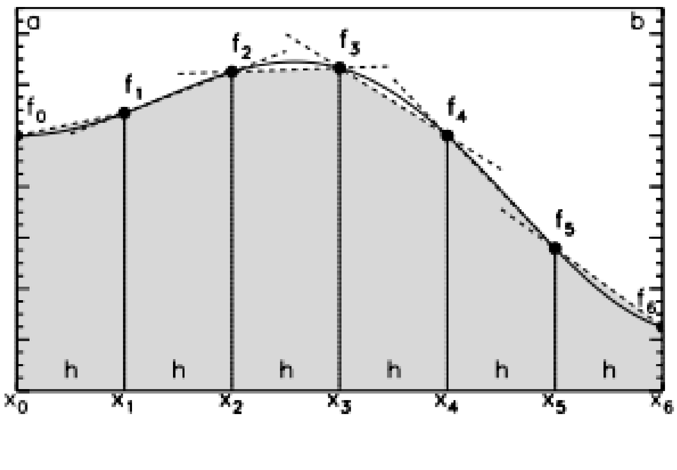
La méthode des trapèzes composite applique la méthode des trapèzes simple (p = 1) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc à nouveau n = m. Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{1,k} = (x_{k+1} - x_k)\frac{f_k + f_{k+1}}{2}$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\tilde{I}_1 = h\frac{f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n}{2} = h\left(\frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{f_n}{2}\right)$$

Dans cette formule, les points du bord du domaine ont des coefficients différents (1/2) de tous les points intérieurs (1).




(p=1) m=6 intervalles (c'est-à-dire n=6 sous-intervalles et n+1=7 points total)

## III-4- Méthode de Simpson composite (p = 2, n = 2m)

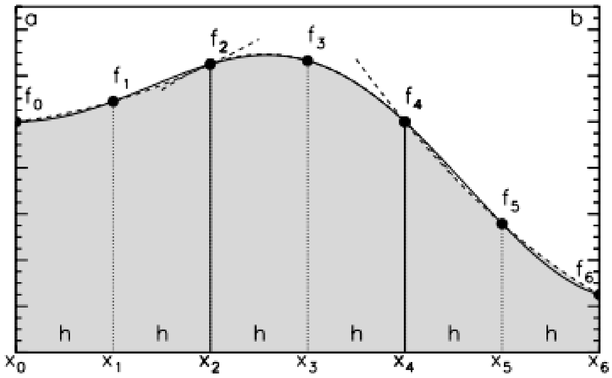
La méthode de Simpson composite applique la méthode de Simpson simple (p = 2) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc cette fois-ci n = 2m (il est forcément pair et le nombre de points n + 1 est forcément impair). Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{2,k} = (x_{k+2} - x_k)\frac{f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}}{6}$$

Si bien que (pour un nombre d'intervalles n pair) l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &= h\frac{f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n}{3} \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f_{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f_{2k} + f_n\right)\end{aligned}$$

Dans ces formules, il y a 3 coefficients différents : 1/3 pour les points du bord, 4/3 pour les points internes impairs, et 2/3 pour les points internes pairs.




Méthode composite de Simpson (p = 2) pour m = 3 intervalles (c'est à dire n = 6 sous intervalles et n +1=7 points au total)

**Exemples d'applications :**

## 1- Méthode des Trapèzes :

On donne la fonction $y = \sqrt{x+1}$ $x \in [0,1]$ $n=10$.

Calculer l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$ et évaluer l'erreur.

Solution :

On calcule le pas $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$

| $x_i$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 1.0488 | 1.0954 | 1.1401 | 1.1832 | 1.2247 | 1.2649 | 1.3038 | 1.3416 | 1.3784 | 1.4142 |

$\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{0.1}{2}[(1 + 1.4142) + 2(+1.0488 + 1.0954 + 1.1402 + 1.1832 + 1.2247 +$ $1.2649 + 1.3038 + 1.3416 + 1.3784)]$ $=1.24528$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$ et $f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} > 0\ \forall x \in [0,1]$

Cela permet de dire que $f''(x)$ est croissante sur $[0,1]$ donc $M_2=f(1)=0.088$

Alors $E_n(f) \leq \left|\frac{h^2}{12}(b-a)f''(c)\right| = \frac{0,1^2}{12}.1.0,088 \approx 0.00073 \approx 0.0001 \leq 0,5.10^{-4}$

et $I(f) = 1.1139 \approx 1.114 \pm 0.001$

## 2- Méthode de Simpson :

On donne la fonction $y = \frac{1}{2x+1}$ $\quad x\epsilon[0,1] \quad n = 10$

En utilisant la méthode de Simpson. Calculer l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{2x+1}\ dx$ et évaluer l'erreur.

Solution :

On calcule le pas $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$

| $x_i$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 1.8333 | 0.7142 | 0.625 | 0.5555 | 0.5 | 0.4545 | 0.4166 | 0.3846 | 0.3571 | 0.3333 |

$$\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\;dx = \frac{0.1}{3}[1 + 0.3333 + 4(0.8333 + 0.625 + 0.5 + 0.4166 + 0.3571) + 2(0.7142 + 0.5555 + 0.4545 + 0.3846)] = 0.5493$$

$f''''(x) = \frac{384}{(2x+1)^5}$ est decroissante sur [0,1] et $\frac{384}{(2x+1)^5} \leq 384 \quad \forall\, x \in [0,1]$

Donc $M_4 = f(0) = 384$

Alors $E_n$ ‘f) = $|\frac{15.384}{180.10^4}| \approx 0.00021 \leq 0,5\,.\,10^{-4}$

Et I(f) = 0.5493$\approx$ $0.549 \pm 0.001$