
Mécanique des fluides

Yann MARCHESSE

ECAM-LYON

40 Montée Saint-Barthélemy
69321 Lyon Cedex 05
www.ecam.fr



Yann Marchesse
Pôle Énergétique / LabECAM
ECAM LYON
40 Montée St.-Barthélemy
69321 Lyon Cedex 05

Mécanique des fluides

Document réalisé à partir de L^AT_EX
Date de compilation du document : 20 mai 2017

Sommaire

1	Définitions et rappels	3
1.1	Généralités	3
1.2	Conservation de la masse	9
1.3	Bilan de quantité de mouvement	11
1.4	Théorème de Bernoulli	14
1.5	Pertes de charge	16
1.6	Présence d'une machine dans le réseau hydraulique	25
1.7	Mesure du débit dans les conduites	26
1.8	Exercices	32
2	Principe de fonctionnement des pompes centrifuges	35
2.1	Généralités sur les turbomachines	36
2.2	Généralités sur les pompes centrifuges	38
2.3	Vitesse spécifique	41
2.4	Similitudes	46
2.5	Analyse externe d'une pompe centrifuge	47
2.6	Analyse interne d'une pompe centrifuge	75
2.7	Analyse interne d'une pompe axiale	88
2.8	Adaptation des conditions de fonctionnement	92
2.9	Exercices	97
3	Phénomènes transitoires dans les conduites	111
3.1	Origine des phénomènes transitoires	112
3.2	Conséquences des phénomènes transitoires	112
3.3	Équations générales du mouvement dans une conduite en régime transitoire	113
3.4	Coup de bélier de masse	114
3.5	Coup de bélier d'ondes	121
3.6	Considérations pratiques	130
3.7	Moyens de protection des conduites	131
3.8	Méthode graphique de Bergeron	135
3.9	Exercices	153
4	Analyse Dimensionnelle	163
4.1	Équations de Navier-Stokes sans dimension	163
4.2	Produits sans dimension déterminant des écoulements similaires	164

4.3	Théorème de Vaschy-Buckingham ou Théorème PI	166
4.4	Similitude	169
4.5	Récapitulatif	171
4.6	Exercices	172
5	Introduction à l'aérodynamique	177
5.1	La résultante aérodynamique	178
5.2	Origine de la portance	181
5.3	Origine des forces de résistance (traînée)	182
5.4	Étude simple de la couche limite	186
5.5	Coefficients sans dimension	197
5.6	Effets transitoires aérodynamiques	207
5.7	Estimations des efforts aérodynamiques	209
5.8	Exercices	216
	Bibliographie sommaire	227
A	Annexes	233
A.1	Quelques dates essentielles en mécanique des fluides	233
A.2	Principaux nombres sans dimensions	236
A.3	Propriétés de l'eau et de l'air	238
A.4	Conversion d'unités	239
B	Réponses à certains exercices proposés	241
C	Traduction de termes techniques anglais	245

Chapitre 1

Définitions et rappels

Le but de ce chapitre est d'une part de rappeler les deux expressions mathématiques obtenues par application de la conservation de la masse et du bilan de quantité de mouvement, deux principes fondamentaux de la mécanique des fluides. Ces expressions seront écrites sous les formes intégrales et locales. On rappellera ensuite le théorème de Bernoulli utile à toute étude d'écoulements dans les canalisations. Enfin, le phénomène de pertes de charge sera abordé. Toutes ces notions seront utilisées par la suite dans le document. On attachera une importance non négligeable aux équations de conservations de masse et de quantité de mouvement, celles-ci après quelques hypothèses avérées se déclinant en de multiples expressions non moins utiles. Notons qu'écrire ces grands principes est une première étape, les comprendre en est une autre. En effet, la théorie insuffisante pour construire des machines permet au moins de s'en servir intelligemment et les transformer si besoin est.

1.1 Généralités

Cette partie présente brièvement quelques aspects liés à la physique des écoulements. Ceci nous permettra essentiellement de définir le concept de particule fluide basé sur l'hypothèse d'un milieu continu. Celle-ci est très utile car le mouvement d'un fluide peut alors être décrit sans faire l'analyse détaillée de la dynamique des particules discrètes qui le composent.

1.1.1 Quelques hypothèses

Hypothèse de continuité : les propriétés d'un milieu, qu'il soit solide ou fluide, ne sont pas uniformément distribuées. Cette distribution apparaît d'autant moins uniforme que l'échelle d'observation est petite. Dans le cadre de notre étude, on se place à une échelle telle qu'un élément de volume appelé **particule fluide**, suffisamment petit pour que la mesure puisse être considérée comme locale, soit suffisamment grand pour contenir un grand nombre de molécules. La matière apparaît alors comme un **milieu continu**. Les quantités associées à la matière, telles que la vitesse, la pression et la température sont considérées comme réparties sur tout le domaine d'étude. On les représente par des fonctions continues. L'hypothèse d'un milieu continu ne permet donc pas l'étude des écoulements à basse densité, des écoulements à travers les milieux poreux et des phénomènes d'ondes de choc (ceux-ci se caractérisant par des discontinuités des propriétés de l'écoulement telles que la température, la pression,...).

Homogénéité et isotropie : une spécificité du fluide est d'être un état condensé mais désordonné de la matière. Il est alors naturel de supposer ses propriétés physiques comme étant identiques en tout point du domaine d'étude (homogénéité) et demeurant indépendantes d'un changement de direction (isotropie).

1.1.2 Les contraintes appliquées aux particules fluides

Les particules fluides d'un écoulement ne sont pas isolées, mais interagissent entre elles en échangeant de la quantité de mouvement. Ce paragraphe se propose de caractériser les contraintes mises en jeu. Considérons pour cela une surface élémentaire dS située dans un écoulement. Les efforts $\vec{dF}$ exercés sur cette surface par les particules fluides voisines permettent de définir un vecteur unitaire d'effort (ou densité surfacique d'effort) $\vec{T}$ tel que $\vec{dF} = \vec{T} dS$ appelé **vecteur contrainte** (Figure 1.1), et lié au tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, tenseur d'ordre deux, tel qu'en tout point M on ait :

$$\vec{T} = \bar{\sigma} \vec{n} \quad \text{ou} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.1)$$

Le tenseur des contraintes rassemble tous les efforts s'exerçant sur les surfaces des particules fluides¹. Ces contraintes sont caractérisées par des efforts normaux liés à la pression et tangents à la surface appelées contraintes de cisaillement.

Contraintes de pression : la pression agit de façon isotrope sur le fluide, et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Lors d'un écoulement, les modifications de la géométrie (*i.e.* rétrécissement ou élargissement), par exemple, peuvent modifier la valeur locale de la pression. De ce fait les particules fluides dans cette région vont subir des actions normales à leur surface (Figure 1.2). La contrainte liée à

1. À ces efforts, il faut rajouter ensuite les efforts s'appliquant sur le volume de la particule fluide (les efforts de pesanteur par exemple).

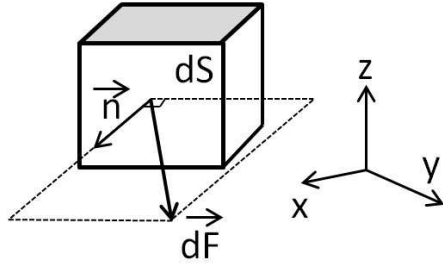


FIGURE 1.1 Définition du vecteur contrainte s'appliquant sur la surface dS .

la pression s'écrit sous forme indicée $-p\delta_{ij}$ où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Une autre écriture est possible sous forme matricielle :

$$-p\bar{\bar{\delta}} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

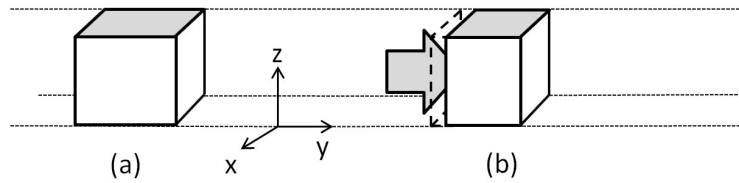


FIGURE 1.2 Volume de fluide parallélépipédique initialement au repos (gauche) et comprimé sous l'effet de la pression (droite).

Contraintes de cisaillement : dans un écoulement, les particules fluides sont en mouvement et sont en contact entre elles. Les contraintes s'appliquant sur leur surface externe génèrent alors une déformation de leur volume au cours du temps. Considérons par exemple une particule fluide initialement au repos et de forme cubique (Figure 1.3.a). Si l'écoulement, dans lequel la particule fluide est totalement immergée, est caractérisé uniquement par un gradient de vitesse selon x (*i.e.* $\partial u_y / \partial x \neq 0$ dans l'exemple traité), le volume sera déformé par la contrainte exercée par l'écoulement (Figure 1.3.b). Cette déformation est caractérisée par un **taux de déformation** exprimé de façon généralisé en fonction du champ de vitesse :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.2)$$

Il existe donc un lien entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation *via* la viscosité, propriété physique intrinsèque au fluide.

Les fluides peuvent être classés en fonction de l'évolution de la contrainte de cisaillement vis à vis du taux de déformation. Lorsque cette relation est linéaire, le fluide est dit **newtonien** (Figure 1.4) et le rapport est égal à la viscosité dynamique constante dans ce cas vis à vis du taux de cisaillement et donnée en Pa.s :

$$\mu = \frac{\text{contrainte de cisaillement}}{2(\text{taux de déformation})}. \quad (1.3)$$

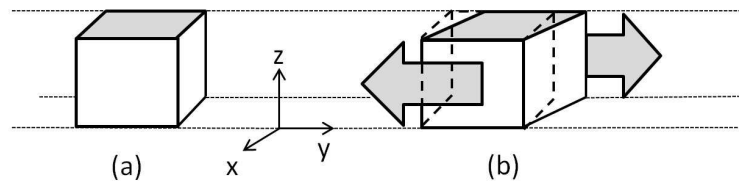


FIGURE 1.3 Volume de fluide parallélépipédique initialement au repos (gauche) et cisailé (droite).

C'est le cas des fluides tels que l'air et l'eau. Ainsi dans un écoulement complexe pour lequel celui-ci subit des accélérations et des changements de direction, le taux de cisaillement local variable n'affecte pas la valeur de la viscosité. Si cette fois la contrainte n'évolue plus linéairement avec le taux de déformation, la viscosité peut alors voir sa valeur augmenter ou diminuer selon le taux de déformation. Le fluide devient non newtonien. Si la viscosité du fluide diminue, le fluide est dit rhéo-fluidifiant et dans le cas contraire, plus rarement observé, rhéo-épaississant (Figure 1.4). Citons par exemple la peinture, le sang ou le ketchup comme fluide rhéo-fluidifiant, et un mélange plastique et solvant ou certains miels comme fluide rhéo-épaississant.

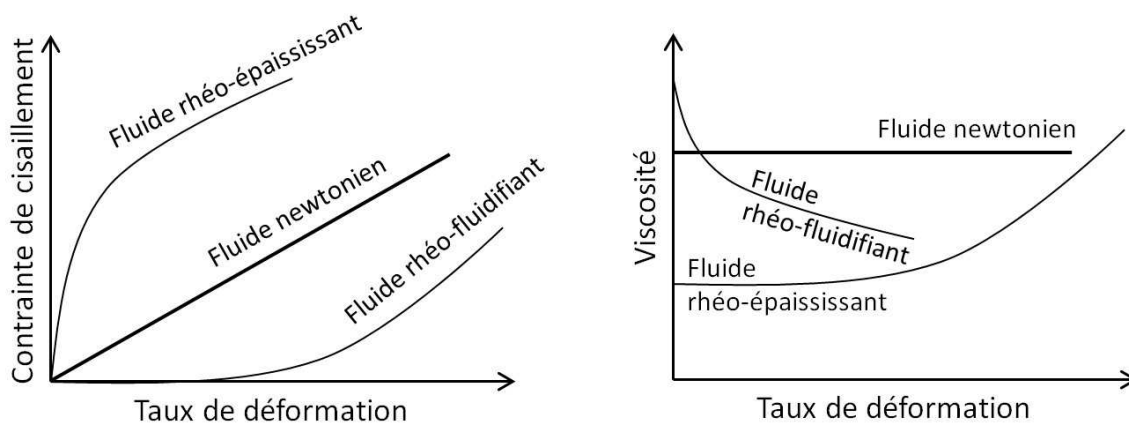


FIGURE 1.4 Évolution de la contrainte de cisaillement et de la viscosité en fonction du taux de déformation.

La valeur de la viscosité d'un fluide newtonien peut être évaluée de façon très simple. Ceci peut être réalisé par exemple en mesurant le temps de chute d'une bille ou d'ascension d'une bulle d'air totalement immergée dans le fluide (viscosimètre à bulle). Par contre lorsque le fluide est non newtonien, le banc d'essais devra permettre des valeurs de taux de cisaillement différentes et maîtrisées. Les viscosimètres rotatifs comprenant un cylindre et un tube contrarotatifs permettent ce type de mesures.

Les comportements non newtonien de certains fluides peuvent être modélisés à l'aide de lois plus ou moins complexes reliant la viscosité avec le taux de déformation. Certaines correspondent à une évolution constante de la viscosité, la loi Power-Law par exemple, alors que d'autres font apparaître des valeurs de paliers comme les modèles Casson ou Carreau (Figure 1.5). Ces modèles font généralement apparaître des coefficients, tels que μ_0 et μ_∞ pour le modèle Carreau, que l'utilisateur devra déterminer.

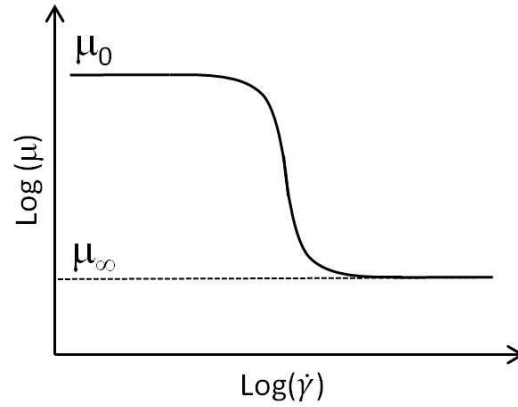


FIGURE 1.5 Évolution de la contrainte avec le taux de déformation selon le modèle Carreau ($\dot{\gamma}$ représente le taux de déformation exprimé par la relation (1.2)).

L'expérience montre que pour une augmentation de la température, la viscosité d'un gaz augmente tandis que celle du liquide diminue. Dans le cas du gaz, la viscosité est indépendante de la pression, ce qui n'est plus vrai en présence d'un liquide. Dans beaucoup de problèmes où les contraintes visqueuses doivent être prises en compte, il est plus commode d'utiliser la **viscosité cinématique** $\nu = \mu/\rho$ (m²/s).

Pour les gaz, la loi de Sutherland permet d'estimer la viscosité à partir de sa température :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

où μ_0 est la viscosité à la température T_0 et S la température de Sutherland égale à 110,4 K pour l'air.

Nous traiterons ici que de fluide newtonien pour lequel le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.4)$$

où le deuxième terme devient nul dans le cas d'écoulement incompressible, caractérisé par la relation $\text{div } \vec{V} = 0$. Le terme $-2/3$ provient de l'hypothèse de Stokes². Si on considère ce type d'écoulement, la matrice du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit alors dans la base de vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

2. Afin de satisfaire certaines conditions mathématiques sur ce tenseur, celui-ci s'écrit $\tau_{ij} = \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) + \lambda \partial u_k / \partial x_k \delta_{ij}$. L'hypothèse de Stokes entraîne la relation $3\lambda + 2\mu = 0$. Insistons sur le fait qu'il s'agit d'une pure hypothèse qui est conservée car confirmée par de nombreuses expériences.

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] & \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \\ \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right] \\ \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] & \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right] & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Notons en premier lieu qu'un fluide au repos ne présente aucune contrainte visqueuse (i.e. $\bar{\bar{\tau}} = 0$), son champ de vitesse étant nul. D'autre part, les contraintes normales et de cisaillement dépendent du gradient de vitesse de l'écoulement, et non pas de la vitesse seule. Ainsi, des couches de particules fluides ayant une vitesse relative non nulle présenteront des échanges de quantité de mouvement entre elles (i.e. les plus rapides auront tendance à accélérer les plus lentes, et inversement les plus lentes auront tendance à freiner les plus rapides). Nous allons l'illustrer sur un exemple donné sur la figure 1.6. Considérons un écoulement caractérisé par le champ de vitesse suivant :

$$\vec{V} = u(y) \vec{x}$$

On s'intéresse aux efforts visqueux exercés par les particules situées au-dessus d'un élément de surface dS de vecteur normal sortant unitaire $\vec{n}$ ($= \vec{y}$ d'après la figure). Ces efforts s'écrivent d'après les relations précédentes :

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= \bar{\bar{\tau}} \vec{y} dS \\ &= \mu \left(\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \vec{x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} \vec{y} + \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \vec{z} \right) dS \end{aligned}$$

En se rappelant que le champ de vitesse est caractérisé par $v = w = 0$, l'expression précédente devient :

$$\vec{dF} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} dS \vec{x} \quad (1.5)$$

Il s'agit là de la loi de frottement de Newton. Ainsi, le gradient de vitesse étant positif selon y , l'effort élémentaire dF est donc positif. Les particules les plus rapides (d'après la valeur du gradient) ont tendance à accélérer les plus lentes. On peut aussi montrer à partir du même raisonnement que les particules les plus lentes ont ainsi tendance à ralentir les plus rapides. Pour cela, le vecteur unitaire sortant vaut $-\vec{y}$.

Dans la plupart des écoulements visqueux, les contraintes normales (i.e. τ_{11} , τ_{22} , et τ_{33}) sont faibles devant les contraintes de cisaillement et sont la plupart du temps négligées. Les contraintes normales peuvent devenir très importantes lorsque le gradient longitudinal de la vitesse est grand, ceci est le cas dans les ondes de choc.

Tenseur des contraintes : comme nous l'avons dit plus haut, on note des efforts de pression, ainsi que des efforts liés à la viscosité du fluide. On écrira alors le tenseur des contraintes :

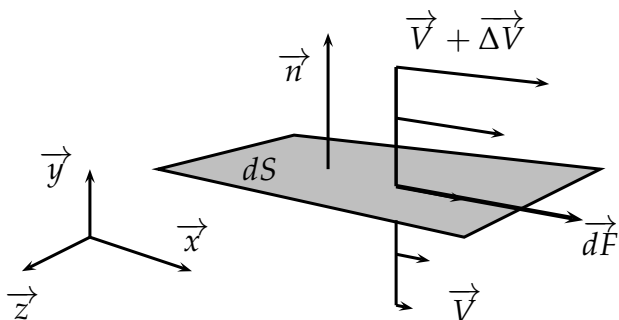


FIGURE 1.6 Mise en évidence des efforts de viscosité exercés par des particules fluides sur un domaine caractérisé par un vecteur normal unitaire sortant à sa surface.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.6)$$

Rappelons que le fluide newtonien est caractérisé par un taux de déformation linéaire avec la contrainte de cisaillement (cf. relation 1.3).

La suite du document présente l'application de deux principes fondamentaux sur des volumes de contrôle ou sur des volumes élémentaires, conduisant à des expressions intégrales ou locales. Un volume de contrôle est de taille assez importante pour contenir beaucoup de fluide, alors que le volume élémentaire est par définition plus petit, et n'autorise donc pas de bilan intégral. Il ne s'agira néanmoins que de plusieurs écritures de la "même" équation.

1.2 Conservation de la masse

L'axiome de conservation de la masse³ traduit le fait que pour un domaine matériel D en mouvement ou non la masse est une caractéristique de ce domaine. La relation mathématique atteinte est appelée équation de continuité.

Considérons le volume de contrôle de la figure 1.7.a immobile et donc traversé par le fluide en mouvement. Le bilan de débit massique à travers sa surface est alors égale à l'évolution au cours du temps de la masse du volume. Ce bilan s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho dv + \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.7)$$

Si maintenant, ce volume de contrôle est animé d'une vitesse identique à celle du fluide, sa masse reste constante au cours de son mouvement. Cette observation fait

3. Bien que Newton ait postulé, en 1687 dans son *Principia*, le fait que la masse spécifique d'un objet soit constante, ce principe ne fut appliqué à la mécanique des fluides qu'en 1749 par d'Alembert sous forme dérivée dans un article intitulé *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. Huit années plus tard, Euler proposa les équations de continuité et de bilan de quantité de mouvement. Deux des trois équations de bilan utilisées de nos jours ont donc vu le jour avant la fin du 18ème siècle. La troisième équation de bilan, énergétique elle, ne viendra qu'avec le développement de la thermodynamique au 19ème siècle.

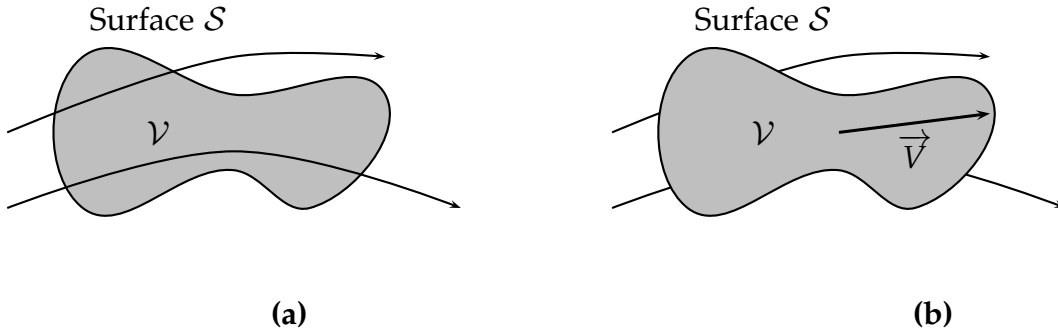


FIGURE 1.7 Représentation d'un volume de contrôle. Dans le cas (a), le volume de contrôle est fixe et est traversé par le fluide en mouvement ; dans le cas (b), le volume de contrôle est en mouvement, et est alors constitué des mêmes particules fluides.

appel à la dérivée particulaire, notée D/Dt , telle que

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \quad (1.8)$$

La conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho dv = 0 \quad (1.9)$$

avec l'indice t pour rappeler le fait que le volume de contrôle est en mouvement, et peut donc voir sa forme évoluer au cours du temps.

Les relations mathématiques (1.7) et (1.9) sont des écritures intégrales du principe de conservation de la masse. Des écritures locales peuvent être atteintes en considérant un volume élémentaire au lieu d'un volume de contrôle.

Considérons maintenant un volume élémentaire dV de dimension $dx \times dy \times dz$ (Fig. 1.8) et fixe dans l'espace. Le bilan du débit massique sur toutes ses surfaces permet d'écrire une première forme locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1.10)$$

Si maintenant ce volume élémentaire suit le mouvement du fluide, la dérivée particulaire va intervenir. Il vient :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.11)$$

Discussion sur les quatre équations obtenues

L'application de la conservation de la masse sur des volumes de contrôle ou élémentaire, fixe ou en mouvement, conduit à l'écriture de quatre formes différentes de l'équation de continuité : deux formes intégrales (Eqs. 1.7 et 1.9) et deux formes locales (Eqs. 1.10 et 1.11). Néanmoins, il s'agit là de quatre écritures de la même relation. Chacune de ces équations peut être manipulée afin d'atteindre une autre forme. Le membre de

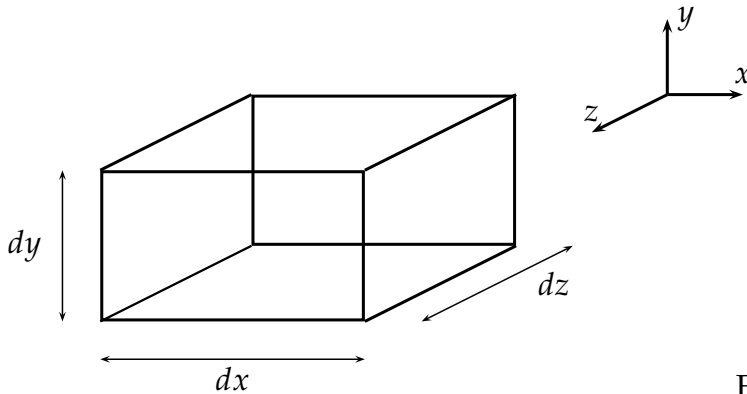


FIGURE 1.8 Volume élémentaire fixe.

gauche de la relation locale (1.11) peut être modifiée en utilisant la dérivée particulaire (et cette fois-ci l'écriture vectorielle) :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \times \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho + \rho \times \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V})$$

correspondant ainsi au membre de gauche de la relation (1.10).

1.3 Bilan de quantité de mouvement

Nous appliquons dans cette partie le Principe Fondamental de la Dynamique énoncé par Newton et appliqué sur des volumes (de contrôle ou élémentaire), animés d'un mouvement aligné sur l'écoulement ou fixes dans l'espace. À l'identique de l'équation de continuité, quatre formes d'équation du bilan de quantité de mouvement seront atteintes.

Le PFD stipule le fait que le produit de la masse d'un élément par son accélération est équilibré par l'ensemble des efforts extérieurs agissant sur cet élément. Il existe deux types d'efforts : (1) les efforts volumiques agissant à distance et (2) les efforts surfaciques agissant directement sur la surface extérieure à l'élément considéré.

1.3.1 Équations de bilan de quantité de mouvement

Nous nous placerons dans le cas du volume de contrôle en mouvement (Fig. 1.9) pour aboutir au bilan de quantité de mouvement.

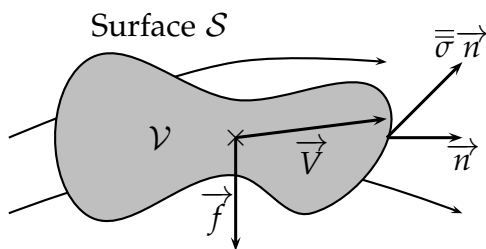


FIGURE 1.9 Volume de contrôle en mouvement sur lequel s'appliquent des efforts volumiques et surfaciques.

Les efforts volumiques par unité de masse sont notés $\vec{f}$, tandis que les efforts surfaciques sont représentés par le tenseur des contraintes, $\bar{\sigma}$, vu plus haut. Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au volume de contrôle en mouvement s'écrit alors

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho \vec{V} dV = \int_{D_t} \rho \vec{f} dV + \int_{S_t} \bar{\sigma} \vec{n} dS \quad (1.12)$$

et

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \vec{OM} \wedge \rho \vec{V} dV = \int_{D_t} \vec{OM} \wedge \rho \vec{f} dV + \int_{S_t} \vec{OM} \wedge \bar{\sigma} \vec{n} dS \quad (1.13)$$

Il s'agit là du bilan de quantité de mouvement et du bilan du moment de quantité de mouvement sous forme intégrale. L'équation (1.12) a été obtenue en considérant un volume de contrôle en mouvement. Il est possible d'obtenir d'autres formes de cette équation en considérant cette fois le volume comme étant fixe dans l'espace, ou en effectuant le bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire. Ainsi l'application du Principe Fondamental de la Dynamique sur un volume de contrôle fixe entraîne les relations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho \vec{V} dV + \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \rho \vec{f} dV + \int_S \bar{\sigma} \vec{n} dS \quad (1.14)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \vec{OM} \wedge \rho \vec{V} dV + \int_S \vec{OM} \wedge \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \vec{OM} \wedge \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{OM} \wedge \bar{\sigma} \vec{n} dS \quad (1.15)$$

On note l'absence de la dérivée particulière, le volume étant fixe dans l'espace.

L'application de ces formulations repose donc sur la définition d'un volume de contrôle. Dans le chapitre 2 concernant le principe de fonctionnement des pompes centrifuges, on choisira un domaine de contrôle correspondant à l'espace constitué par deux aubes successives (Fig. 1.10). Ceci nous permettra de formuler la charge hydraulique délivrée par la pompe à l'écoulement en fonction du champ de vitesse.

L'application du PFD sur des volumes élémentaires (fixe ou en mouvement avec le fluide) conduit naturellement à des relations locales. Si on considère un volume élémentaire fixe, le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.16)$$

avec le terme dans l'opérateur divergence (toutes simplifications faites) :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Si on se place dans le cas d'écoulements adiabatiques, c'est à dire dénués de transferts de chaleur, la viscosité dynamique est une constante, et peut donc être sortie

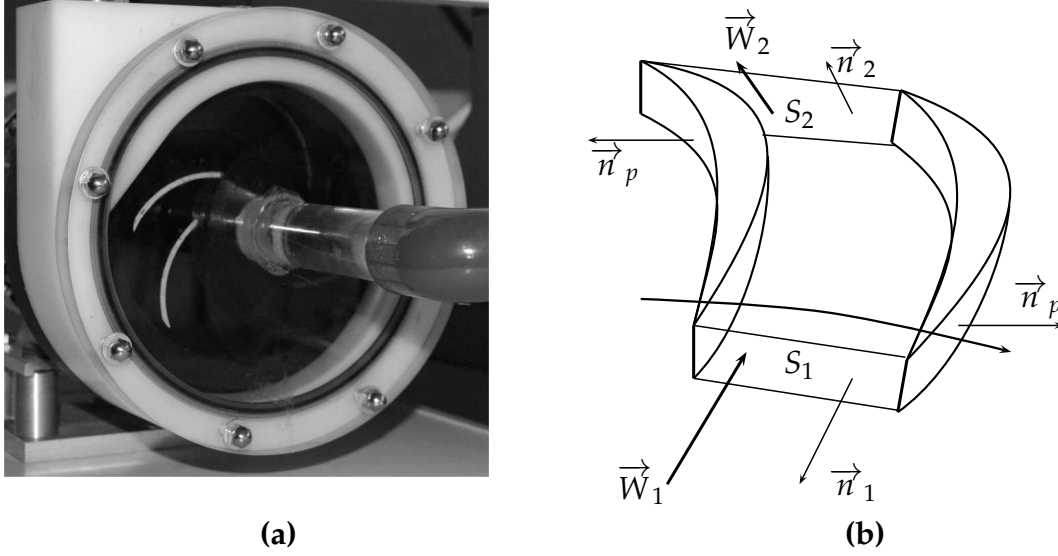


FIGURE 1.10 Application du bilan de quantité de mouvement pour le calcul de la charge délivrée par une pompe centrifuge à un écoulement. a, vue de deux aubes successives d'une pompe centrifuge ; b, domaine de contrôle associé à ces deux aubes.

des opérateurs dérivés. Le fait de considérer d'autre part, des écoulements incompressibles simplifie grandement les équations de Navier-Stokes. En effet, dans ce cas $\partial u_k / \partial x_k = 0$, et

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Les équations de Navier-Stokes deviennent alors

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (1.17)$$

Encore une fois, il est important de comprendre que les expressions (1.12), (1.14), et (1.17) sont des représentations différentes d'une unique équation caractérisant le bilan de quantité de mouvement.

Ces équations expriment le fait que les variations au cours du temps de la vitesse peuvent être créées par l'application de forces s'exerçant sur le fluide (la gravité ou la différence de pression par exemple) mais aussi que la réponse du fluide va dépendre de deux phénomènes de nature très différentes : (1) la friction entre des éléments de fluide voisins se déplaçant à des vitesses différentes et (2) l'effet d'entraînement du fluide par son propre mouvement (effet d'inertie). Cet effet d'inertie aura tendance à dominer l'évolution du fluide lorsqu'il se déplace à grande vitesse. L'importance relative de ces deux contributions détermine le régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent).

Les équations de Navier-Stokes sont très compliquées et difficiles à résoudre, ceci pour plusieurs raisons : (i) il s'agit d'une équation vectorielle dans laquelle les

équations scalaires associées (une pour chaque direction) sont couplées de façon complexe entre elles ; (ii) le terme de convection ($V_j \partial V_i / \partial x_j$) entraîne la non linéarité des équations ; (iii) le couplage pression-vitesse renforce cette difficulté (lorsque le terme de pression devient négligeable, la solution est atteinte).

1.3.2 Définition des écoulements

On ne sait pas résoudre les équations de la dynamique des fluides (paragraphe 1.2 et 1.3) dans le cas le plus général, la difficulté vient du fait qu'elles ne sont pas linéaires. Cependant, lorsque les conditions aux limites sont particulièrement simples, il est possible de trouver une solution. Nous rappelons ces différents écoulements.

(1) Un écoulement **stationnaire** ou **permanent** est tel que les variables sont indépendantes du temps. Les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission sont dans ce cas confondues ;

(2) Un écoulement est dit **unidimensionnel** si son champ de vitesse ne dépend que d'une variable d'espace et du temps. Les grandeurs sont uniques dans les sections perpendiculaires à la direction commune ;

(3) Un écoulement **plan** est tel qu'en chaque point, le vecteur vitesse possède une composante constamment nulle dans une direction donnée et garde même grandeur et même direction suivant la perpendiculaire à ce plan ;

(4) Un fluide est dit **incompressible** lorsque la variation de sa masse volumique est négligeable pour une variation de température ou de pression. Ceci se traduit par une absence de déformation volumique, et $\text{div } \vec{V} = 0$, V étant la vitesse absolue de l'écoulement. Les gaz sont généralement considérés comme étant compressibles et les liquides incompressibles. Notons tout de même que cette hypothèse n'est pas valable dans certaines configurations (convection naturelle, ondes de choc hydrauliques). Nous verrons aussi que pour certaines gammes de vitesses d'écoulement, les liquides ne peuvent plus être considérés comme étant incompressibles. Finalement, la distinction compressible/incompressible se rapporte plutôt au type d'écoulement considéré qu'au fluide lui-même. On ne sera alors pas étonné de rencontrer des écoulements compressibles ou incompressibles.

1.4 Théorème de Bernoulli

Le théorème proposé par Bernoulli⁴ découle des équations de conservation de la quantité de mouvement, tenant compte d'une série d'hypothèses : le fluide est considéré comme étant **parfait** et **incompressible**, l'écoulement **permanent** et les

4. Daniel Bernoulli, physicien suisse (1700-1782). Son importance en mécanique des fluides est centrée sur son livre *Hydrodynamica* (1738) dans lequel il introduit le terme **hydrodynamique**. C'est dans ce livre qu'il essaie de définir les relations entre la pression et la vitesse de l'écoulement. Malheureusement, son aboutissement reste obscure, et sa formulation est très éloignée de celle que nous connaissons aujourd'hui. Il faut attendre la contribution d'Euler pour atteindre la relation différentielle (1.18) utilisée de nos jours : $dp = -\rho U dU$.

forces volumiques dérivent d'un potentiel $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$ où z est la cote verticale du point considéré (par rapport à une cote de référence). Il s'écrit en terme de pression :

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gz = \text{Cste} \quad (1.18)$$

où p est la pression statique, représentant les efforts hydrostatiques. Au contraire, le deuxième terme est la composante dynamique, d'où son nom : pression dynamique et représente donc l'énergie cinétique du fluide (i.e., le mouvement).

Il ne s'agit pas d'un nouveau principe, mais uniquement d'une expression de la conservation de l'énergie mécanique, mais sous une forme pratique pour la mécanique des fluides. En effet, chaque terme de la relation 1.18 est homogène à une énergie par unité de volume.

En hydraulique, la pratique veut que cette équation soit exprimée en **énergie par unité de poids**, obtenue en divisant l'expression (1.18) par ρg :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{Cste} \quad (1.19)$$

Ces termes sont homogènes à des longueurs et définissent des hauteurs, dynamique ($V^2/2g$) et piézométriques ($z + p/\rho g = p^*/\rho g$). L'ensemble est la charge hydraulique H du fluide, elle représente en hauteur de fluide, l'énergie mécanique totale par unité de poids du fluide. On peut écrire en chaque point i d'un réseau hydraulique :

$$H_i = z_i + \frac{V_i^2}{2g} + \frac{p_i}{\rho g}$$

H_i représente l'altitude qu'atteindrait le fluide s'il était ralenti sans frottement jusqu'à une vitesse nulle. De même s'il n'existe pas de perte dans l'écoulement alors la conservation de l'énergie s'écrit $H = \text{Cste}$. Si ce n'est pas vérifié expérimentalement, il existe alors des pertes de charge dans le réseau (cf. paragraphe suivant). Le tracé de H_i en fonction de positions particulières dans le circuit représente la ligne de charge. Dans un écoulement, cette dernière a une pente négative consécutivement à des pertes dans le circuit sauf si on interpose un organe capable de fournir de l'énergie au fluide : **une pompe**.

Applications : Pour appliquer le théorème de Bernoulli, certaines hypothèses sont trop fortes. Elles peuvent être atténuées moyennant des modifications dans l'équation : (i) au lieu que le fluide soit incompressible, il suffit qu'il soit barotrope, $p = p(\rho)$; (ii) l'hypothèse du fluide parfait peut être réduite, on peut en effet appliquer l'équation des fluides visqueux à condition de tenir compte de la dissipation d'énergie due aux forces de viscosité : ce sont les pertes de charges.

1.5 Pertes de charge

À l'origine des pertes de charge, lors du mouvement d'un liquide ou d'un gaz réels, se trouve le processus de transformation irréversible de l'énergie mécanique du courant en chaleur. Cette transformation est due à la viscosité moléculaire et turbulente du fluide en mouvement. On distingue deux aspects des pertes de charge : (i) les pertes régulières, linéaires ou par frottement et (ii) les pertes singulières (consécutives à un changement de section ou de direction de l'écoulement). Il est vivement conseillé de porter une grande attention aux pertes de charges dans le choix d'un diamètre de conduite et à la nature des accessoires afin d'assurer une alimentation correcte à l'aspiration d'une pompe par exemple (problème de cavitation : chapitre 2 - section 2.5.9).

La formule de Bernoulli généralisée, traduisant la conservation de l'énergie mécanique totale entre deux sections d'une conduite (indices 1 et 2), rend compte de ces pertes de charge ΔH :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g \Delta H \quad \text{ou} \quad H_1 = H_2 + \Delta H$$

La quantité ΔH est toujours positive et définit en hauteur d'eau la perte d'énergie mécanique, appelée *perte de charge*, subie par l'écoulement entre les deux sections.

1.5.1 Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires sont provoquées d'une part par la viscosité des liquides et des gaz réels ; elles prennent naissance lorsqu'il y a mouvement, et résultent d'un échange de quantité de mouvement entre les molécules ou entre les diverses particules des couches voisines du fluide qui se déplacent avec des vitesses différentes. Ces pertes ont lieu sur toute la longueur de la conduite.

D'autre part, la plupart des parois rencontrées dans l'industrie sont considérées comme étant rugueuses et non lisses. Il s'en suit des pertes de charge que l'on doit aussi prendre en compte. Celles-ci ne peuvent être traduites par un simple facteur mais peuvent être néanmoins estimées à partir de tables.

Les pertes de charge linéaires ΔH_l présent dans un écoulement de vitesse moyenne V engendrées par une conduite rectiligne de longueur L et de section constante de diamètre hydraulique D , sont caractérisées par le coefficient de pertes de charge de cette conduite, λ , tel que :

$$\Delta H_l = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \quad (1.20)$$

La valeur du coefficient de pertes de charge dépend du régime de l'écoulement, caractérisé par le nombre de Reynolds qui est le rapport des efforts d'inertie et de viscosité :

$$\text{Re} = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visqueuse}} = \frac{\rho V^2 / D}{\mu V / D^2} = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (1.21)$$

Lorsque ce nombre croît, les différents régimes suivants s'établissent successivement : (1) un régime laminaire où λ est inversement proportionnel au nombre de Reynolds,

(2) un régime turbulent où λ est d'abord uniquement fonction du nombre de Reynolds, on parlera de *conduite lisse*, (3) une deuxième phase du régime turbulent dite **phase de transition**, où λ est à la fois fonction de Re et de la rugosité relative ϵ/D , avec ϵ caractérisant la "taille" de la rugosité des parois, et (4) une phase où λ est indépendant de Re et uniquement fonction de ϵ/D . Dans cette région, les pertes de charge sont strictement proportionnelles au carré de la vitesse (on parle de régime de turbulence pleinement développée). La succession de ces différentes phases peut être expliquée par la présence d'une couche de fluide proche de la paroi dans laquelle l'écoulement voit sa vitesse passer brutalement d'une vitesse nulle en paroi (adhérence du fluide) à la vitesse de l'écoulement. Il existe donc dans cette *couche limite*, une sous-couche dans laquelle le mouvement est laminaire (sous-couche visqueuse). Quand le nombre de Reynolds est faible, la région laminaire occupe toute la section de la conduite. Quand le nombre de Reynolds augmente, l'écoulement central turbulent apparaît, mais la couche périphérique reste laminaire et est encore assez épaisse pour noyer toutes les irrégularités de la surface; l'écoulement s'effectue donc en tuyau lisse. Puis le nombre de Reynolds croissant, l'épaisseur de la sous-couche laminaire diminue, et les irrégularités de surface émergent. Quand elles sont en majorité émergées, elles créent une turbulence telle qu'elles masquent complètement les effets de la viscosité et le phénomène devient indépendant du nombre de Reynolds.

L'Allemand Nikuradse a étudié de façon expérimentale l'influence de la rugosité sur les pertes de charge régulières. Pour cela ses expériences reposent sur une distribution homogène des rugosités le long de la conduite qu'il a obtenu par l'utilisation de grains de sable tamisés. Les résultats de ses expériences mettent en évidence les différents régimes d'écoulements cités précédemment *via* des évolutions différentes du coefficient de pertes de charge (Fig. 1.11). Cependant cet état de rugosité de surface régulier n'est pas observé dans le cas des conduites industrielles pour lesquelles des hétérogénéités apparaissent. Les évolutions du coefficient λ avec le nombre de Reynolds, ceci pour des rugosités différentes, sont alors quelque peu différentes de celles notées par Nikuradse. L'évolution du coefficient de pertes de charge pour les conduites industrielles est donnée sur le diagramme de Moody, figure 1.12.

Il est possible d'estimer la valeur numérique du coefficient de perte de charge λ à partir de modèles. La formulation à utiliser dépend du régime d'écoulement traduit par la valeur numérique du nombre de Reynolds :

- Lorsque le régime d'écoulement est laminaire, *i.e.* $Re < 2000$, le coefficient de perte de charge régulière est évalué selon la formule de Poiseuille⁵ :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (1.22)$$

- Lorsque le régime d'écoulement est turbulent lisse, une première formulation possible est proposée par Blasius⁶ lorsque $4000 < Re < 10^5$:

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}. \quad (1.23)$$

5. Jean-Léonard-Marie Poiseuille (né le 22 avril 1797 à Paris et mort le 26 décembre 1869 à Paris) est un physicien et médecin français

6. Heinrich Blasius (né le 9 août 1883 à Berlin et mort le 24 avril 1970 à Hambourg) est un ingénieur hydraulicien et professeur allemand.

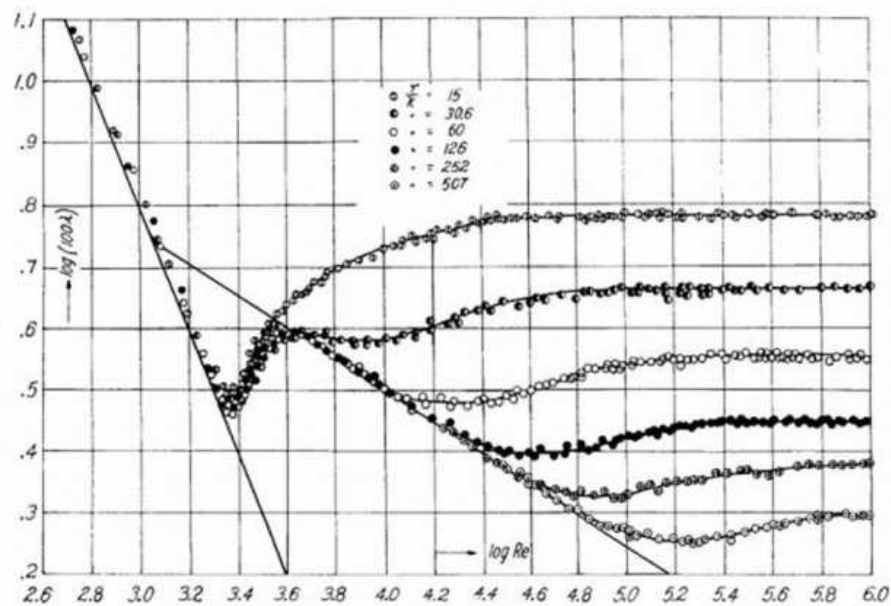


FIGURE 1.11 Évaluation du coefficient de pertes de charge linéaires en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la conduite d'après l'expérience de Nikuradse [42] (Dans cette expérience la rugosité des parois est maîtrisée par l'utilisation de grains calibrés et elle ne correspond donc pas strictement aux écoulements dans les conduites industrielles présentant quant à elles des tailles de rugosités diverses.).

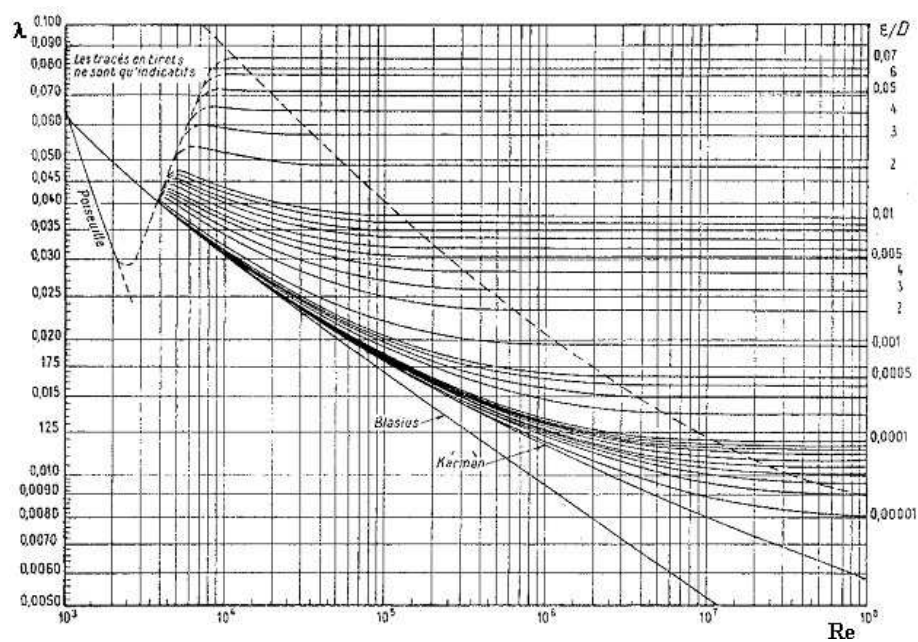


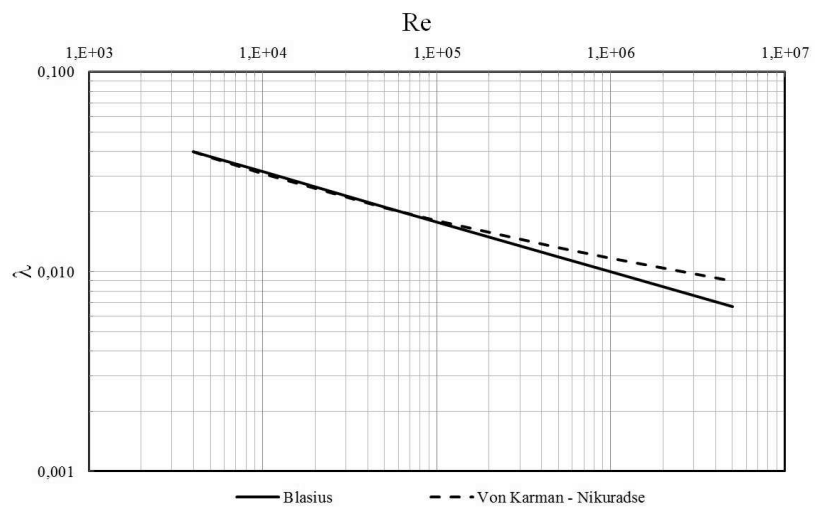
FIGURE 1.12 Diagramme de Moody pour des conduites industrielles (évaluation du coefficient de pertes de charge linéaires en fonction du nombre de Reynolds et de la conduite).

Une autre formulation est proposée, pour ce même régime, lorsque par $Re > 10^5$ par Von Karman⁷ et Nikuradse⁸ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \times \log(\sqrt{\lambda} \times Re) - 0,8 \quad (1.24)$$

Le coefficient λ est estimé par voie itérative dans cette dernière formulation. On note que les deux formulations donnent des résultats similaires tant que $Re < 10^5$ (Figure 1.13).

FIGURE 1.13 Évolution du coefficient de perte de charge régulière estimée à partir des modèles de Blasius et de Von Karman - Nikuradse (Dans cette expérience la rugosité des parois est maîtrisée par l'utilisation de grains calibrés et elle ne correspond donc pas strictement aux écoulements dans les conduites industrielles présentant quant à elles des tailles de rugosités diverses.).



- Lorsque le régime d'écoulement est turbulent rugueux, la formule de Colebrook⁹ peut être utilisée :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \times \log\left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{\lambda} \times Re}\right) \quad (1.25)$$

Lorsque l'on considère les conduites industrielles, le coefficient de perte de charge régulière peut être approché par la formulation :

$$\lambda = 0,790 \times \sqrt{\frac{\epsilon}{D}} \quad (1.26)$$

On note ainsi que pour certains régimes d'écoulement, la valeur numérique du coefficient λ dépend de la rugosité relative (ϵ/D) dont quelques valeurs sont rassemblées dans le tableau 1.1.

7. Theodore von Karman (né le 11 mai 1881 et décédé le 6 mai 1963) est un ingénieur et physicien hongrois et américain.

8. Ivan (naturalisé en Johann) Nikuradzé (né le 20 novembre 1894 à Samtredia et mort le 18 juillet 1979) est un ingénieur hydraulicien allemand d'origine géorgienne.

9. Cyril Frank Colebrook (né le 26 juillet 1910 à Swansea (Pays de Galles) et mort le 12 janvier 1997 à Worthing, en Angleterre) est un physicien britannique.

Tableau 1.1 Valeurs numériques de rugosité dans des conduites industrielles.

Matériau de la conduiteDénomination	ϵ (mm)
verre ou cuivre	0,001
acier neuve	0,05
acier usagée	0,15 à 0,30
fonte neuve	0,25
fonte usagée	0,50
béton lisse	0,3 à 0,8
béton grossier	jusqu'à 5

Faisons une pause, et regardons de plus près le rôle du nombre de Reynolds¹⁰. Ce nombre compare donc les forces d'inertie aux forces de viscosité. Ce phénomène a été mis en évidence par Osborne Reynolds à l'aide d'un dispositif composé d'une conduite principale totalement immergée dans un bassin dont une des extrémités est reliée à ce bassin alors que l'autre extrémité est pourvue d'une vanne initialement fermée. Une fois celle-ci ouverte l'écoulement prend place. Un réservoir placé plus haut autorise une injection de colorant dans l'écoulement principal mettant en évidence les structures qui se développent (Fig. 1.14). Cette expérience est une expérience fondatrice des études d'instabilités hydrodynamiques. Aux faibles nombres de Reynolds les forces visqueuses jouent un rôle important, l'écoulement est dit **laminaire**. Les filets de courant sont parallèles, ne se mélangeant pas (photo du haut de la figure 1.15) et contournant de manière continue tous les obstacles qu'ils rencontrent sur leur chemin. Pour un nombre de Reynolds supérieur, l'écoulement est le siège de mouvements à grande échelle, généralement bien établis et présentant des caractères déterministes nets (**écoulement de transition**) (photo du milieu de la figure 1.15). Ensuite pour des nombres de Reynolds très grands, les forces d'inertie sont dominantes, ainsi l'état bien structuré dégénère vers un état chaotique désordonné caractéristique de l'état **turbulent** (photo du bas de la figure 1.15).

La transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement fortement turbulent est un problème très complexe. En conséquence, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle théorique permettant de prédire efficacement le comportement du fluide lors de cette phase. D'autre part, le point de transition est difficilement déterminé par l'observation. On préférera alors effectuer des mesures et étudier l'évolution d'un paramètre qui dépend du nombre de Reynolds. Dans le cas des conduites, on s'intéresse à l'évolution du coefficient de pertes de charge en fonction du nombre de Reynolds (Fig. 1.16). Celui-ci voit ses valeurs décroître tant que le nombre de Reynolds reste

10. Osborne Reynolds, physicien anglais (1842-1912). Ces premiers travaux concernent le magnétisme et l'électricité. Après 1873, il se concentre principalement sur la dynamique des fluides. Il étudie entre autre les changements de régime d'un écoulement dans une conduite. Son expérience restera célèbre et portera son nom. En 1886, il publie "*The theory of lubrication*" et invente la tribologie (étude des frottements).

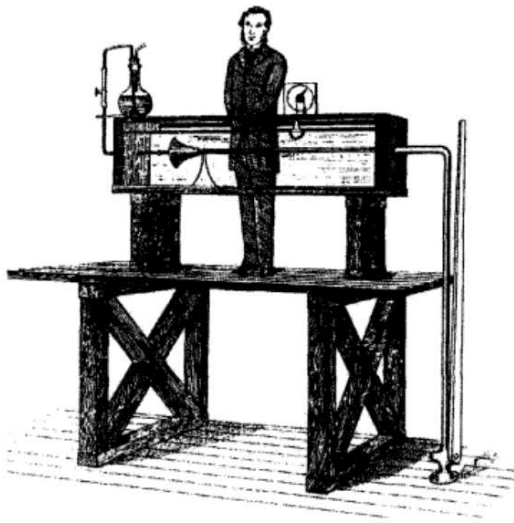


FIGURE 1.14 Osborne Reynolds devant son dispositif expérimental.



FIGURE 1.15 Expérience de Reynolds répétée un siècle plus tard avec le dispositif d'origine, les vitesses augmentant du haut vers le bas (d'après Van Dyke [51]).

inférieur à une première valeur critique (notée Re_{c1}). Le coefficient de perte de charge augmente brutalement au passage de la transition. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à une deuxième valeur critique (notée Re_{c2}), le comportement turbulent se traduit par une nouvelle loi de décroissance différente de celle observée en laminaire. On pourra alors trouver un critère de transition, Re_c tel que

$$Re_c = \frac{1}{2}[Re_{c1} + Re_{c2}] \quad (1.27)$$

Lorsque la conduite a une section de forme non-circulaire, la section peut alors être ramenée à un diamètre équivalent, appelé diamètre hydraulique. Chézy a établi une relation théorique pour des gaines de forme quelconque $D_h = 4 \times \text{Surface} / \text{Périmètre}$.

1.5.2 Pertes de charge singulières

Lorsqu'une conduite fait apparaître une variation de section ou de direction, l'écoulement est à même de subir une diminution de sa charge. On parlera ainsi de **pertes de charge singulières**, caractérisées par le coefficient de perte de charge ζ . Les pertes de charge singulières sont exprimées alors par la relation :

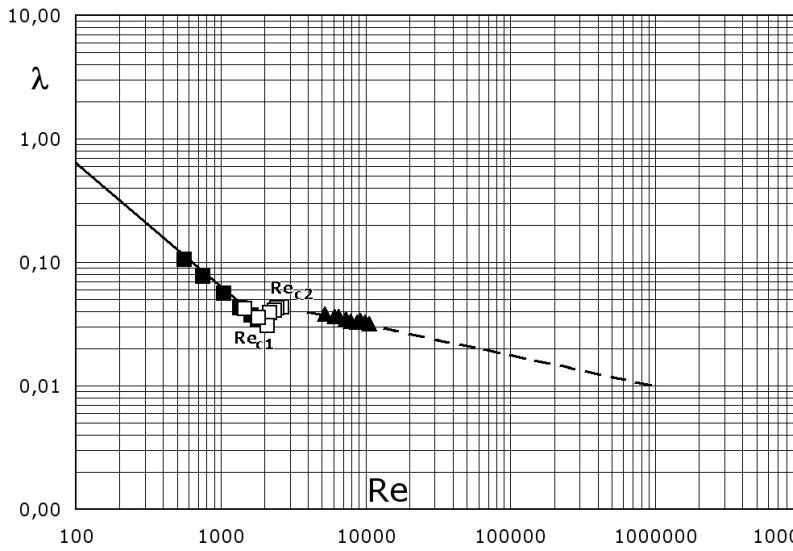


FIGURE 1.16 Évolution du coefficient de pertes de charge dans une conduite avec le nombre de Reynolds. Mesures effectuées au pôle énergétique de l'ECAM : ■, □ manomètre Eau/Air; ▲, manomètre Eau/Mercure. - - -, modèle de Poiseuille/Hagen [30, 44]; —, modèle de Blasius [12].

$$\Delta H_s = \zeta \frac{V^2}{2g} \quad (1.28)$$

ζ dépend de la forme géométrique de la singularité, et est déterminée la plupart du temps par voie expérimentale. V est la vitesse de l'écoulement et dans le cas d'un changement de section (*i.e.* élargissement ou rétrécissement brusque) la vitesse la plus importante des deux sera considérée dans la formulation. L'ouvrage "*Memento des pertes de charge – Idel'Cik*" [49] propose des formulations d'évaluation des coefficients de pertes de charge dans diverses configurations simples. Voici quelques singularités régulièrement observées dans une installation industrielles.

Élargissement brusque

Dans le cas d'un élargissement brusque (Figure 1.17.a), le coefficient de pertes de charge singulières peut être évalué à l'aide de la formule de Borda-Carnot :

$$\zeta = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (1.29)$$

avec S_1 et S_2 les sections de passage de l'écoulement en amont et en aval du rétrécissement respectivement. Cette formulation prévoit des valeurs d'autant plus proches des mesures que le rapport S_1/S_2 est grand. Comme il a été dit précédemment, la vitesse dans la formulation de la perte de charge correspond à celle présente dans la conduite de plus faible section, ici S_1 .

Rétrécissement brusque

L'écoulement subit cette fois-ci une décroissance brutale de sa section de passage (Figure 1.17.b). S_1 représente la section de passage la plus faible comme c'était le cas dans l'élargissement brusque et est placée en aval de la singularité. Lorsque l'écoulement en aval de la singularité est caractérisé par $Re < 10^4$ le coefficient de

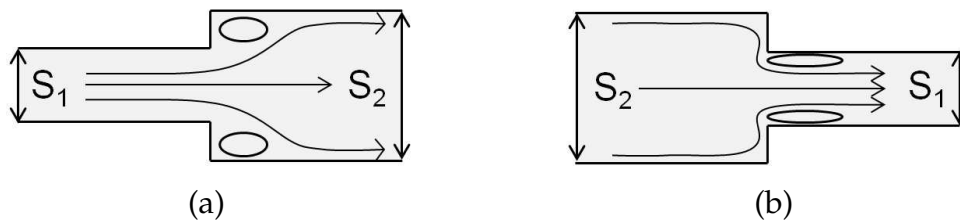


FIGURE 1.17 Élargissement brusque (a) et rétrécissement brusque (b).

perte de charge singulière est estimé à partir du diagramme de la figure 1.18. Pour des nombres de Reynolds de valeur numérique supérieure, on utilisera la formulation suivante :

$$\xi = 0,5 \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \quad (1.30)$$

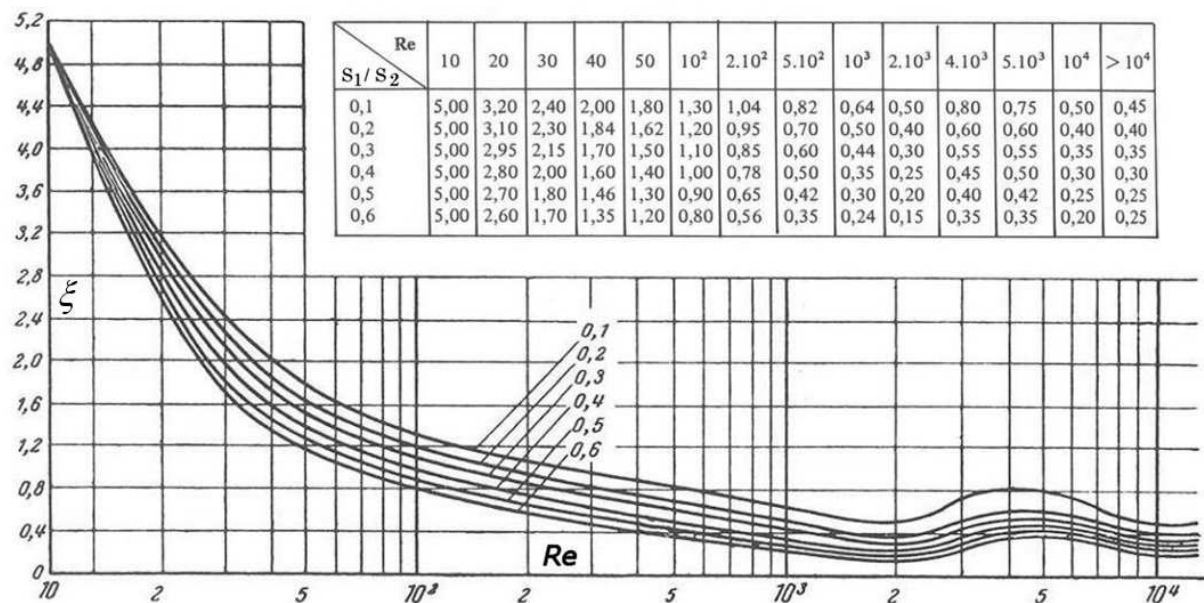


FIGURE 1.18 coefficient de perte de charge d'un rétrécissement brusque lorsque $Re < 10^4$ et pour différents rapports S_1/S_2 (d'après Idel'Cik [49]).

Débouché d'une conduite dans un réservoir

Lorsqu'un écoulement débouche d'une conduite dans un réservoir (Figure 1.19.a) la modification de l'écoulement entraîne une dissipation énergétique. Le coefficient de perte de charge singulière associé à cet événement vaut $\xi = 1,06$ à $1,1$.

Départ de conduite d'un réservoir

Un écoulement issu d'un réservoir de grande taille et forcé de passer par une canalisation pour y en sortir (Figure 1.19.b) subit une dissipation dont le coefficient de perte de charge vaut approximativement $\xi = 0,5$.

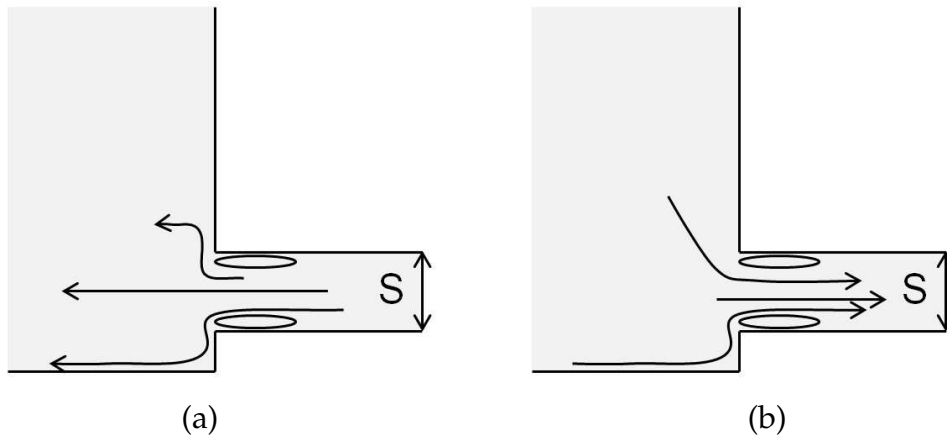


FIGURE 1.19 Débouché d'une conduite dans un réservoir (a) et départ d'une conduite d'un réservoir (b).

Coude

Dans le cas de conduites circulaires coudées, ayant des diamètres identiques en entrée et en sortie de coude, pour lesquelles $R_c/D > 1$, R_c étant le rayon de courbure, le coefficient de pertes de charge peut être évalué à l'aide de la formulation de Weisbach :

$$\zeta = \left[0,13 + 1,85 \left(\frac{D}{2R_c} \right)^{7/2} \right] \frac{\theta}{90} \quad (1.31)$$

avec l'angle θ l'angle du coude exprimé en degré. Lorsque le rayon de courbure est nul (*i.e.* coude brusque) et $\theta = 90$ degré, $\zeta = 1,2$.

Les coefficients de pertes de charge sont donnés par des modèles semi-empiriques. Une fois les pertes de charges totales du réseau estimées, on prend l'habitude de majorer de 10% la valeur estimée.

1.5.3 Pertes de charge totales

Les pertes de charge totales représentent l'ensemble des dissipations énergétiques générées par l'installation hydraulique. Il convient alors de comprendre l'agencement des conduites alimentées (*i.e.* parallèle ou série) avant de les estimer. Dans une seule configuration, lorsqu'une seule conduite composée de tronçons placés en série les uns après les autres, les pertes de charge totales seront estimées par l'addition des pertes de charge régulières et singulières. Dans le cas contraire, l'évolution des pertes de charge totales obtenues par voie graphique reste une solution. Celle-ci sera utilisée dans le prochain chapitre.

Notons qu'utiliser les modèles de pertes de charge ne permettent que d'avoir un ordre de grandeur de ces pertes. En effet dans la plupart des installations hydrauliques, les singularités se succèdent les unes après les autres sans que l'écoulement ait suffisamment d'espace entre elles pour redevenir parfaitement développé. Dans ce cas les profils de vitesse de l'écoulement à l'entame des singularités ne correspondent pas

à ceux présents dans les configurations expérimentales ayant permises d'obtenir ces modèles. Ces derniers ne permettront donc pas de traduire de façon exacte les pertes de charge réellement observées *in situ*. L'utilisateur souhaitant estimer au mieux les pertes de charge dans des configurations complexes pourra, s'il en a les compétences, réaliser des calculs numériques, telles que la CFD.

1.5.4 Notion de longueur équivalente

Il est parfois plus pratique de manipuler des longueurs de conduite que des coefficients de pertes de charge singulières. On peut dans ce but estimer la longueur nécessaire, notée L_e , pour une conduite (virtuelle) de diamètre D et de coefficient de perte de charge linéaire λ produisant des pertes de charge linéaires équivalentes à celle d'une singularité caractérisée par un coefficient de perte de charge ξ . L'égalité de ces deux pertes

$$\xi \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{conduit à la relation} \quad L_e = \xi \frac{D}{\lambda} \quad (1.32)$$

Les valeurs de la conduite virtuelle, D et λ , sont prises égales aux valeurs de la conduite composant le circuit hydraulique. Tout se passe donc comme si la présence de singularités augmentait la longueur de conduite du réseau. Cette notion est souvent utilisée dans les catalogues de fournisseurs de matériels hydrauliques.

1.6 Présence d'une machine dans le réseau hydraulique

Nous avons supposé jusqu'à présent que la ligne de courant, sur laquelle le bilan énergétique était réalisé, ne rencontrait aucune machine avec laquelle une interaction était possible. Ceci n'est plus le cas dans les installations hydrauliques présentant des pompes ou des turbines. Dans les deux cas une interaction entre le fluide et la machine doit être considérée cette fois. Prenons une ligne de courant et isolons des sections S_1 et S_2 entre lesquelles une machine est présente, le bilan énergétique s'écrit alors :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g \Delta H - \frac{P_u}{Q}$$

P_u est la puissance utile fournie (*i.e.*, $P_u > 0$) ou prélevée (*i.e.*, $P_u < 0$) par les pales au fluide. En conséquence, la charge voit sa valeur numérique augmenter dans le premier cas et diminuer dans le second. On peut écrire la relation précédente en utilisant la notion de charge cette fois :

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_v}{\rho g Q} - \frac{P_u}{\rho g Q}$$

avec P_v la puissance dissipée par effet visqueux et donc associée aux pertes de charge.

Dans le cas des turbines, des éoliennes ou des moulins (Fig. 1.20.a), les aubes prélèvent de l'énergie mécanique à l'écoulement, *i.e.*, $P_u > 0$. L'énergie est alors initialement sous forme d'énergie potentielle (cas des retenues d'eau des stations hydroélectriques) ou cinétique (cas des éoliennes ou des moulins). L'énergie mécanique

est ensuite convertie en puissance électrique ou alors en une autre forme d'énergie mécanique, comme cela était le cas pour les moulins broyant les céréales. Dans le cas des pompes (Fig. 1.20.b), la roue, clavetée sur un arbre mis en rotation par un moteur électrique, dispose d'aubes. Ces dernières fournissent l'énergie à l'écoulement, la charge en sortie de la machine se trouvant dès lors plus importante qu'à son entrée. Le chapitre 2 est consacré à l'utilisation des pompes centrifuges dans les réseaux hydrauliques.

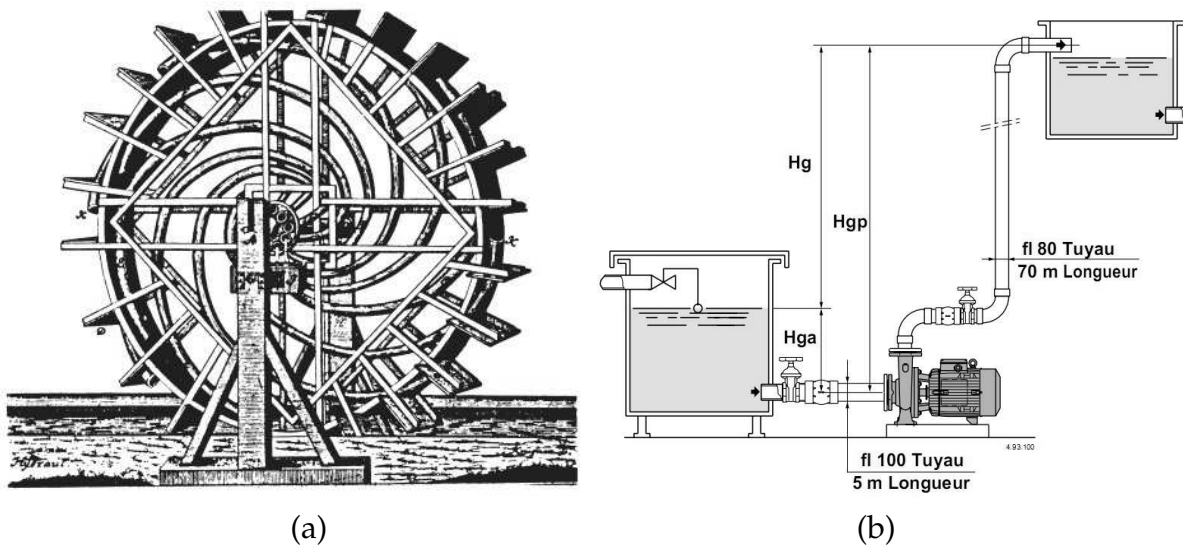


FIGURE 1.20 a, Roue à eau conçue par Jacob Leupold. L'originalité de cette roue repose sur la présence de tuyaux courbés alimentant en eau la région centrale de la roue ; b, Installation hydraulique avec une pompe de type centrifuge et montée en charge (d'après [2]).

1.7 Mesure du débit dans les conduites

Il existe beaucoup de méthodes expérimentales permettant d'estimer le débit dans une canalisation et choisir le débitmètre adapté n'est pas forcément simple. Ce choix est basé entre autre sur la précision attendue, le type de fluide, le nombre de Reynolds, la gamme de débit, l'environnement au contact avec le débitmètre, le coût du débitmètre, la facilité de lecture du débit et la durée de vie du débitmètre.

Les débitmètres peuvent être classés comme suit [27] :

- débitmètres à pression différentielle ;
- déversoirs et chenaux ;
- débitmètres à turbine, compteurs ;
- débitmètres électromagnétiques, débitmètres à ultrason ;
- débitmètres de type oscillant.

1.7.1 La méthode directe

Lorsque l'écoulement est permanent il est possible d'estimer le débit volumétrique à partir du temps nécessaire à l'écoulement pour remplir un volume connu. La qualité de la mesure est d'autant plus importante que le temps de mesure est long. Aucune calibration n'est nécessaire rendant cette méthode très séduisante. Il est d'autre part possible d'utiliser cette méthode pour l'estimation de débit d'un écoulement de gaz mais la compressibilité de celui-ci doit alors être prise en compte.

1.7.2 Les débitmètres à restriction de passage

Les débitmètres à restriction de passage sont tous basés sur l'accélération de l'écoulement suite à un passage au travers d'une tuyère ou une autre forme équivalente (Figure 1.21). Une région de recirculation est formée par le décollement de la couche limite sur la tuyère (schématisée en pointillé sur la figure). L'écoulement principal est accéléré pour former une région contractée (*vena contracta*) puis décélère ensuite pour occuper la section de conduite entièrement. Le débit massique théorique s'écrit :

$$Q = \frac{S_2}{\sqrt{1 - (S_2/S_1)^2}} \sqrt{2\rho (p_1 - p_2)} \quad (1.33)$$

avec S_1 et S_2 les sections de passage en amont de la tuyère et dans la région contractée. $p_1 - p_2$ est la différence de pression notée entre ces deux sections et mesurée à l'aide de tubes piézométriques. Lorsque l'écoulement est turbulent la valeur de S_2 est très bien identifiée. Quelques points limitent l'utilisation de la relation (1.33). Par exemple lorsque le diamètre de la tuyère, D_t , est trop faible devant celui de la conduite amont (*i.e.* D_1) la valeur du diamètre de la région contractée est incertaine. Enfin l'emplacement des tubes piézométriques influence la valeur de $p_1 - p_2$. Le débit volumétrique est donc généralement donné sous la forme :

$$Q = K S_t \sqrt{2\rho (p_1 - p_2)} \quad (1.34)$$

où K est un coefficient de débit qui est fonction du diamètre géométrique de la tuyère et de celui de la région contractée. Il s'agit donc d'une correction apportée à la relation précédente qui est basée sur les paramètres géométriques uniquement (D_1 et D_t , et non pas D_2).

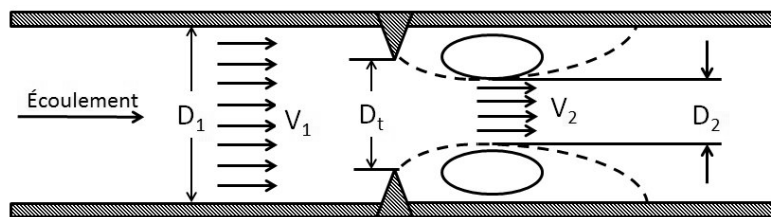


FIGURE 1.21 Représentation d'un débitmètre à restriction de passage.

Les géométries des débitmètres déprimogènes sont connues par construction, la norme Iso 5167 [3] permet de les utiliser sans avoir à les étalonner au préalable.

Plusieurs débitmètres basés sur ce principe sont présentés dans la suite du document.

Le Venturi

Le tube de Venturi est composé de deux parties consécutives, un convergent suivi d'un divergent (Fig. 1.22.a). La fabrication de ce débitmètre nécessite une grande précision et de faibles tolérances expliquant ainsi son coût élevé. Il est principalement placé dans des canalisations sous pression. Le Venturi *classique* détaillé dans la norme ISO 5167-1 possède un angle au sommet de la partie convergente valant 21° , et celui de la partie divergente valant 7° . Les pertes de charge par un tel débitmètre restent faibles.

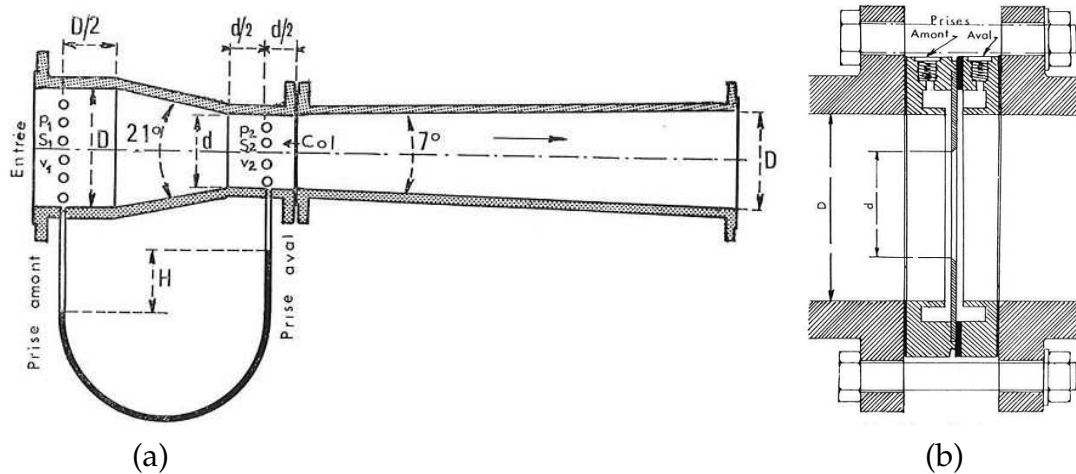


FIGURE 1.22 Représentation d'un Venturi (a) et d'un diaphragme (b) (d'après A. Dupont [20]).

Les mesures de pression sont réalisées sur deux sections placées légèrement en amont et en aval du convergent. Les deux prises de pression sont reliées à un manomètre différentiel à mercure et la différence de hauteur Δh enregistre la quantité $(p_1 - p_2)/(\rho g)$. Le débit massique est formulé de la façon suivante

$$Q = K_V S_c \sqrt{2\rho (p_1 - p_2)}$$

où K_V est le coefficient de correction propre au tube de Venturi, et S_c est la section au col.

Le diaphragme

Le diaphragme utilise un étranglement de l'écoulement par la présence d'une couronne circulaire (Fig. 1.22.b) dont l'orifice est un simple perçage centré. L'épaisseur du diaphragme doit rester faible mais dès lors que la pression exercée par l'écoulement devient excessive pour une tenue mécanique convenable du diaphragme, l'épaisseur est alors augmentée. Un chanfrein est alors réalisé avec un angle égal à 45° [3]. Étant donnée sa simplicité son coût est très faible et l'installation ou le remplacement reste

aisé. Contrairement au Venturi pour lequel la variation de section de passage est contrôlée, ici cette section de passage passe brutalement d'une section de diamètre D à une section plus faible de diamètre d . De ce fait, les pertes de charge sont supérieures. D'autre part, la place occupée par les diaphragmes devient plus faible.

Le principe de mesure étant identique à celui du Venturi, la relation débit massique-hauteur est de la même forme

$$Q = K_D S_c \sqrt{2\rho (p_1 - p_2)}$$

avec K_V un coefficient correctif propre au diaphragme.

1.7.3 Les débitmètres à réponse linéaire

Il existe quelques débitmètres dont la réponse est linéaire avec le débit volumétrique et sans la nécessité de mesurer des différences de pressions.

Le rotamètre

Le Rotamètre (de la société Rota) est un débitmètre constitué d'un tube vertical (Fig. 1.23.a) dont la section de passage augmente du bas vers le haut et dans lequel un organe, appelé de façon impropre *flotteur*, est animé d'un mouvement de translation (et parfois de rotation). L'altitude du flotteur est fonction de son poids propre, de l'effort d'Archimède et de la traînée générée par le passage de l'écoulement autour de l'obstacle. Seul ce dernier effort dépend de la vitesse et donc du débit de l'écoulement. Une relation entre ce débit et l'altitude observée est alors possible.

L'application du théorème de Bernoulli et de la conservation de la masse permet d'écrire la relation entre le débit et la section de passage locale, S_2 :

$$Q = K S_2$$

La surface de passage, S_2 , est proportionnelle à la hauteur par construction, une graduation linéaire peut être ajoutée pour rendre la lecture directe.

Cet appareil simple dans le principe n'est pourtant pas d'usage courant, et on lui préfère les dispositifs déprimogènes, moins fragiles. Le rotamètre est surtout conseillé pour les petits débits, les débits plus élevés entraînant des dimensions beaucoup plus importantes et des coûts plus élevés. De part son principe de fonctionnement, ce dispositif doit être placé à la verticale.

La turbine

La turbine est composée d'une hélice libre de tourner autour d'un axe aligné avec la conduite de l'écoulement (Fig. 1.23.b). La vitesse de rotation peut être mesurée par un capteur magnétique.

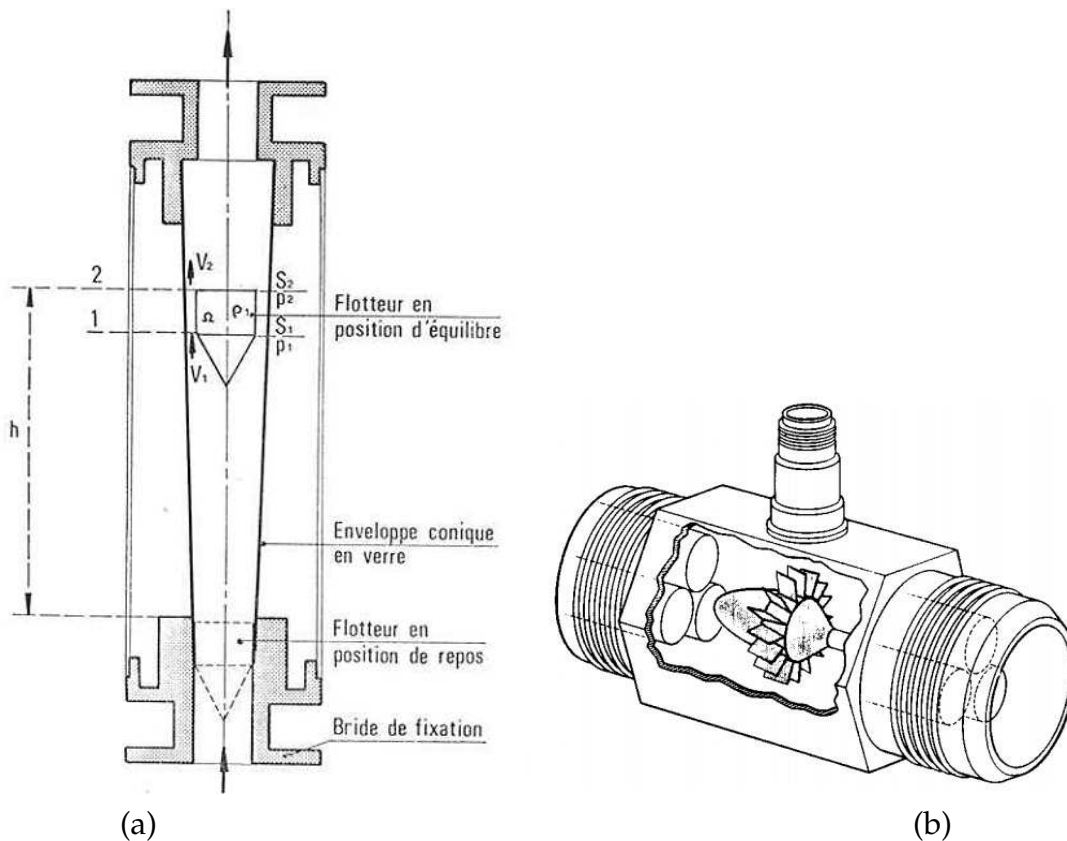


FIGURE 1.23 Représentation d'un rotamètre (d'après A. Dupont [20]) (a) et d'une turbine (b) (d'après F. Kreith [33]).

Débitmètre à effet vortex

Un débitmètre à effet vortex est basé sur la génération d'instabilités par un cylindre placé dans un écoulement. La fréquence de cette génération est caractérisée par le nombre de Strouhal $St = fD/V$ où f est la fréquence des lâchers de tourbillons, D le diamètre du cylindre circulaire, et V la vitesse de l'écoulement à caractériser. Le nombre de Strouhal dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement mais demeure constant sur la plage $Re = [300 - 100\,000]$. L'estimation de la vitesse d'écoulement repose donc sur la mesure de cette fréquence réalisée la plupart du temps à partir de jauges de déformations (Fig. 1.24.a).

1.7.4 Le débitmètre à effet Coriolis

Le débitmètre à effet Coriolis (Fig. 1.24.b) est basé sur l'apparition d'une force de Coriolis s'appliquant sur un écoulement sollicité par une vibration perpendiculaire à ce mouvement. L'effort ainsi créé agit sur le tube donnant lieu à un déphasage du mouvement de celui-ci. La lecture du déphasage entre deux points est utilisée pour l'estimation du débit massique. Ce débitmètre a de nombreux avantages car il permet d'estimer plusieurs grandeurs simultanément : le débit massique, la masse volumique, et la température du fluide. Enfin sa précision

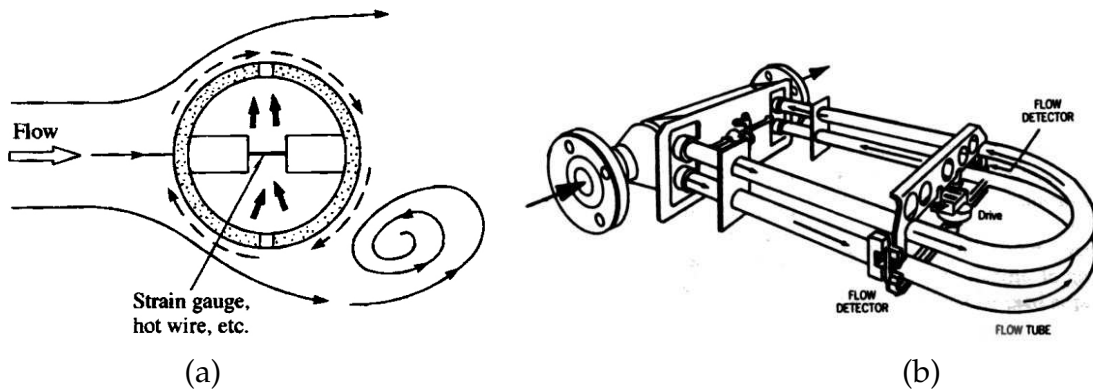


FIGURE 1.24 Représentation d'un débitmètre à effet vortex (a) et d'un débitmètre à effet Coriolis. Respectivement d'après H. Yamazaki *et al.* [58] et d'après D. Liu [10].

1.7.5 Le tube de Pitot

Le tube de Pitot¹¹ est un obstacle placé dans l'écoulement et muni d'orifices permettant la mesure des pressions totale, $p_{\text{Tot.}}$, et statique, $p_{\text{Stat.}}$, de cet écoulement (Fig. 1.25). La vitesse de l'écoulement s'exprime à l'aide de la relation

$$V = c \sqrt{2(p_{\text{Tot.}} - p_{\text{Stat.}}) / \rho}$$

avec c le coefficient du tube de Pitot égal à 1 pour des tubes standards. La valeur de ce coefficient est différente de l'unité lorsque les effets de compressibilités deviennent importants.

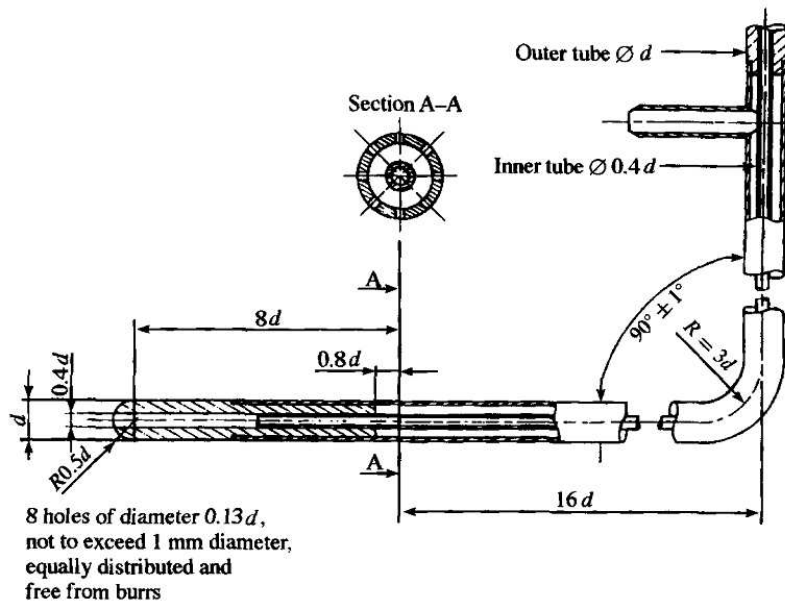


FIGURE 1.25 Représentation d'un tube de Pitot (d'après Y. Nakayama *et al.* [41]).

11. Henri de Pitot, physicien français (1695-1771), mis en œuvre une "machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux".

1.8 Exercices

Le niveau de difficulté des exercices suivants est évalué à partir du nombre d'étoiles (*) allant d'une étoile pour les exercices simples jusqu'à trois étoiles pour les exercices les plus difficiles à résoudre.

[E1] Débit généré par un bassin *

On considère un bassin alimentant une conduite par effet gravitaire à l'extrémité de laquelle un jet débouche à une pression atmosphérique (Figure 1.26). La même pression règne d'autre part sur la surface libre du bassin. Le bassin d'alimentation est de taille suffisamment grande pour que l'on puisse supposer une vitesse nulle de sa surface libre. L'objectif de l'exercice est d'estimer la vitesse du jet si on néglige toute dissipation énergétique dans l'écoulement.

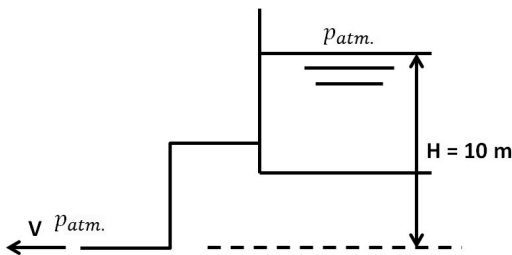


FIGURE 1.26 Conduite en aval d'un bassin.

[E2] Bassins communiquant *

On considère une conduite en fonte neuve alimentant un bassin par gravitaire (Figure 1.27) dont le diamètre et la longueur totale valent respectivement 200 mm et 1 km. Une pression atmosphérique règne sur les surfaces libres des deux bassins. Les bassins sont de taille suffisamment importante pour considérer une vitesse nulle de leur surface libre. Quelle doit être la différence d'altitude entre les surfaces libres de ces deux bassins afin d'assurer un débit d'alimentation égal à 200 m/h³ si on considère uniquement les pertes de charge régulières dans le calcul ?

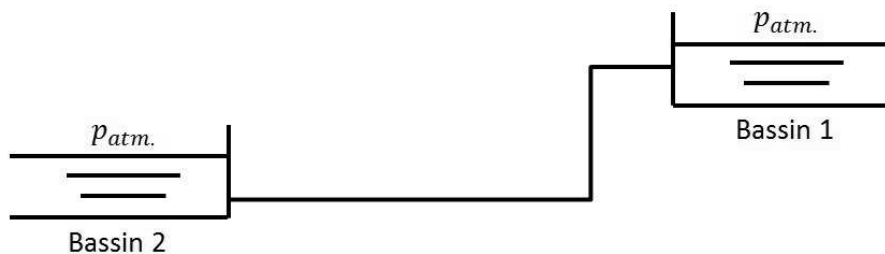


FIGURE 1.27 Alimentation par effet gravitaire d'un bassin à l'aide d'un second bassin.

[E3] Débit dans une conduite d'adduction *

On considère une conduite d'adduction de longueur $L = 27$ km et de diamètre

$D = 1,1$ m alimentée par un réservoir dont la surface libre est placée à une altitude $h = 50$ m par rapport à cette conduite (Fig. 1.28). Le réservoir est de taille assez importante pour négliger la vitesse de sa surface libre lorsque la conduite d'adduction est alimentée. Il règne une pression atmosphérique sur la surface libre du réservoir ainsi qu'à l'extrémité finale de la conduite. La conduite est caractérisée par un coefficient de pertes de charge linéaires $\lambda = 0,014$. Déterminez le débit traversant la conduite d'adduction, Q_0 .

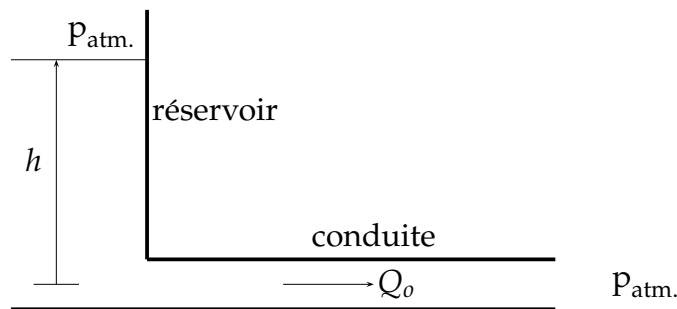


FIGURE 1.28 Schéma d'une conduite d'adduction.

[E4] Débit dans une conduite d'adduction (bis) *

On considère une conduite d'adduction représentée sur la figure 1.29. Une pression atmosphérique règne sur la surface libre du réservoir et à la sortie du jet d'eau. Les valeurs numériques du diamètre et de la longueur de la conduite, ainsi que la différence d'altitude entre la surface libre et la sortie, sont rassemblées sur la figure. Le réservoir est de taille importante entraînant une vitesse nulle de la surface libre en présence d'écoulement dans la conduite d'adduction. Seules les pertes de charge linéaires occasionnées par la conduite seront considérées dans le problème. Déterminez la vitesse d'écoulement ainsi que le débit volume dans la conduite d'adduction si celle-ci est considérée comme étant lisse.

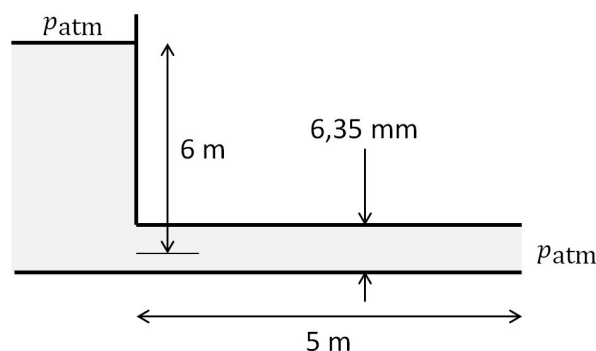


FIGURE 1.29 Conduite d'adduction de l'exercice [E4].

[E5] Réservoir pressurisé *

On considère l'installation de la figure 1.30 composée d'un réservoir dont l'air est sous pression. Cette pressurisation doit permettre de générer un jet d'eau en sortie de conduite *via* une buse de diamètre égal à 12 mm et débouchant à l'air libre (*i.e.* pression atmosphérique). L'altitude du jet est 12 m au-dessus celle de la surface libre dans

le réservoir. La vitesse de cette dernière est suffisamment faible pour la considérer comme étant nulle. La longueur et le diamètre de la conduite valent 35 m et 24 mm respectivement. Trois coudes à 90 degré, de rayon de courbure égal à 24 mm, sont présents dans l'installation, ainsi qu'un départ de conduite du réservoir. Quelle doit être la pression de l'air comprimé nécessaire pour obtenir une vitesse à l'extérieur de la conduite du jet égale à 20 m/s dans le cas où les dissipations énergétiques dans l'écoulement sont ignorées ? Que devient cette valeur si on considère cette fois les pertes de charge dans le calcul ?

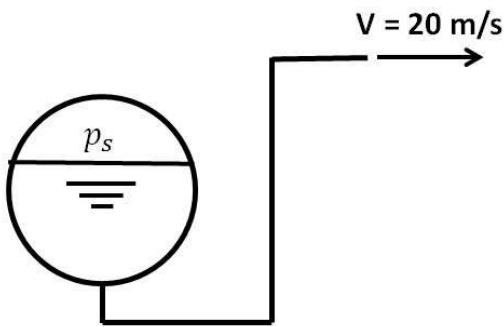


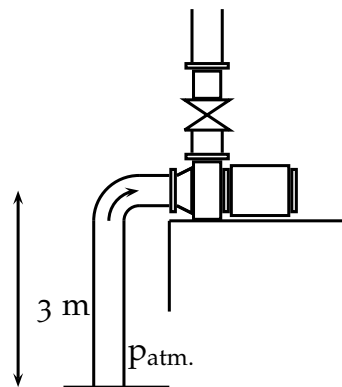
FIGURE 1.30 Installation avec un réservoir pressurisé.

[E6] Débit dans une conduite d'adduction pourvue d'une vanne à son extrémité *

Une vanne est placée à l'extrémité de la conduite d'adduction de la figure 1.28. Celle-ci génère des pertes de charge estimées par l'expression (1.31). Le coefficient de pertes de charge singulières de la vanne vaut $\xi = 0$ lorsque cette dernière est totalement ouverte, et tend vers des valeurs infinies lorsque la section de passage est de plus en plus obturée. Déterminez le débit traversant la conduite d'adduction lorsque la vanne est caractérisée par un coefficient de pertes de charge $\xi = 1045$.

[E7] Pompe montée en aspiration *

On considère une pompe montée en aspiration puisant de l'eau d'un bassin situé en contrebas (figure ci-contre). Il régné une pression atmosphérique sur la surface libre du bassin située 3 m en-dessous de l'entrée de la pompe. La conduite d'aspiration, placée entre la surface libre et l'entrée de la pompe, a une longueur équivalente $L = 50$ m, un diamètre $D = 100$ mm, et est caractérisée par un coefficient de pertes de charge linéaires $\lambda = 0,022$.



Le débit généré par la pompe et traversant la conduite d'aspiration vaut $Q = 25$ m³/h. Déterminez la pression régnant à l'entrée de la pompe. On prendra la pression atmosphérique égale à 101 000 Pa.

Principe de fonctionnement des pompes centrifuges

Historiquement, le principe de pompage de l'eau est apparu dès lors que l'homme a su construire des habitations artificielles pour se protéger des éléments naturels. Le besoin en eau l'oblige alors à trouver un système de transport de cette eau, du puits ou de la rivière à son habitat. Les Grecs et les Romains furent les premiers à utiliser des systèmes (rotatifs) de pompage dont la fonction était de relever l'eau dans des aqueducs alimentant ensuite les villes et les bains. Il faudra attendre la fin du XVIII^{ème} siècle pour que les premières pompes soient réellement construites et utilisées de façon industrielle. En effet, avant cette date, le moulin à eau restait le principal moyen de production d'énergie et les besoins économiques étaient satisfaits par la croissance démographique qui fournissait une main-d'œuvre bon marché. L'explosion démographique, qui apparût dans la seconde moitié de ce siècle, obligea l'outil de production à se mécaniser. Cette mécanisation mise en place grâce à l'apparition de la machine à vapeur entraîna le besoin en minerais situés à des profondeurs de plus en plus importantes. Dès lors l'utilisation de pompes (à pistons) fût obligatoire afin d'évacuer l'eau s'infiltrant dans les galeries. Il s'agit probablement là de la première utilisation industrielle des pompes. L'un des acteurs de cette évolution est Thomas Newcomen qui en 1712 mis au point un système utilisant la puissance de la vapeur en puissance mécanique permettant la mise en mouvement des organes des pompes. Ce système de pompage fût utilisé à travers l'Angleterre principalement pour évacuer l'eau des mines. Les pompes centrifuges, dont le principe avait déjà été énoncé en 1689 par Denis Papin dans son "*Acta Eruditorum*", ne furent industrialisées qu'à la fin du XVIII^{ème} siècle (Fig. 2.1)

Une deuxième évolution dans l'utilisation des pompes fut atteinte encore une fois pour des besoins énergétiques. L'énergie électrique permit le développement

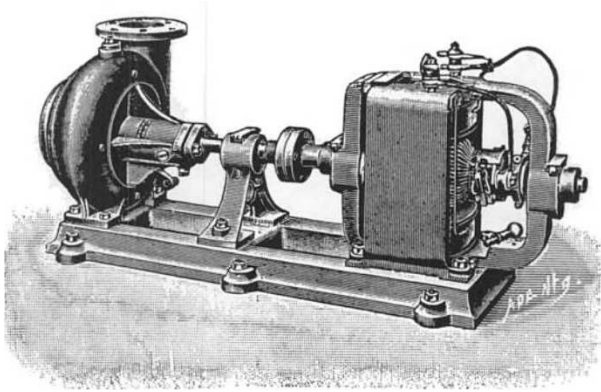


FIGURE 2.1 Première production de pompes centrifuges par les usines pompes et moteurs W. Lederle (1898) [34].

des pompes à principe rotatif, turbine et centrifuge, pour alimenter les alternateurs des centrales dont les plus gros modèles furent réalisés par les Suédois. Depuis cette avancée, aucun principe majeur n'est apparu. Seuls les matériaux utilisés et la précision d'usinage permirent aux pompes d'évoluer vers de meilleurs rendements, de plus grands débits, et de plus hautes pressions. Comme nous pouvons le voir, le seul fait d'utiliser un liquide pour sa consommation, pour la fabrication ou pour les besoins de la fabrication d'un produit, impliquent nécessairement l'utilisation de pompes permettant le déplacement du liquide d'un point à un autre. Les pompes communiquent alors l'énergie nécessaire à ce déplacement. Il s'agit là du propos de ce chapitre. Une première partie concerne l'insertion des pompes dans un réseau hydraulique (analyse externe) alors que la deuxième permet de mieux comprendre les mécanismes de transfert d'énergie à l'intérieur de la pompe à partir des caractéristiques des aubes constituant la roue de la pompe.

2.1 Généralités sur les turbomachines

Une **turbomachine** est un appareil hydraulique dont le rôle est d'échanger de l'énergie entre un fluide en mouvement et un rotor animé d'une vitesse de rotation. Selon le sens de l'échange d'énergie, on parlera d'une machine **réceptrice** (les turbines, les éoliennes, les moulins,...) ou **génératrice** (*i.e.*, les pompes, les ventilateurs, les compresseurs,...). Ainsi certaines machines ajoutent de l'énergie à l'écoulement alors que d'autres en extraient. Dans le cas des pompes et des ventilateurs, l'écoulement est considéré comme incompressible, ce qui n'est évidemment pas le cas pour les compresseurs.

Il existe de nombreuses classifications des turbomachines. Parmi celles-ci, la nature de l'écoulement à travers la turbomachine est une possible classification. Ainsi lorsque la direction de l'écoulement est parallèle ou presque à l'axe de rotation, la turbomachine est appelée **turbomachine axiale** (Fig. 2.2.a). Lorsque la trajectoire de sortie de l'écoulement est placée dans un plan perpendiculaire à cet axe de rotation, on parlera alors de **turbomachine radiale** (Fig. 2.2.c). Il existe d'autre part de nombreuses **turbomachines mixtes** pour lesquelles l'écoulement en sortie est une combinaison de directions axiale et radiale (Fig. 2.2.b).

Dans la suite de ce document, seules les pompes seront abordées, et parmi elles,

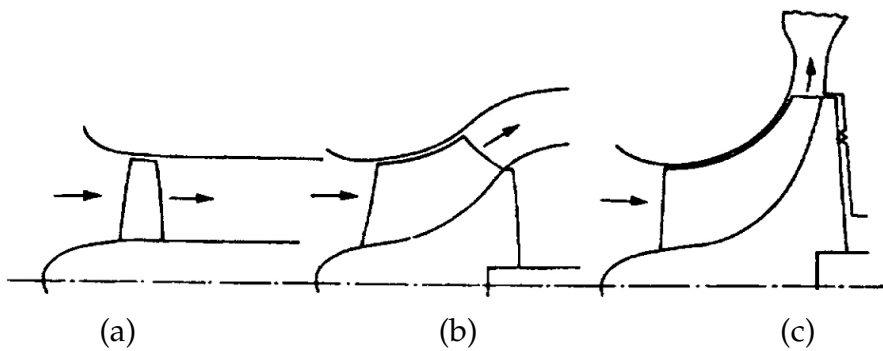


FIGURE 2.2 Trois natures différentes d'écoulement dans le cas des pompes (D'après Dixon [18]).

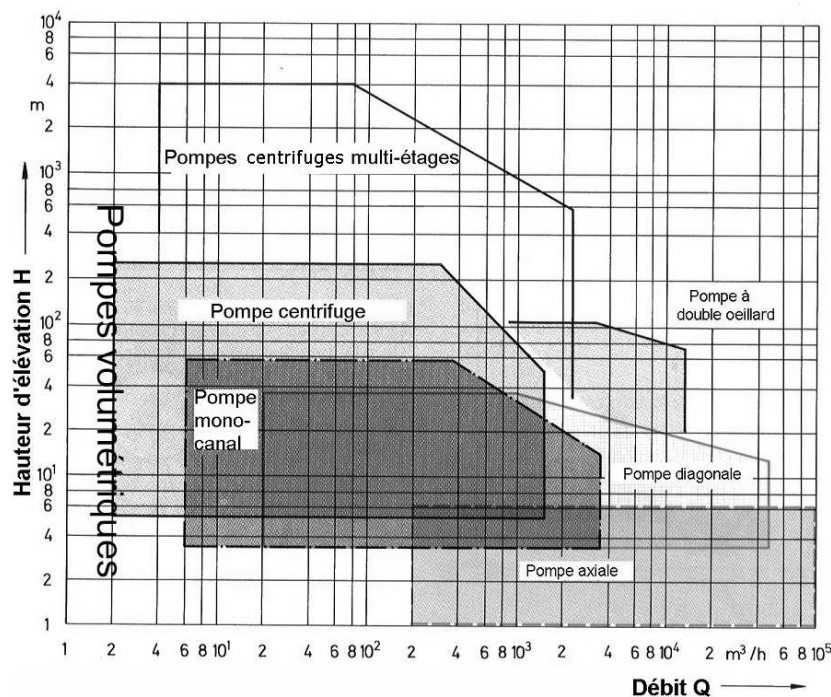


FIGURE 2.3 Classification des pompes (Doc. Bohl [13]).

les pompes centrifuges. Nous ne traiterons pas ici des turbomachines réceptrices. Il existe principalement deux types de pompes, **volumétriques** et **rotodynamiques**. Les premières sont utilisées pour de fortes pressions à débits associés à de faibles débits, alors que les pompes rotodynamiques fournissent des débits plus élevés pour des faibles pressions. On peut néanmoins atteindre des pressions plus importantes à partir de ces dernières dès lors qu'elles sont constituées de plusieurs étages, les hauteurs délivrées par chacun de ces étages s'ajoutant.

Dans le cas des pompes volumétriques, le fluide est entraîné dans un volume à travers un orifice d'admission. Ce volume est ensuite fermé, puis le fluide est comprimé et entraîné vers l'orifice de refoulement. Le cœur humain est un bon exemple de ce type de pompe, et beaucoup d'entre elles sont basées sur ce principe. Elles sont très utilisées dans les circuits hydrauliques à haute pression. Celles-ci représentent la production la plus importante car elles sont peu onéreuses et délivrent un débit constant. Elles sont répandues dans toutes les industries (chimiques, métallurgiques, ou pharmaceutiques). On note des pompes volumétriques rotatives (palettes, engrenages) et alternatives (pompe à piston). Le fonctionnement de ces pompes ne dépend que d'un seul degré de liberté : la vitesse de rotation. Le débit est donc fixé par la géométrie.

Un débit variable est présent dans le cas d'une pompe à pistons mais l'est aussi pour des pompes à engrenages. Le fluide étant enfermé dans le creux entre deux dents, lorsqu'il y a engrènement, la dent agit comme un piston et chasse le fluide. A chaque position d'engrènement correspond un point de contact différent, d'où la fluctuation de débit. Les caractéristiques principales des pompes volumétriques sont données dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 À propos des pompes volumétriques.

Performance	Avantages
Quelques 100 ^{aïnes} de m ³ /h	Q fixe $\forall$ la pression de refoulement Pas d'émulsion des produits pompés (bière, ...) Adapté pour les produits visqueux

Les pompes rotodynamiques constituent quant à elle un système ouvert où le fluide n'est jamais enfermé dans un volume clos. Elles accroissent l'énergie du liquide par le passage dans une roue munie d'aubes. Celles-ci entraînent le liquide par rotation et la pression est alors générée soit par action des forces centrifuges soit par conversion en pression de l'énergie cinétique communiquée au fluide. Le fonctionnement de ces pompes dépend de la vitesse de rotation et du débit du fluide. Le tableau 2.2 caractérise ces pompes.

Tableau 2.2 À propos des pompes rotodynamiques.

Performance	Avantages
jusqu'à 10 ⁵ m ³ /h	Plage de fonctionnement très large Bon rendement (70 à 80 %) Vitesse de rotation de 750 à 3000 tr/min
	Inconvénients
	Inadaptées aux fluides très visqueux Production d'une pression différentielle faible

2.2 Généralités sur les pompes centrifuges

Une pompe centrifuge est composée d'une roue clavetée sur un arbre, tournant à l'intérieur d'un corps de pompe formant une canalisation progressivement divergente appelée volute (Fig. 2.4). Cette roue est pourvue d'aubes, dont la concavité de la courbure est dirigée à l'opposé du sens de rotation, imprimant au liquide un mouvement de rotation. Une roue est caractérisée par les angles de ses aubes, son diamètre, sa largeur, et sa vitesse de rotation. Généralement les aubes suivent la forme d'une spirale logarithmique, les autres formes plus simples comme par exemple des portions

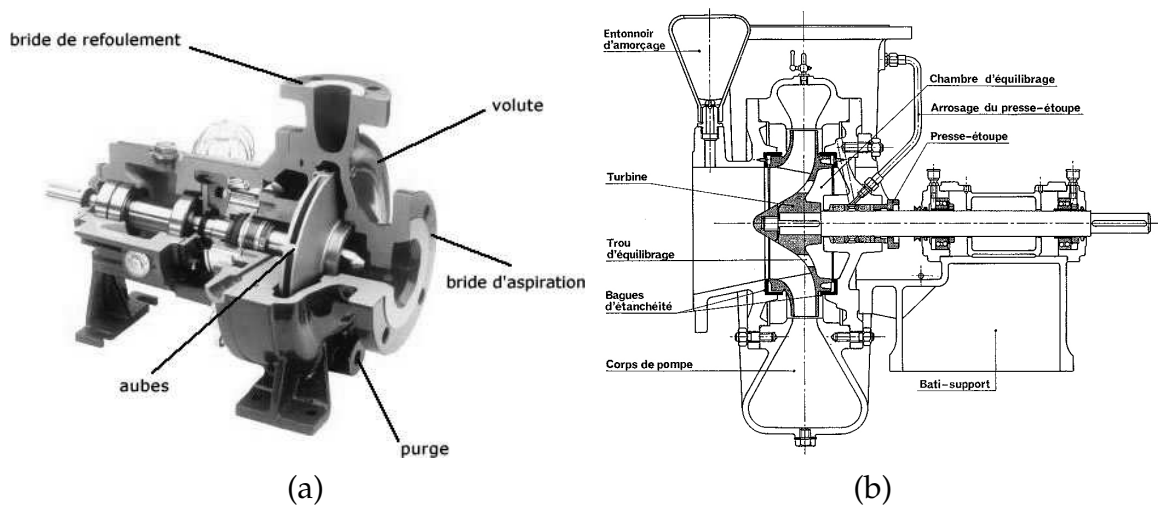


FIGURE 2.4 Pompe centrifuge (a, vue ouverte ; b, vue de coupe (D'après Bergeron [11])).

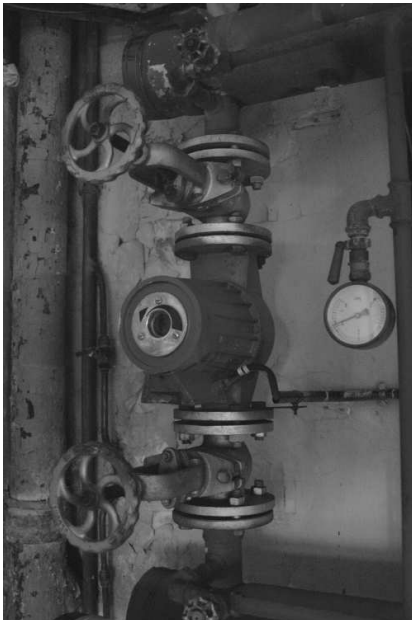


FIGURE 2.5 Pompe précédée de la conduite d'aspiration et suivie de la conduite de refoulement, l'écoulement allant du bas vers le haut. On note sur cette photo les deux vannes placées aux deux extrémités de la pompe permettant son démontage (chaufferie ECAM).

d'arcs circulaires conduisant à des rendements plus faibles [54]. Un bouchon de remplissage est placé sur la partie supérieure de la volute permettant à la pompe de ne pas démarrer vide d'eau : *une pompe centrifuge n'est pas autoamorçante*. De même, un bouchon de vidange est situé dans la partie inférieure de la volute.

Le grand avantage des pompes centrifuges réside dans sa simplicité ; sa construction ne pose pas de problème majeur, car nulle part une grande précision n'est demandée. En effet, on peut accepter jusqu'à un jeu de quelques millimètres sans inconvénient.

Une pompe est généralement placée entre deux canalisations, les canalisations placées en amont et en aval de la pompe appelées respectivement **conduites d'aspiration et de refoulement** (Fig. 2.5).

La variation que subit le fluide au passage de la roue augmente sa charge hydraulique, $H = z + p/\rho g + V^2/2g$. Ainsi la charge hydraulique peut être augmentée par un

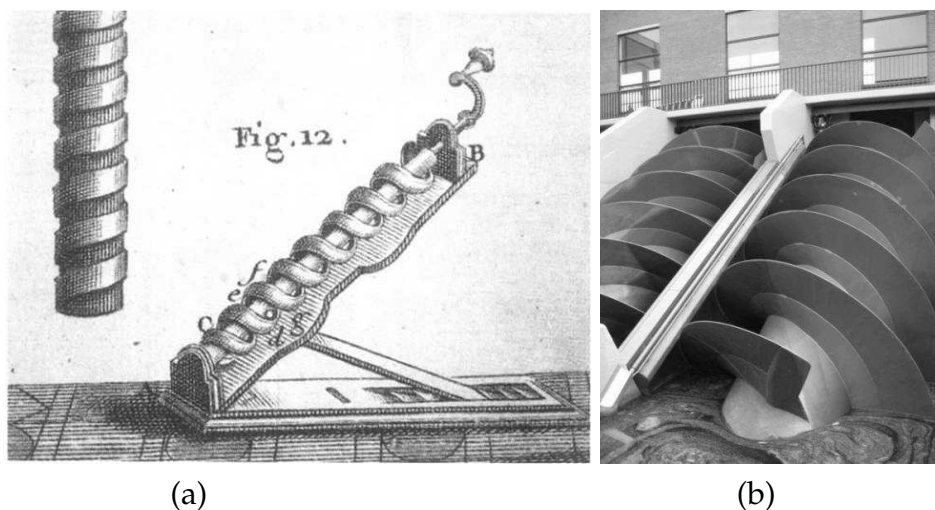


FIGURE 2.6 a, gravure d'Anthony Turner d'une vis d'Archimède [50] ; b, vis d'Archimède utilisée pour pomper l'eau des polders à Kinderdijk (photo d'après M.A. Wijngaarden - page internet wikipedia concernant Kinderdijk).

accroissement des trois termes de cette expression. Si un seau rempli d'eau est monté à l'aide d'une corde à la traction humaine, la variation hydraulique est consécutive à une augmentation de la cote, la pression et la vitesse demeurant invariées. La vis d'Archimède est une machine très ancienne fonctionnant sur ce principe (Fig. 2.6). Les pompes à pistons, ainsi que les pompes centrifuges, quant à elles, sont basées sur l'augmentation du deuxième terme, la pression du liquide qui les traverse.

2.2.1 Différents types de pompes centrifuges

Il existe plusieurs types de pompes centrifuges que l'on peut ranger dans les trois grandes catégories suivantes. (1) les pompes centrifuges *de surface* installées en surface de la nappe dans laquelle s'opère le pompage. Elles peuvent être placées en aspiration ou en charge. Dans le premier cas la surface libre du bassin d'alimentation est placée à une altitude plus basse que celle de l'entrée de la pompe. Lorsque la pompe est montée en charge, l'altitude de l'entrée de la pompe est cette fois plus basse que celle du bassin. L'avantage de cette dernière configuration est l'absence d'un possible désamorçage. L'installation en aspiration implique d'élever la pompe à un niveau tel qu'on ne risque pas de cavitation (Cf. paragraphe 2.5.9). (2) les pompes centrifuges *gyrostatiques* : ce sont des pompes dont l'axe de rotation est vertical. Elles sont très utilisées au relevage des eaux chargées dans les stations d'épuration des eaux usées. (3) les pompes *immergées* employées dans l'exploitation des forages étroits et profonds. Elles sont à axe vertical et ne désamorcent jamais. De plus, le gel d'eau n'est pas à craindre.

2.2.2 Les grandeurs impliquées dans l'utilisation des pompes centrifuges

Une pompe centrifuge met en jeu essentiellement cinq grandeurs. (1) la vitesse de rotation qui, lorsqu'elle est exprimée en radian par seconde, est notée ω , tandis que sa notation en nombre de tours par minute est N , avec $\omega = 2\pi N/60$, (2) le débit refoulé, Q . On admet généralement que le débit refoulé est identique à celui aspiré. Toutefois, pour éviter des échauffements de l'arbre (organe rotor), une légère fuite est admissible au niveau des presse-étoupes. (3) la hauteur nette d'élévation ou hauteur manométrique, H_m . Celle-ci correspond à la différence des charges aval et amont à la pompe. (4) la puissance utile définie par la relation $\mathcal{P} = \rho g Q H_m$, celle-ci s'exprimant en Watt. (5) le NPSH requis, donnée relative au phénomène de cavitation, et présenté plus loin. Tous ces paramètres sont détaillés dans la suite.

2.2.3 Courbes caractéristiques des pompes centrifuges

Les courbes principales qui caractérisent les pompes, pour une vitesse de rotation de l'arbre fixée, sont (1) la courbe hauteur-débit (appelée parfois aussi courbe QH) exprimant la pression exprimée sous forme de hauteur délivrée à l'écoulement par la pompe, (2) la courbe de rendement présentant un maximum pour une certaine valeur de débit et traduisant l'ensemble des pertes dans la pompe, (3) la courbe des puissances absorbées, et (4) la courbe de minimum de hauteur à l'entrée de la pompe pour éviter toute cavitation à l'intérieur de cette pompe. Ceci est exprimé par le NPSH requis (Fig. 2.7).

2.3 Vitesse spécifique

Le responsable du dimensionnement d'un réseau hydraulique est souvent confronté au problème simple qui consiste à choisir lors d'une première phase le type de pompe rotodynamique le mieux adapté aux conditions d'écoulement à atteindre. Les pompes rotodynamiques sont en effet classées par familles de pompes dans lesquelles les formes d'aubes sont semblables avec des tailles variables. On note par exemple les pompes axiales, héliocentrifuges et centrifuges. Ces formes distinctes entraînent dès lors des trajectoires d'écoulement, internes à la pompe, très différentes (Figure 2.8). Le choix de la famille de pompes repose sur la valeur numérique de la vitesse spécifique, notée ω_s , celle-ci étant fonction des conditions d'utilisation (débit, charge manométrique et vitesse de rotation). Ne pas utiliser une pompe issue de la famille de pompe prévue par la vitesse spécifique conduit à l'apparition d'efforts axiaux importants (efforts qu'il faut éviter) au sein même de la pompe à l'origine de contraintes sur l'arbre, d'endommagement des paliers et d'usure des joints.

La formulation de la vitesse spécifique est obtenue à l'aide de celles des coefficients de débit et de hauteur, notés δ et μ respectivement. La suite de ce paragraphe présente en premier lieu ces deux grandeurs et ensuite la vitesse spécifique.

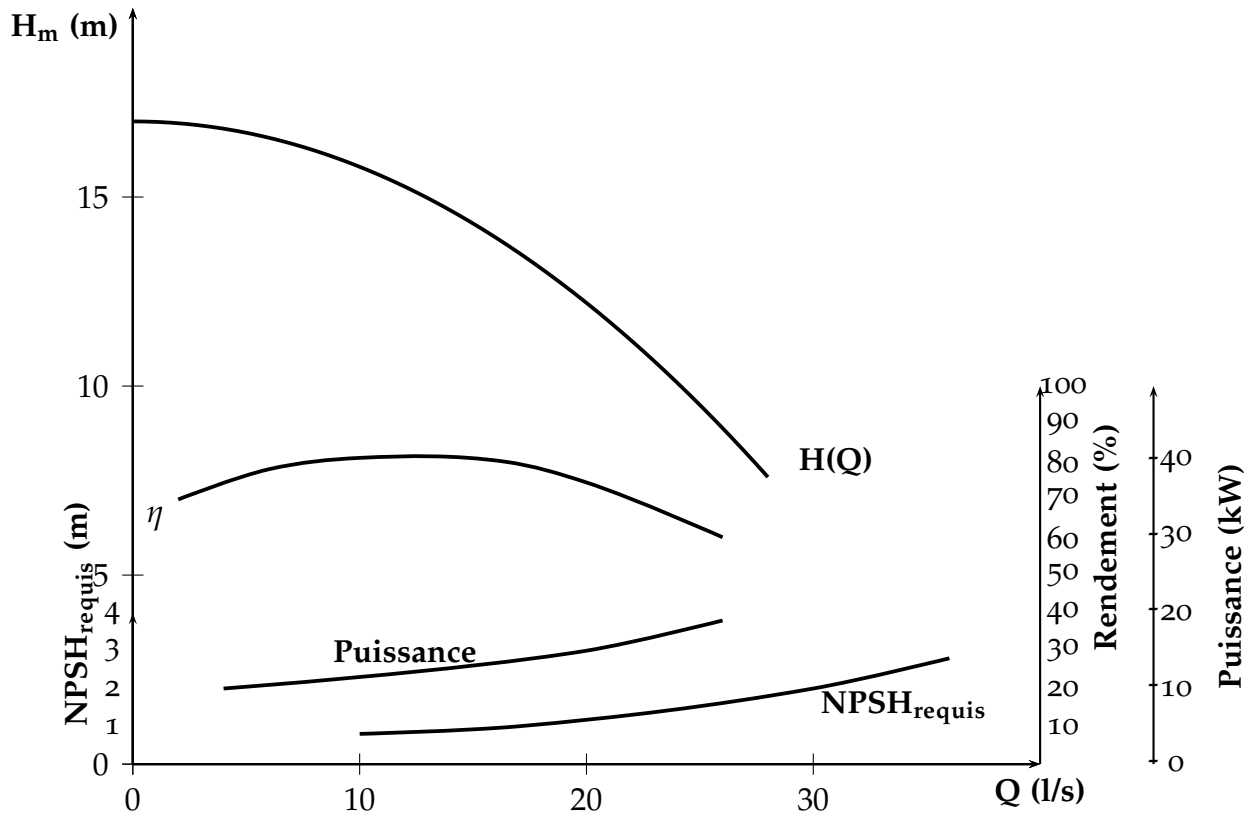


FIGURE 2.7 Exemple de courbes caractéristiques d'une pompe centrifuge à une vitesse de rotation fixée.

2.3.1 Coefficients de Rateau

Les performances d'une pompe, et plus généralement d'une turbomachine, peuvent être exprimées en fonction d'autres variables. Dans le cas des pompes rotodynamiques on s'intéressera à l'énergie par unité de masse, gH . Cette dernière est fonction du débit, de la vitesse de rotation de l'arbre, du diamètre extérieur des aubes, des propriétés physiques du fluide et d'autres dimensions de la pompe :

$$gH = gH(Q, \omega, D, \rho, \mu, l_1, l_2, \dots) \quad \text{ou} \quad f(gH, Q, \omega, D, \rho, \mu, l_1, l_2, \dots) = 0$$

On peut dès lors construire des produits sans dimension à partir de ces variables en choisissant les paramètres de base ρ , ω et D afin de représenter la masse, le temps et

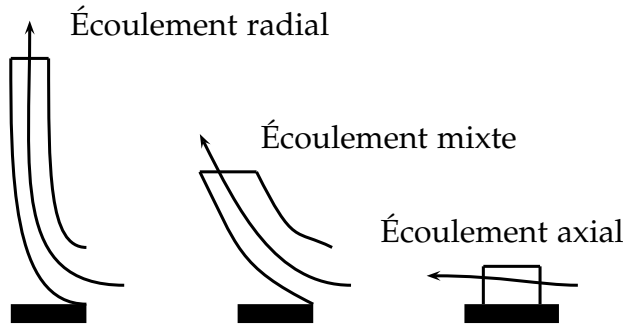


FIGURE 2.8 Écoulement à travers trois formes différentes d'aubes de pompe (de la gauche vers la droite : pompe centrifuge, pompe héliocentrifuge et pompe axiale).

une longueur. Ces produits s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \rho^{\alpha_1} \omega^{\alpha_2} D^{\alpha_3} Q = Q / (D^3 \omega) \\ \pi_2 = \rho^{\alpha_1} \omega^{\alpha_2} D^{\alpha_3} \mu = \mu / (\rho D^2 \omega) \\ \pi_3 = \rho^{\alpha_1} \omega^{\alpha_2} D^{\alpha_3} gH = gH / (D\omega)^2 \\ \pi_4 = \rho^{\alpha_1} \omega^{\alpha_2} D^{\alpha_3} l_1 = l_1 / D \\ \pi_5 = \rho^{\alpha_1} \omega^{\alpha_2} D^{\alpha_3} l_2 = l_2 / D \\ \vdots \end{array} \right.$$

On peut donc écrire la relation suivante entre ces produits sans dimension

$$\frac{gH}{(D\omega)^2} = f \left(\frac{Q}{(D^3\omega)}, \frac{\rho D^2 \omega}{\mu}, \frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

Les produits sans dimension $\mu = gH / (D\omega)^2$ et $\delta = Q / (D^3\omega)$ sont appelés respectivement *coefficient de hauteur* et *coefficient de débit*, et rassemblés sous le terme *coefficients de Rateau*¹. $\rho D^2 \omega / \mu$ est le nombre de Reynolds et caractérise l'écoulement à l'intérieur de la pompe.

Si on considère une **famille de pompes**, c'est à dire des pompes géométriquement semblables, on peut alors passer d'une pompe à une autre en multipliant toutes les dimensions par un même facteur appelé *coefficient de similitude*. Les produits sans dimension faisant intervenir les dimensions, l_1 / D , l_2 / D , ... sont constants et peuvent donc être éliminés de la relation précédente. D'autre part l'expérience montre que pour des nombres de Reynolds élevés, son influence devient très faible (en partie parce que les couches limites sur les aubes sont pleinement développées). De ce fait, le nombre de Reynolds est aussi éliminé de la relation précédente. Il reste alors la

1. Auguste RATEAU (1863-1930), ingénieur français.

relation entre les deux coefficients :

$$\frac{gH}{(D\omega)^2} = f\left(\frac{Q}{(D^3\omega)}\right) \quad (2.1)$$

Ainsi d'après cette relation, si on considère une famille de pompes, telle que cela a été défini précédemment, les valeurs numériques de la charge manométrique avec le débit dépendront des dimensions des pompes et de leur vitesse de rotation, alors que les valeurs numériques de $gH/(D\omega)^2$ avec $Q/(D^3\omega)$ seront identiques quels que soient les dimensions de la pompe et sa vitesse de rotation. La courbe $\mu = f(\delta)$ caractérise donc une famille de pompe, quelles que soient la vitesse de rotation et les dimensions des pompes de cette famille. La figure 2.9 présente en ce sens des résultats expérimentaux de l'évolution du coefficient de hauteur pour une pompe [18], les hauteurs manométriques ayant été obtenues initialement à partir de différentes vitesses de rotation de la pompe. On note d'après les auteurs que dans la gamme normale d'utilisation de cette pompe ($0,03 < Q/(ND^3) < 0,06$) les valeurs numériques du coefficient de hauteur avec le coefficient de débit sont similaires quelle que soit la vitesse de rotation. Ceci confirme ce qui a été dit plus haut. Si une autre pompe de la même famille était étudiée, sa courbe de $\mu=f(\delta)$ serait confondue avec les quatre présentes sur la figure 2.9. Pour des coefficients de débit plus importants, les valeurs atteintes pour la vitesse de rotation la plus élevée s'éloignent de la courbe *unique* consécutivement à la présence d'une cavitation dans la pompe. Dans ces conditions les similarités ne sont plus observées. Ainsi l'intérêt à utiliser les coefficients de débit et de hauteur repose sur la manipulation d'une unique courbe, représentant alors une famille de pompes similaires quelle que soit leur vitesse de rotation.

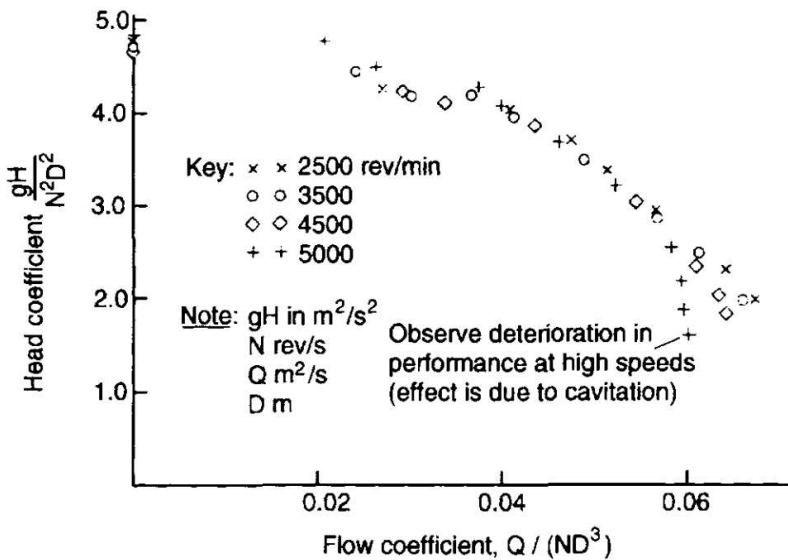


FIGURE 2.9 Coefficient de hauteur d'une pompe centrifuge (données expérimentales d'après Dixon [18]).

2.3.2 Formulation et utilisation de la vitesse spécifique

Comme cela a été dit plus haut, la vitesse spécifique permet de choisir la famille de pompes adaptée à l'utilisation souhaitée. La formulation de la vitesse spécifique

peut être mise en évidence à partir des expressions des coefficients de débit et de hauteur manométrique et en éliminant la contribution du diamètre. Ceci est possible en s'intéressant au rapport μ^3/δ^2 :

$$\frac{\mu^3}{\delta^2} = \frac{(gH)^3}{\omega^4 Q^2} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{\delta^{1/2} (gH)^{3/4}}{Q^{1/2} \mu^{3/4}} \quad (2.2)$$

Par définition, la **vitesse spécifique** de cette famille de pompes est la vitesse de rotation d'une pompe délivrant un débit de $1 \text{ m}^3/\text{s}$ à une hauteur de 1 m . Ainsi, d'après la relation précédente, $\omega_s = \delta^{1/2} g^{3/4} / \mu^{3/4}$ qui peut être réécrite à partir de la relation (2.2) :

$$\omega_s = \omega \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad (2.3)$$

avec ω exprimée en rad/s, H en m, et Q en m^3/s . Si on prête attention à l'expression (2.3), on note que les unités de la vitesse spécifique ne correspondent pas à celle d'une vitesse de rotation en rad/s. Ainsi les valeurs numériques de la vitesse spécifique dépendent des unités utilisées. Nous utiliserons dans ce document la vitesse de rotation exprimée en tours par minute, de ce fait l'expression précédente devient

$$N_s = N \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad (2.4)$$

avec N exprimée en tr/min, H en m, et Q en m^3/s . Les valeurs numériques de la vitesse spécifique correspondent donc aux gammes proposées sur la figure 2.10. À chaque valeur numérique de la vitesse spécifique N_s , il lui correspond une forme de roue particulière, indépendante de la taille de cette roue. On note par exemple, d'après la relation (2.4), qu'à valeurs égales de débit et de vitesse de rotation, les pompes de grande vitesse spécifique fonctionnent avec une hauteur d'élévation faible (*i.e.* les pompes axiales). Il existe une progression continue entre la pompe centrifuge pure radiale jusqu'à l'hélice de type axial. Notons que la forme n'est ni un avantage, ni un inconvénient en soi pour l'utilisateur ou le constructeur.

*Comme il a été dit précédemment, les dimensions de la vitesse spécifique ne sont pas celles d'une vitesse de rotation. Il existe alors un autre paramètre appelé coefficient de vitesse spécifique caractérisant une pompe délivrant une énergie massique (*i.e.* gH) égale à 1 J/kg à un débit de $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Pour cette définition, ce coefficient devient sans dimension.*

On peut se faire une idée de la vitesse spécifique d'une pompe en regardant sa roue. En effet, les roues fortement radiales ont des aubes à faible passage de liquide. La longueur des aubes est importante (le rapport des diamètres extérieur et d'aspiration) excède deux et peut atteindre jusqu'à cinq. Les roues héliocentrifuges ont un diamètre extérieur semi-conique et des aubes larges. Le rapport des diamètres est voisin de l'unité. Les hélices quant à elles ont une largeur de passage très importante pour un rapport de diamètre égal à l'unité. Ainsi pour des rapports de diamètres diminuant et des largeurs de passage augmentant, la vitesse spécifique croît.

L'exercice [E22] propose une application de la vitesse spécifique.

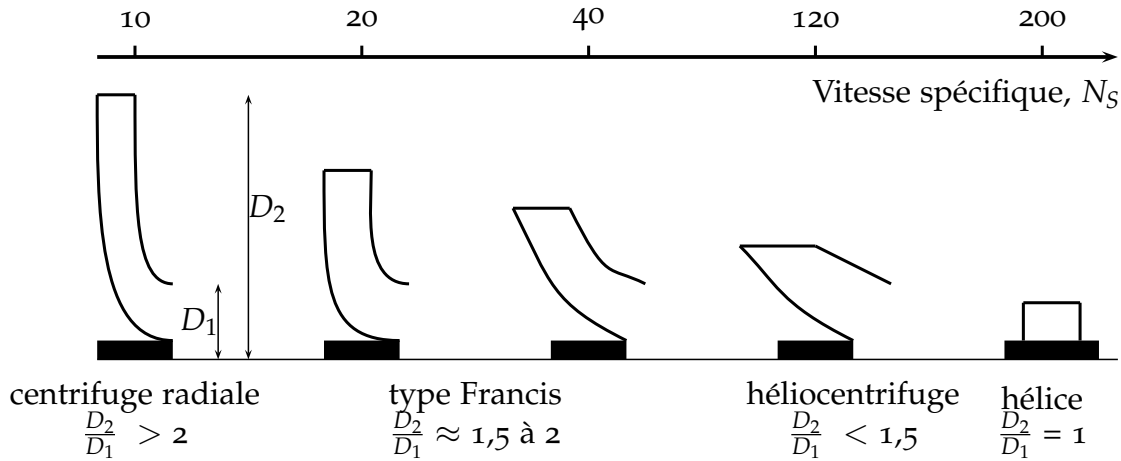


FIGURE 2.10 Formes de la roue en fonction de la vitesse spécifique estimée à partir de la relation (2.4) ($Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ et $H = 1 \text{ m}$).

2.4 Similitudes

Le débit éjecté par les aubes d'une pompe étant linéaire avec la vitesse de rotation, si on considère une pompe centrifuge, la fonction $f(Q/(D^3\omega))$ de la relation (2.1) devient alors constante. En conséquence la quantité gH/ω^2 reste aussi constante. Ainsi pour une variation de la vitesse de rotation de ω à ω' , un point localisé par ses coordonnées (Q, H) sera déplacé aux nouvelles coordonnées (Q', H') tout en satisfaisant les relations de similitude :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\omega'}{\omega} \quad \frac{H'}{H} = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2$$

Intéressons-nous à l'utilité de ces formulations et considérons pour cela la courbe caractéristique d'une pompe tournant à une vitesse de rotation $N = 1450 \text{ tr/min}$ (Fig. 2.11). On souhaite connaître sa caractéristique pour une vitesse plus faible, $N' = 1200 \text{ tr/min}$. Le rapport des vitesses vaut $N'/N = 0,828$, et ce rapport élevé au carré vaut $(N'/N)^2 = 0,685$. Ainsi les relations de similitudes $Q' = 0,828 \times Q$, et $H' = 0,685 \times H$ permettent le tracé de la caractéristique de la pompe pour la nouvelle vitesse de rotation. On peut pour cela choisir quelques points sur la courbe caractéristique à 1450 tr/min et évaluer leur nouvelle position pour 1200 tr/min (Tab. 2.3). La courbe caractéristique de la pompe à la vitesse de rotation égale à 1200 tr/min est donnée sur la figure 2.11.

Ainsi on note qu'un point, placé sur la caractéristique de la pompe obtenue à une vitesse de rotation donnée, sera déplacé lors de la modification de la vitesse de rotation selon une parabole d'équation $H_m = \alpha \times Q^2$. Ceci est illustré sur la figure 2.11 sur laquelle les trajectoires de deux points, A et B, sont montrées, en plus des deux courbes caractéristiques de la pompe précédente pour deux vitesses de rotation (1200 tr/min . et 1450 tr/min .). Les valeurs du paramètre α de ces deux trajectoires peuvent être évaluées à l'aide des coordonnées des deux points à une vitesse de rotation données (*i.e.* $\alpha_A = H_{m,A}/Q_A^2 = 0,115 \text{ m.s}^2/\text{l}^2$ et $\alpha_B = H_{m,B}/Q_B^2 = 0,042 \text{ m.s}^2/\text{l}^2$). Ce point abordé ici sera très utile dans l'adaptation d'un débit dans un réseau hy-

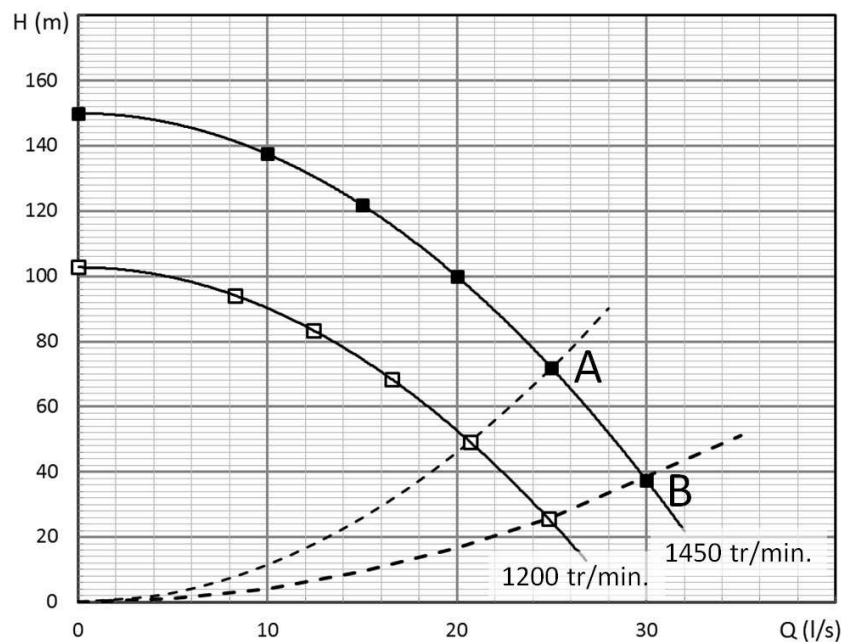


FIGURE 2.11 Caractéristiques d'une pompe centrifuge pour deux vitesses de rotation différentes et trajectoires de deux points, A et B, lorsque la vitesse de rotation de la pompe varie.

draulique par modification de la vitesse de rotation de la pompe (Cf. paragraphe 2.8.1).

Tableau 2.3 Points de la caractéristique de la pompe de la figure 2.11 pour deux vitesses de rotation (le premier nombre représente le débit, le deuxième la hauteur manométrique).

1450 tr/min		(30 ; 38)	(25 ; 72)	(20 ; 100)	(15 ; 122)	(10 ; 138)
1200 tr/min		(24,8 ; 25,7)	(20,7 ; 49,2)	(16,6 ; 68,5)	(12,4 ; 83,5)	(8,3 ; 94,2)

2.5 Analyse externe d'une pompe centrifuge

Les considérations que nous allons voir dans ce paragraphe ne se limitent pas aux pompes centrifuges mais restent vraies pour la plupart des autres types de pompes. Pour fixer les idées, seuls les très faibles débits associés à des pressions importantes leur sont interdits (domaine privilégié des pompes à pistons) ; par contre les très gros débits à de faibles hauteurs ne peuvent être résolus qu'avec des pompes centrifuges (par exemple 4 000 l/s à 4 m).

Un des objectifs de cette partie est de savoir estimer la puissance absorbée par un système de pompage, impliquant une ou plusieurs pompes, dont le rôle est de fournir un débit à un réseau hydraulique. Ce dernier peut être très simple, par exemple un circuit composé d'une conduite d'aspiration suivie d'une conduite de refoulement alimentant un réservoir, ou très complexe (existence de plusieurs bassins de puisage à partir de plusieurs pompes et alimentant des branches placées en parallèle entre elles). Dans ce dernier exemple illustré sur la figure 2.12, deux villes sont alimentées par les réservoirs R_E et R_D approvisionnés par un réseau hydraulique présentant d'une part deux bassins (B_1 et B_2) situés respectivement aux altitudes identiques de 10 m à la

surface desquels règne une pression atmosphérique. D'autre part, deux pompes (P_1 et P_2), reliées chacune à leur bassin respectif par leur conduite d'aspiration, peuvent être mises en parallèle au point B à partir de deux vannes (V_1 et V_2).

La résolution de ce problème consiste à estimer graphiquement l'état de fonctionnement des deux pompes (*i.e.* débit, charge délivrée, rendement) pour atteindre la puissance absorbée par le système de pompage et correspondant à l'addition des puissances absorbées par chacune des pompes.

Il n'y a pas une unique façon de résoudre ce problème. Néanmoins toutes les méthodes possibles reposent sur le même principe : les tracés d'un système "alimentant" et du réseau "à alimenter". Nous verrons dans la suite du document qu'une solution est de décomposer le réseau en parties distinctes et toutes caractérisées par une courbe sur le graphe. Avant de proposer une résolution de cet exemple, définissons en premier lieu les différentes courbes à tracer sur le graphe de résolution.

2.5.1 Courbe caractéristique d'un système d'alimentation

Une première étape dans la résolution du problème énoncé plus haut est de tracer la courbe caractérisant le système de pompage. Lorsqu'une unique pompe est présente dans le circuit, celle-ci se résume à la courbe de la pompe proprement dite. Par contre, en présence de plusieurs pompes, la courbe caractéristique est obtenue par addition des débits ou des hauteurs manométriques selon l'organisation des pompes.

Hauteur manométrique

On appelle **hauteur manométrique**, la charge fournie au fluide par la pompe. Cette charge, notée H_m , permet d'obtenir le débit souhaité à un point souvent situé à une altitude supérieure au plan de pompage.

Intéressons-nous à la charge délivrée par la pompe dans la configuration de la figure 2.13. Le point 0 correspond au plan de pompage, il sera souvent considéré comme le point de référence. Les points 1 et 2 sont respectivement l'entrée et la sortie de la pompe. Enfin le point 3 représente l'altitude à atteindre. La conduite conduisant l'écoulement du point 0 à 1 est la conduite d'aspiration. La conduite de refoulement va du point 2 au point 3. Ces deux conduites présentent des pertes de charge régulières et singulières, ΔH_a et ΔH_r . Nous pouvons donc écrire entre ces points :

$$H_0 = H_1 + \Delta H_a \quad \text{et} \quad H_2 = H_3 + \Delta H_r$$

L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 donne : $H_1 + H_m = H_2$. Les relations précédentes permettent d'écrire :

$$H_m = H_2 - H_1 = H_3 - H_0 + \Delta H_r + \Delta H_a$$

À partir de la définition de la charge hydraulique, on obtient finalement

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + z_3 - z_0 + \frac{V_3^2 - V_0^2}{2g} + \Delta H_a + \Delta H_r \\ &= \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z + \frac{\Delta V^2}{2g} + \Delta H_a + \Delta H_r \end{aligned}$$

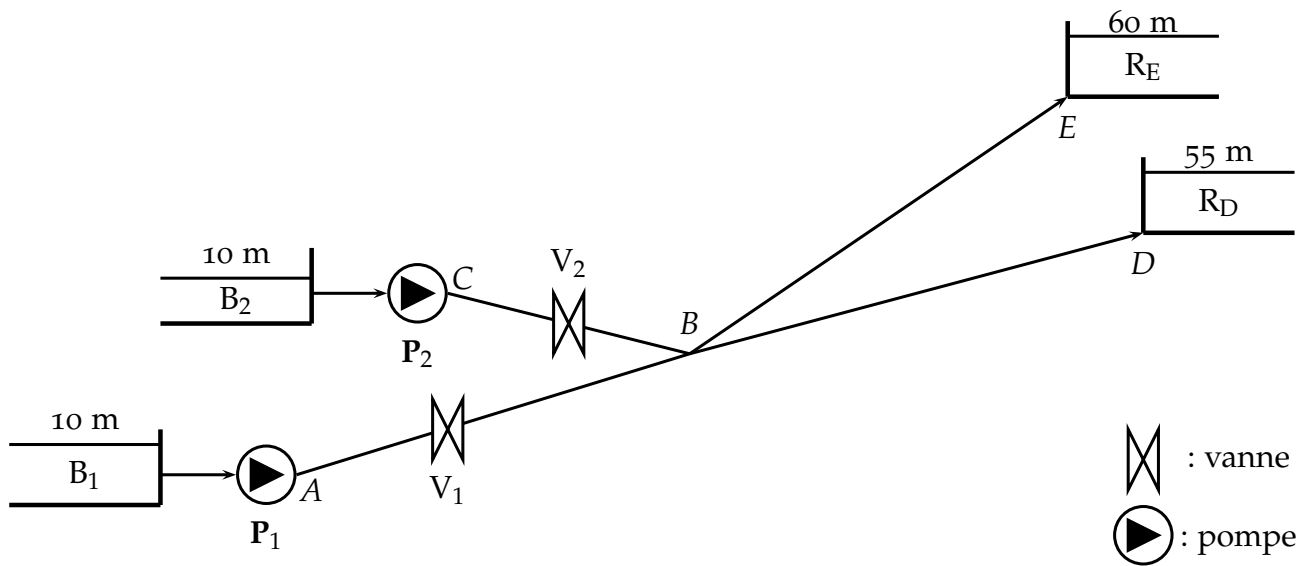


FIGURE 2.12 Exemple d'un réseau hydraulique complexe. (Pour les besoins du dessin, les échelles et les perspectives ne sont pas respectées).

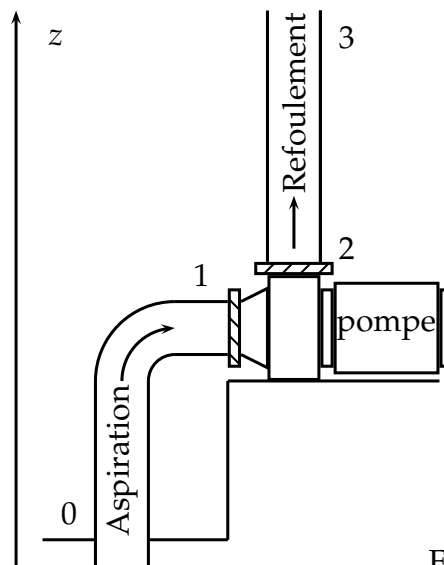


FIGURE 2.13 Pompe montée en aspiration.

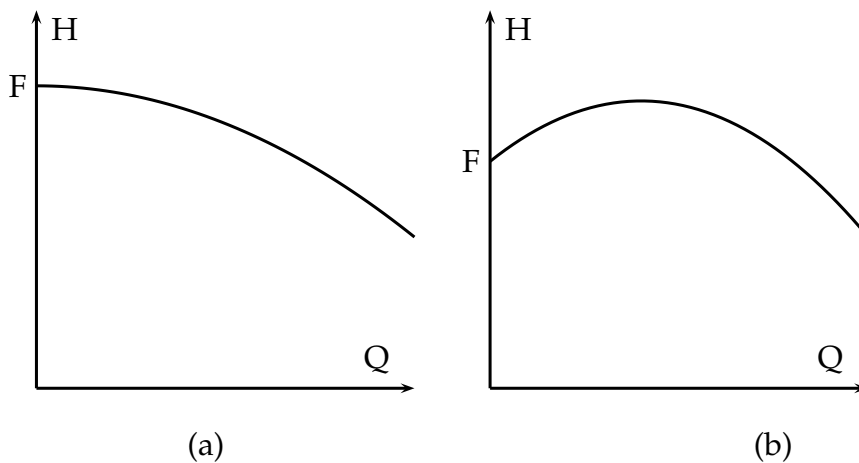


FIGURE 2.14 Courbes caractéristiques d'une pompe centrifuge (a, forme classique ; b, autre forme possible).

La charge fournie au fluide lui permet donc de vaincre une différence de pression, une différence d'altitude, une différence de vitesse et des pertes de charge. Ces termes n'auront pas les mêmes contributions selon la configuration d'utilisation de la pompe, permettant ainsi certaines simplifications.

Courbe caractéristique d'une pompe

Une pompe centrifuge accélère le fluide au moyen d'aubes en rotation. Cet effort centrifuge s'appliquant à la masse du fluide ($F_{\text{centrifuge}} = mr\omega^2$), la pression de refoulement est donc proportionnelle à la masse volumique du fluide. Le fabricant ne connaissant pas le fluide transporté, il trace alors la hauteur (*i.e.*, énergie par unité de poids) en fonction du débit. La charge H_m , fournie par la pompe, tracée en fonction du débit Q , constitue la **courbe caractéristique de la pompe** pour une vitesse de rotation fixée (Fig. 2.14). F est le point pour lequel le débit est nul, il est appelé point à vanne fermée ou point de barbotage. Le fonctionnement en ce point est sans danger s'il ne se prolonge pas trop, le risque étant l'échauffement de la pompe car le liquide n'évacue plus la chaleur. La forme de courbe illustrée sur la figure 2.14.b est observée sur les pompes ayant une faible vitesse spécifique.

Couplage des pompes

Les associations en série ou en parallèle sont fréquentes car elles permettent de créer une pompe fictive équivalente avec des performances modulables. Lorsque les pompes sont placées en série (Fig. 2.15), la première pompe seule aspire dans un puits, elle refoule dans l'aspiration de la seconde et ainsi de suite jusqu'à la dernière qui refoule au niveau désiré. Dans ce cas, le même débit traverse toutes les pompes, mais les pressions s'ajoutent et la caractéristique de l'ensemble des pompes correspond alors à l'addition des hauteurs manométriques (Fig. 2.16). Lorsque les pompes sont placées cette fois-ci en parallèle (Fig. 2.15.c), les hauteurs délivrées par les pompes sont identiques et les débits s'ajoutent (Fig. 2.16).

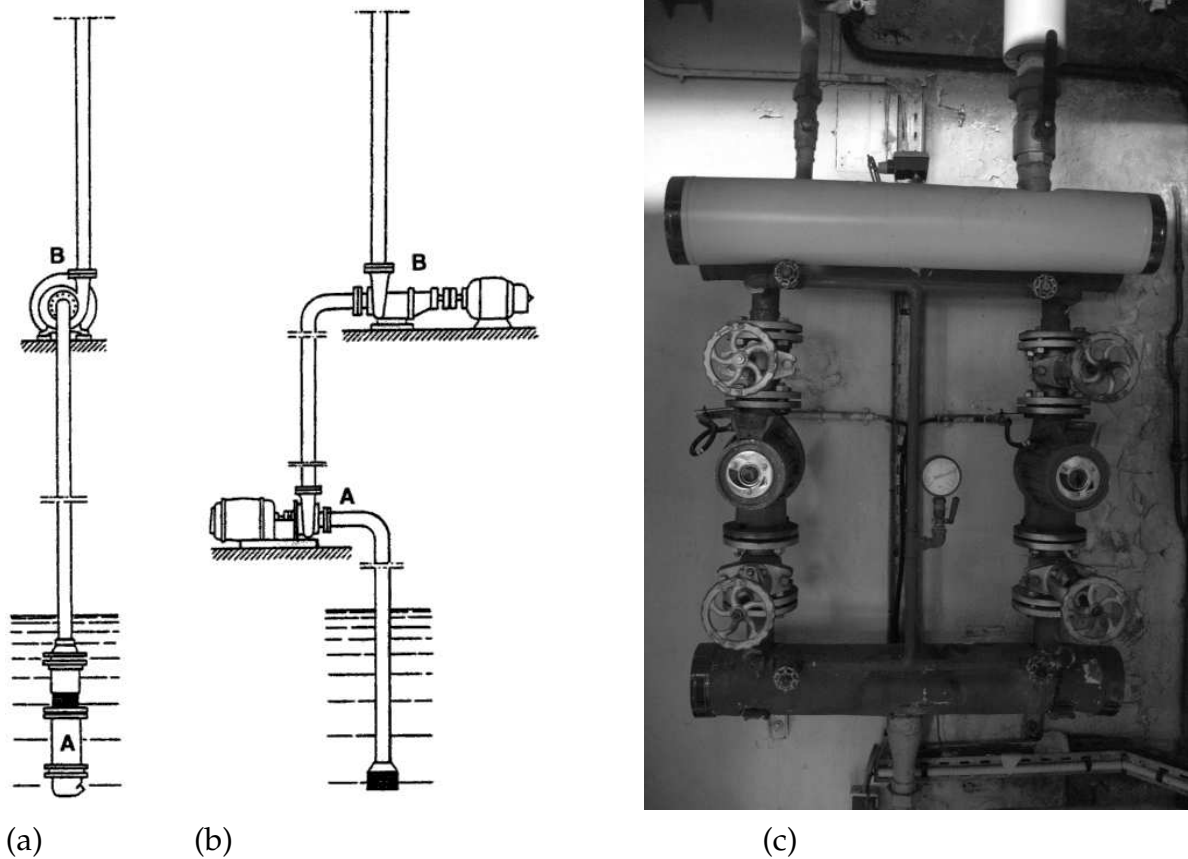


FIGURE 2.15 Couplage de deux pompes en série (a, couplage en série d'une pompe immergée et d'une pompe de surface ; b, couplage en série de deux pompes de surface), d'après Duclos [19] ; c, Couplage de deux pompes en parallèle (chaufferie ECAM).

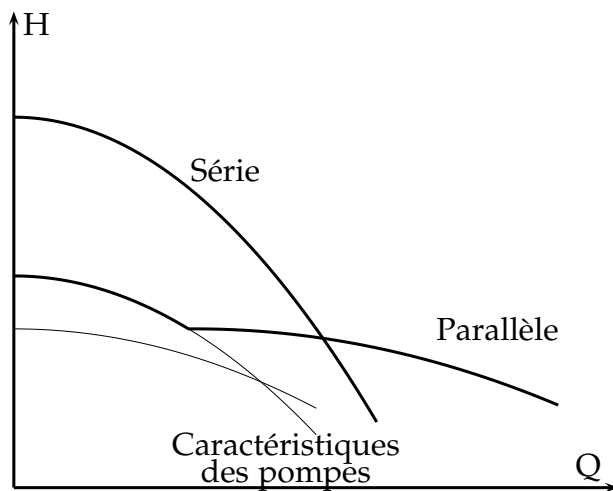


FIGURE 2.16 Configurations de deux pompes (série et parallèle).

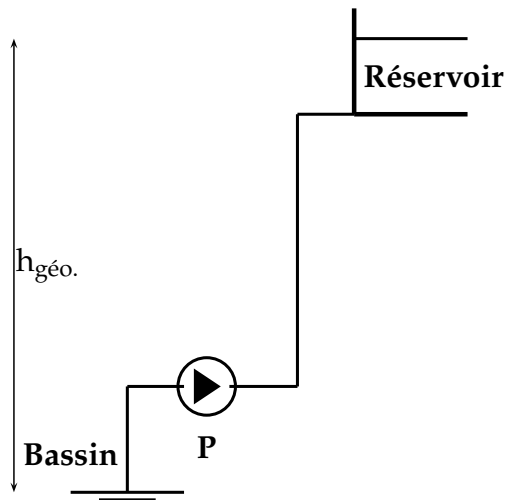


FIGURE 2.17 Réseau hydraulique comprenant des conduites d'aspiration et de refoulement traversées par le même débit.

2.5.2 Courbe caractéristique d'un circuit hydraulique

À l'opposé de la courbe caractéristique du système d'alimentation, le réseau à alimenter est lui aussi caractérisé par une courbe sur le graphe de résolution. On appelle **courbe caractéristique d'un circuit hydraulique** (H_c) la charge nécessaire au fluide pour pouvoir y circuler. Cette charge devra compenser d'une part les différences d'altitude entre les surfaces libres des bassins et des réservoirs à alimenter (placés généralement à une altitude supérieure), et d'autre part les pertes de charge liées à l'écoulement dans les conduites. La courbe du réseau sera obtenue généralement de façon graphique et sera d'autant plus complexe que le circuit hydraulique fera apparaître des branches différentes placées en parallèle ou en série, et alimentant des réservoirs localisés à des altitudes différentes.

Réseau hydraulique simple

Dans le cas *simple* d'un réseau pourvu d'un bassin d'alimentation et d'un réservoir à atteindre caractérisés tous deux par des surfaces libres sur lesquelles règne une pression atmosphérique (Fig. 2.17), la courbe du réseau est exprimée de façon générale par la relation :

$$H_c = h_{\text{géo}} + \lambda \frac{8L_{\text{Tot.}}}{\pi^2 g D^5} Q^2$$

où $h_{\text{géo}}$ représente la différence d'altitude des deux surfaces libres placées aux extrémités du réseau, et $L_{\text{Tot.}}$ représente la longueur équivalente totale des conduites d'aspiration et de refoulement (*i.e.* $L_{\text{Tot.}} = L_{\text{Asp.}} + L_{\text{Ref.}}$). Cette addition est évidemment possible car les deux conduites sont traversées par le même débit. Si on considère par exemple le réseau schématisé sur la figure 2.12, les conduites n'étant pas toutes traversées par le même débit on ne peut pas considérer la longueur totale comme étant la somme des longueurs de toutes les conduites. Le tracé de la courbe de réseau, plus complexe, est obtenu en considérant les courbes des conduites de façon individuelle et de les additionner de façon cohérente selon leur agencement.

Comment obtenir la courbe du réseau hydraulique ?

L'obtention de la courbe d'un réseau hydraulique complexe à alimenter est effectuée la plupart du temps à partir d'une méthode graphique. Celle-ci vise dans un premier temps à décomposer le réseau en plusieurs branches placées en série ou en parallèle les unes par rapport aux autres. Chacune de ces branches étant caractérisée par une courbe, la courbe totale est atteinte en effectuant des additions de débits ou de hauteurs selon la configuration des conduites entre elles. En effet, lorsque deux conduites sont placées en parallèle, le débit entrant dans la dérivation se divise en deux débits de telle sorte que les pertes de charge dans les deux conduites soient identiques. La courbe résultante est ainsi atteinte par l'addition de débits traversant les deux conduites pour des valeurs de pertes de charge fixes (Fig. 2.18.a). Par contre lorsque deux conduites sont placées en série, elles sont toutes deux traversées par des débits identiques, les pertes de charges s'accumulent alors. La courbe résultante est obtenue en considérant différents débits, et en additionnant les pertes de charge des deux conduites (Fig. 2.18.b).

L'assemblage des courbes caractéristiques de chaque conduite nécessite une bonne analyse du réseau — qu'il ne faut pas négliger — à partir du schéma.

Prise en compte des altitudes des bassins d'alimentation et des réservoirs

Une pompe est dans certains cas utilisée pour élever de l'eau d'une altitude "basse" vers une altitude plus haute. La différence d'altitude est généralement prise en compte dans le tracé des caractéristiques des conduites débouchant sur les réservoirs à l'aide du terme $h_{\text{géo}}$ vu plus haut. Dans le cas d'un unique bassin ou lorsque plusieurs bassins dont les surfaces libres sont toutes localisées à la même altitude sont présents, les courbes caractéristiques des réservoirs à alimenter démarreront alors sur le graphe à une ordonnée correspondant à la différence d'altitude des bassins et du réservoir. Prenons l'exemple illustré sur la figure 2.19. L'eau y est pompée d'un unique bassin dont la surface libre est localisée à une altitude de 4 m (par rapport au niveau de la mer) pour y être transportée jusqu'à un réservoir par une conduite dont le point le plus haut est placée à une altitude de 20 m. La pompe doit alors fournir au minimum une charge égale à la différence d'altitude, soit 16 m ici, pour vaincre les effets de la pesanteur. En plus de cela, elle doit fournir une charge supplémentaire pour équilibrer les pertes de charge du réseau. La courbe caractéristique est alors une parabole ascendante.

La figure 2.20 illustre le cas d'une alimentation de deux réservoirs dont les points les plus hauts à alimenter sont égaux à 16 m pour le premier et 20 m pour le deuxième. Les deux bassins ont tous deux des surfaces libres situées à une altitude égale à 4 m. Les différences d'altitudes entre les surfaces libres des deux réservoirs et les bassins n'étant pas identiques, les deux courbes caractéristiques démarreront à des ordonnées décalées, 12 m et 16 m.

Notons bien que les deux cas précédents ne considèrent que les conduites débouchant sur le(s) réservoir(s). Il faut d'autre part considérer les caractéristiques des autres conduites du circuit pour compléter la résolution.

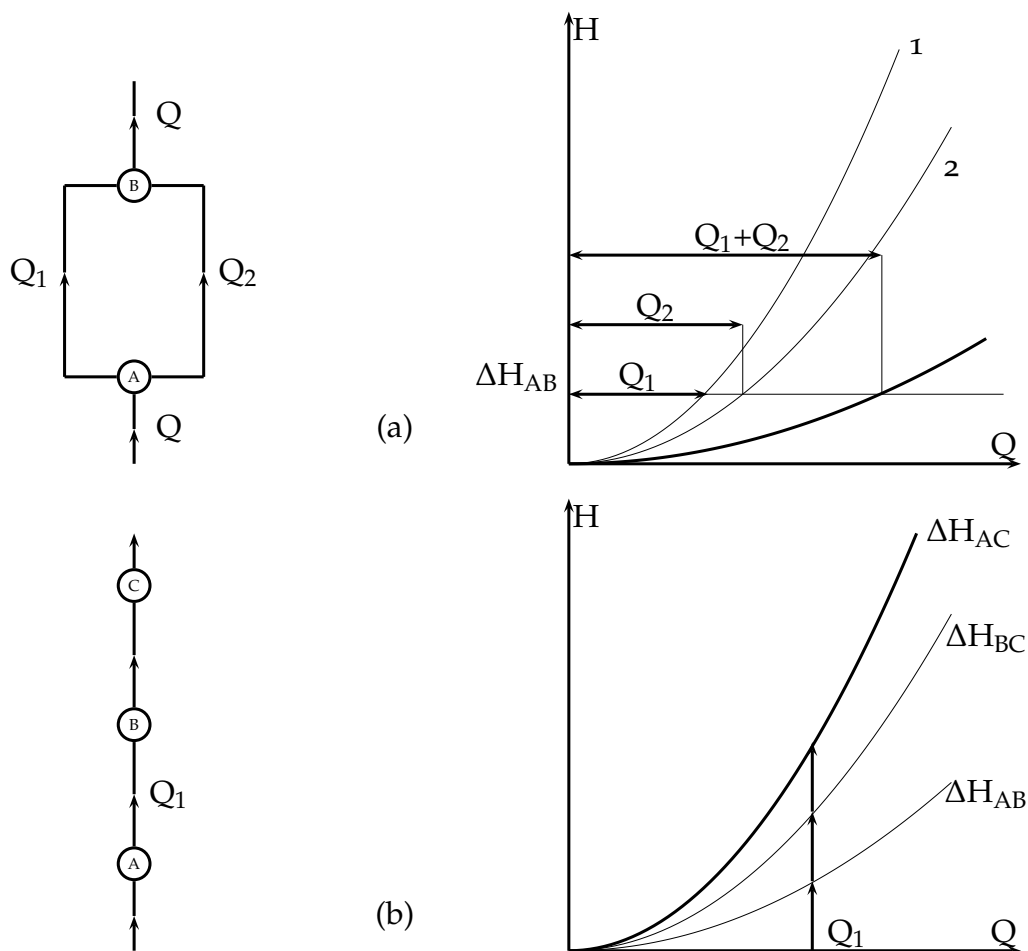


FIGURE 2.18 Courbes caractéristiques résultantes de conduites placées en parallèle (a) ou en série (b). Lorsque les conduites sont disposées en parallèle, pour différentes valeurs de pertes de charge, la courbe résultante est atteinte par addition des débits traversant chaque conduite; lorsque les conduites sont disposées en série, pour des différentes valeurs de débits, on additionne les pertes de charge.

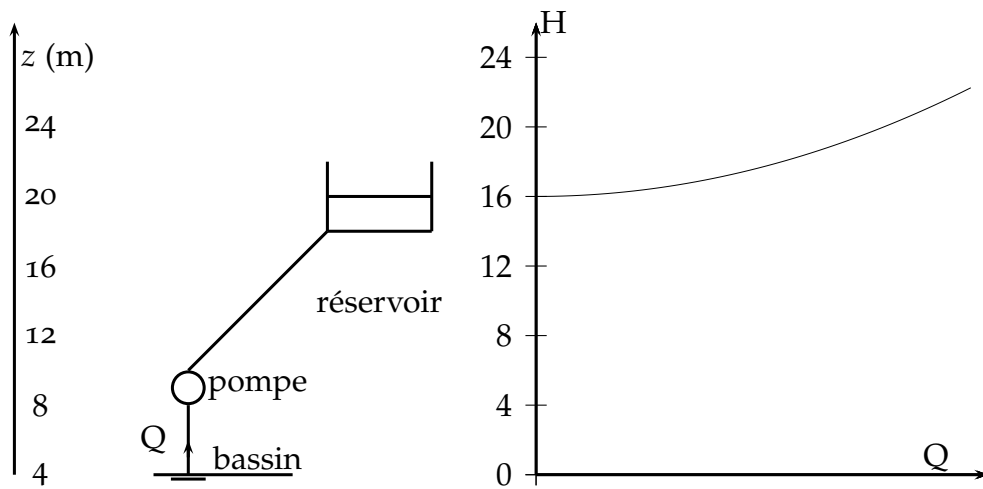


FIGURE 2.19 Prise en compte de la différence d'altitude entre le bassin d'alimentation et le réservoir. À gauche, le réseau à alimenter ; à droite, la courbe caractéristique de la conduite débouchant sur le réservoir.

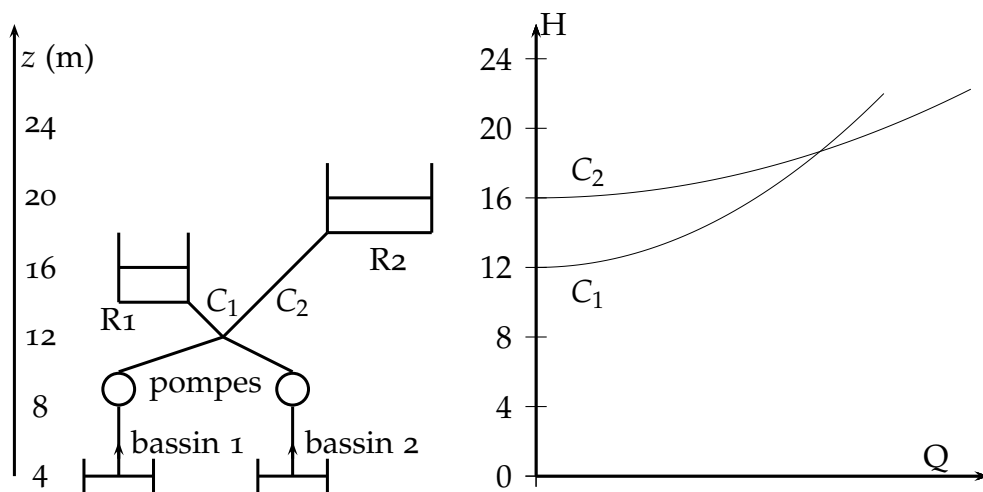


FIGURE 2.20 Prise en compte de la différence d'altitude entre plusieurs bassins d'alimentation dont les surfaces libres sont toutes localisées à la même altitude et plusieurs réservoirs. À gauche, le réseau à alimenter ; à droite, les courbes caractéristiques des conduites débouchant sur les réservoirs.

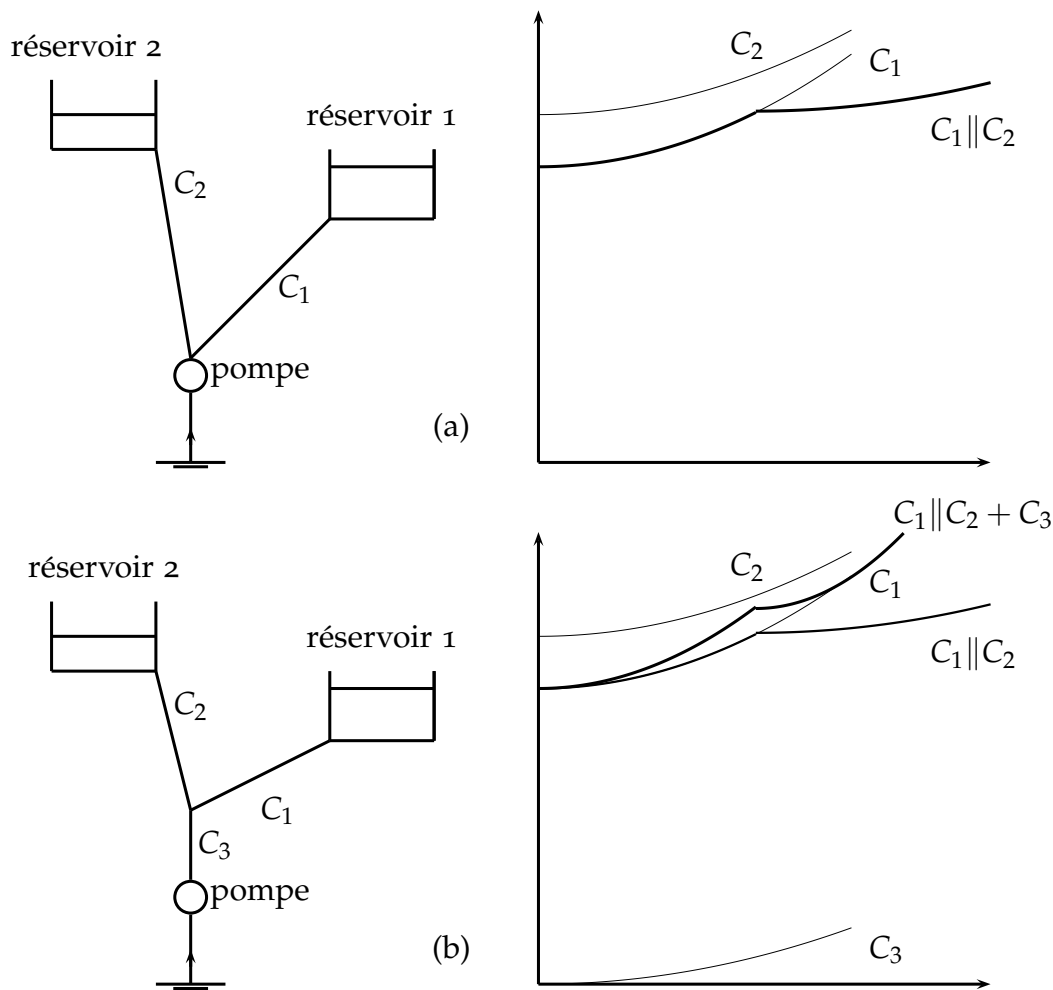


FIGURE 2.21 Courbes caractéristiques de réseaux hydrauliques. a, deux conduites C_1 et C_2 en parallèle ; b, deux conduites C_1 et C_2 en parallèle et toutes deux en série avec une troisième conduite C_3 . Dans ces exemples, les pertes de charge à l'aspiration sont négligées.

Les termes d'altitudes ayant été pris en compte par ce biais, les autres courbes ne devront pas les considérer. La courbe caractéristique d'une conduite localisée à l'intérieur du réseau (c'est à dire non placée aux extrémités du réseau) pourra démarrer à l'origine du repère (Q,H) (voir plus bas).

Courbe résultante de plusieurs réservoirs à alimenter

Il convient ici dans une première étape de tracer les courbes caractéristiques de chacune des conduites véhiculant le liquide jusqu'aux réservoirs comme il a été montré dans le paragraphe précédent. Il reste ensuite pour l'utilisateur à retrouver la courbe résultante de l'ensemble de ces courbes à partir des précédentes courbes. Ceci est illustré sur la figure 2.21.a avec deux réservoirs à alimenter étant situés à des altitudes différentes, la courbe résultante notée $C_1 || C_2$ étant tracée en gras.

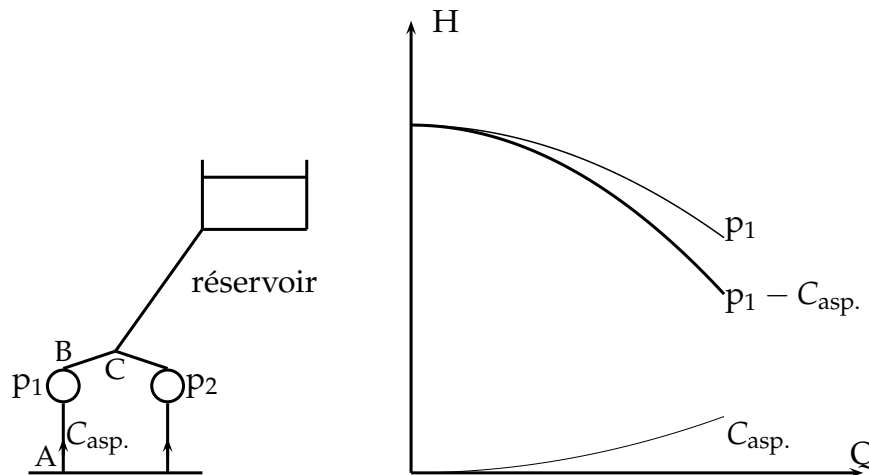


FIGURE 2.22 Courbes caractéristiques d'une conduite AC composée d'une pompe et de sa conduite d'aspiration (Les pertes de charge dans la conduite BC sont négligées). Les autres parties du réseau ne sont pas tracées.

Courbes caractéristiques de conduites placées à l'intérieur du réseau

Il s'agit ici de conduites placées au milieu du réseau et donc éloignées des extrémités. Elles seront alors caractérisées uniquement par un terme de pertes de charge. En effet, même si elles sont situées à des altitudes non nulles par rapport au plan de référence, le terme d'altitude sera pris en compte dans les caractéristiques des conduites alimentant les réservoirs (voir plus haut). Ceci est illustré sur la figure 2.21.b avec la conduite C_3 placée dans le refoulement de la pompe. La courbe caractéristique est tracée à partir de l'origine et ne fait intervenir que ses pertes de charge. Dans ce cas précis, après avoir tracé la courbe résultante des deux conduites desservant les réservoirs, notée $C_1 || C_2$, on ajoute les pertes de charge de la conduite C_3 .

Courbes de conduites d'aspiration des pompes

Il convient d'être vigilant quant à l'utilisation des courbes caractérisant l'aspiration des pompes. Il existe en effet deux cas et ainsi deux types de tracé. (1) Si le réseau ne fait apparaître qu'une "unique" conduite (*i.e.*, aspiration/refoulement/réservoir, Fig. 2.19), alors les pertes de charge cédées dans la conduite d'aspiration peuvent être ajoutées à celles du reste du circuit, les débits des conduites étant identiques. (2) Dans le cas d'un système de pompage composé de pompes (et leur conduite d'aspiration) placées en parallèle, deux démarches sont possibles. (2.a) On peut retrancher les pertes de charge de l'aspiration à la charge délivrée par la pompe, afin d'obtenir une courbe caractéristique du système d'alimentation composé de la pompe et de sa conduite d'aspiration. (2.b) On peut tracer la courbe caractéristique des deux conduites d'aspiration en parallèle, celle-ci étant placée ensuite en série avec le reste du circuit. La solution (2.a) est illustrée sur la figure 2.22. Dans le cas où les pertes de charge de la conduite de refoulement (BC) ne sont plus négligeables, il est alors nécessaire de les prendre en compte. Ce cas n'a pas été considéré sur la figure 2.22 pour des raisons de clarté de l'exposé.

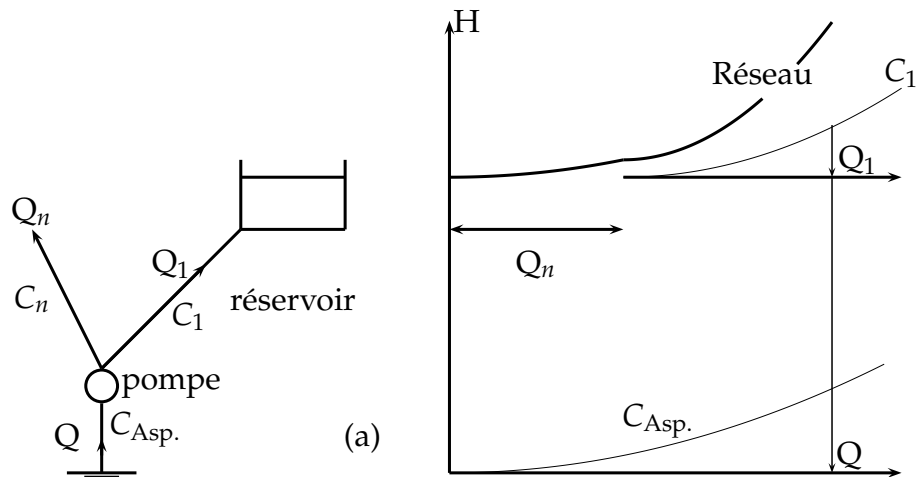


FIGURE 2.23 Réseau présentant un débit de fuite imposé dans une conduite (La courbe "Réseau" correspond aux conduites $C_{Asp.}$ et C_1).

Réseau hydraulique avec des débits de fuite

Il est parfois nécessaire qu'une conduite délivre un débit imposé (dans le cas d'un échangeur thermique par exemple). Les conduites ayant en commun ce point de jonction sont donc placées parallèlement à la première. L'ajout de l'ensemble des pertes de charge cédées à toutes les conduites du problème doit être effectué méthodiquement dès lors qu'elles ne sont plus traversées par des débits identiques.

Ceci est illustré sur la figure 2.23. Une vanne de la conduite C_n est ouverte de telle sorte que celle-ci délivre un débit Q_n . La conduite C_1 est alors traversée par un débit différent de celui présent à l'aspiration de la pompe. On ne peut donc pas ajouter de façon triviale les pertes de charge à l'aspiration avec celles de la conduite C_1 . Ceci peut être fait à partir du moment où on additionne des pertes de charge à l'aspiration au débit Q avec des pertes de charge dans la conduite C_1 au débit $Q - Q_n$, soit Q_1 . Une addition des pertes de charge est alors possible graphiquement dès lors que l'on translate la courbe de C_1 vers les débits positifs d'une valeur égale au débit de fuite.

Présence d'un réservoir d'air comprimé

Certaines installations disposent d'un réservoir d'air comprimé qu'il convient de tenir compte de façon réfléchie dans la résolution graphique. Si l'air comprimé est une aide pour une pompe à mettre le fluide en mouvement (Figure 2.24.a) ou s'il est présent dans un réservoir à remplir (Figure 2.24.b), la stratégie à adopter sera différente. Posons p_s la pression présente dans le réservoir et considérons pour simplifier le problème une pression atmosphérique régnant sur la surface libre du bassin d'alimentation ou du réservoir à alimenter. Lorsque l'air comprimé est en appui à la pompe, il faudra ajouter à la courbe caractéristique de cette dernière la quantité $(p_s - p_{atm.})/\rho g$. On obtient alors la courbe du système alimentant "pompe + réservoir". Au contraire lorsque l'air comprimé est présent dans une cuve à remplir, il s'agit alors d'une quantité à contraindre. De ce fait, on ajoutera à la courbe du réseau le terme $(p_s - p_{atm.})/\rho g$ en plus des termes d'altitude et de pertes de charge.

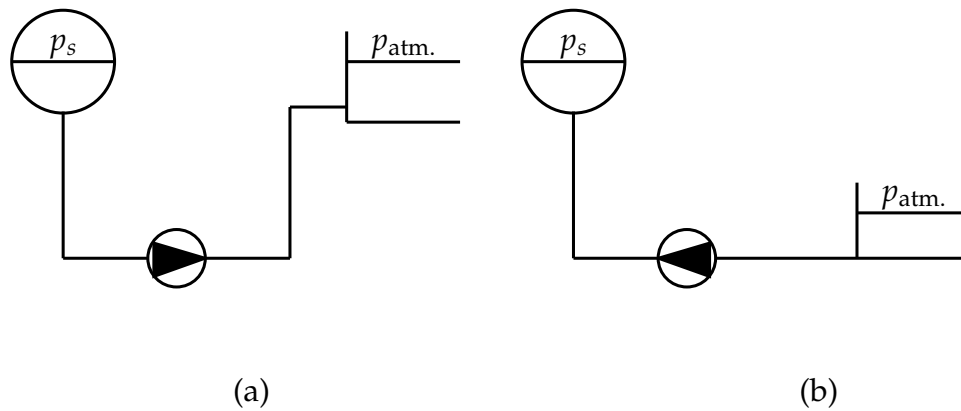


FIGURE 2.24 Collecteur en appui d'une pompe (a) et collecteur à remplir (b).

2.5.3 Point de fonctionnement

Définition : Lorsqu'une pompe opère dans des conditions fixes, l'énergie transmise au liquide est équilibrée par la résistance du circuit au passage du fluide. La pompe opère alors à un point particulier appelé **point de fonctionnement**, intersection de la caractéristique de la courbe de réseau et la courbe du générateur de hauteur.

Dans beaucoup de problèmes, plusieurs pompes sont nécessaires à satisfaire les conditions souhaitées. Dans ce cas, on tracera une première courbe représentant le système "alimentant" et une autre courbe représentant le système "à alimenter". Il restera néanmoins à l'utilisateur à retrouver les points de fonctionnement de chacune des pompes afin d'estimer leur puissance consommée.

Dans la pratique, on choisit une pompe pour qu'elle fournisse un débit à une pression donnée (que l'on convertit en hauteur). La pompe et le circuit étant caractérisés par leurs courbes, on choisira la pompe la plus proche du point de fonctionnement souhaité. Si celui-ci est trop éloigné des caractéristiques de notre pompe, on peut alors soit utiliser une pompe "surdimensionnée" (*i.e.*, délivrant un débit trop important) et introduire une vanne dans le circuit permettant d'introduire une nouvelle perte de charge et baisser ainsi le débit. Une autre solution est de rogner les aubes de la pompe (Cf. paragraphe 2.8.1). Cette opération est possible sur la plupart des pompes, c'est pourquoi les constructeurs de pompes associent non pas une courbe mais une zone de hauteur, définissant alors une plage d'utilisation (Fig. 2.32).

Exemple : Considérons le circuit d'alimentation d'un bassin en altitude à partir d'un réservoir (figure 2.25.a). L'intersection des courbes caractéristiques de la pompe et du circuit donne le point de fonctionnement (figure 2.25.b).

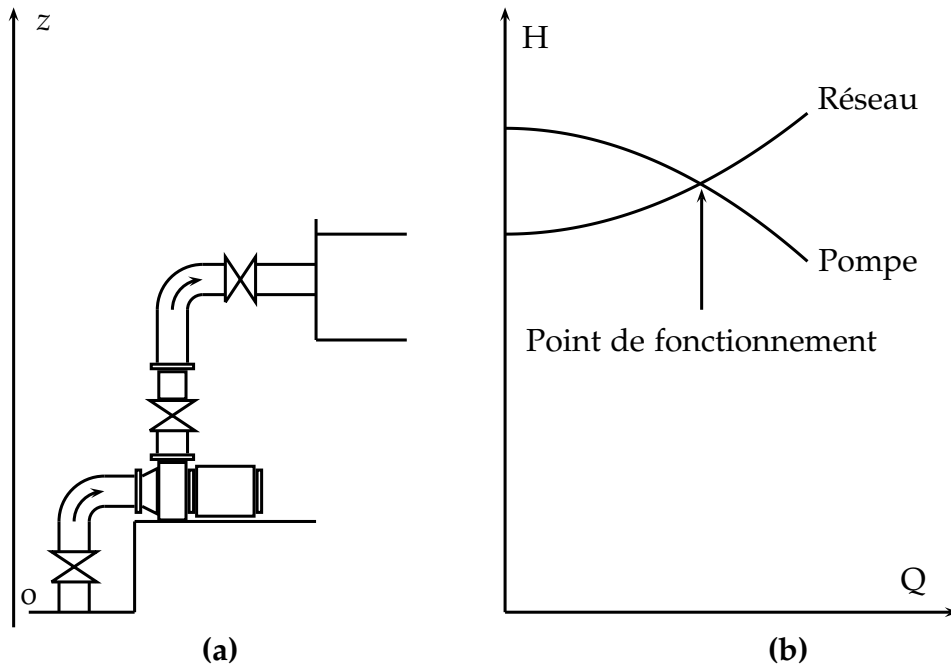


FIGURE 2.25 Alimentation d'un bassin (a) - Point de fonctionnement (b).

Comment une vanne peut-elle réguler un débit ?

Une vanne est insérée dans le dispositif d'alimentation de la figure 2.25.a. Si on obture la section de passage de l'écoulement en refermant cette vanne, les pertes de charge augmentent. La courbe caractéristique du réseau se redresse alors, entraînant ainsi un déplacement du point de fonctionnement vers des débits plus faibles. Une fermeture complète de la vanne génère des pertes de charge infinies et un débit nul.

2.5.4 Estimation du point de fonctionnement à partir de deux approches différentes

Le texte plus haut mentionne le fait que le point de fonctionnement du système est obtenu à partir de l'intersection de deux courbes, les courbes du système alimentant et du système à alimenter. Il n'y a pas une façon unique de tracer ces courbes, et il faut alors adapter la façon d'estimer le point de fonctionnement de la pompe en fonction de l'approche utilisée. Par exemple, les conduites d'aspiration peuvent être prises en compte soit dans la première courbe, en retranchant dans ce cas leurs pertes de charge à la charge fournie par la pompe, soit dans la courbe du système à alimenter, en ajoutant ces pertes de charge à celles du reste du circuit de façon adaptée à la configuration du réseau (en d'autres mots, pas n'importe comment...). Au final, il faut que, quelle que soit votre approche, le point de vue énergétique soit cohérent. On n'ajoutera jamais par exemple des pertes de charge à la charge délivrée par une pompe.

Nous allons voir sur un réseau très simple deux méthodes pour retrouver le point de fonctionnement d'une pompe. Considérons pour cela le réseau hydraulique illustré

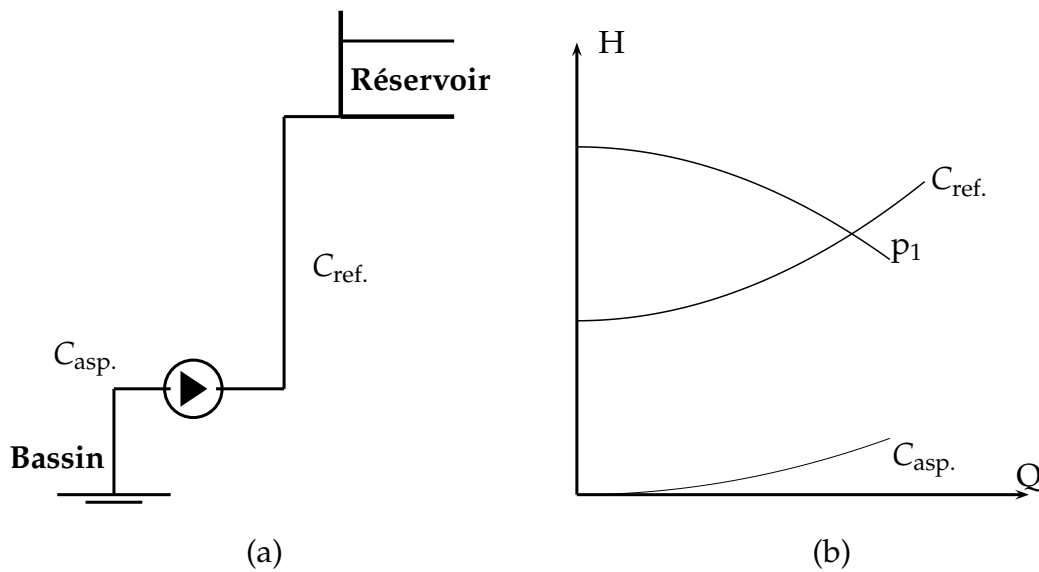


FIGURE 2.26 a, réseau hydraulique de l'estimation du point de fonctionnement d'une pompe à partir de deux approches différentes ; b, courbes caractéristiques des conduites d'aspiration et de refoulement, et de la pompe.

sur la figure 2.26.a caractérisé par des conduites d'aspiration et de refoulement dont on ne pourra pas négliger les pertes de charge. L'écoulement créé par la pompe alimente un réservoir situé à une altitude plus élevée que le plan de pompage. Toutes les courbes des conduites du réseau sont illustrées sur la figure 2.26.b.

Les deux approches permettant d'estimer le point de fonctionnement de la pompe sont illustrées sur la figure 2.27. Dans le cas (a), le système alimentant est composé de la pompe et de sa conduite d'aspiration. Les pertes de charges correspondant à une dissipation irréversible de l'énergie de l'écoulement, celles-ci sont donc ôtées de la charge délivrée par la pompe. Le système à alimenter est composé alors de la conduite de refoulement seule. Le point d'intersection entre les courbes des deux systèmes, tracées en gras, correspond au point de fonctionnement du système. On trouve le point de fonctionnement de la pompe, en ajoutant à partir de ce point les pertes de charges de l'aspiration (*i.e.* on se déplace sur une droite de débit constant jusqu'à atteindre la courbe caractéristique de la pompe). La deuxième approche, illustrée sur la figure 2.27.b, propose de composer le système à alimenter des conduites d'aspiration et de refoulement. Les deux conduites sont traversées par le même débit, on additionne alors les pertes de charge. Le système alimentant est dans ce cas caractérisé seulement par la courbe de la pompe. Cette fois, le point de fonctionnement est directement estimé par l'intersection des deux courbes.

2.5.5 Exemple complet

Deux réservoirs R et R' situés à des altitudes respectivement égales à 30 m et 35 m sont alimentés par un réseau hydraulique composé de deux pompes prélevant de l'eau à partir de deux bassins différents (B1 et B2) situés à la même altitude de 20 m.

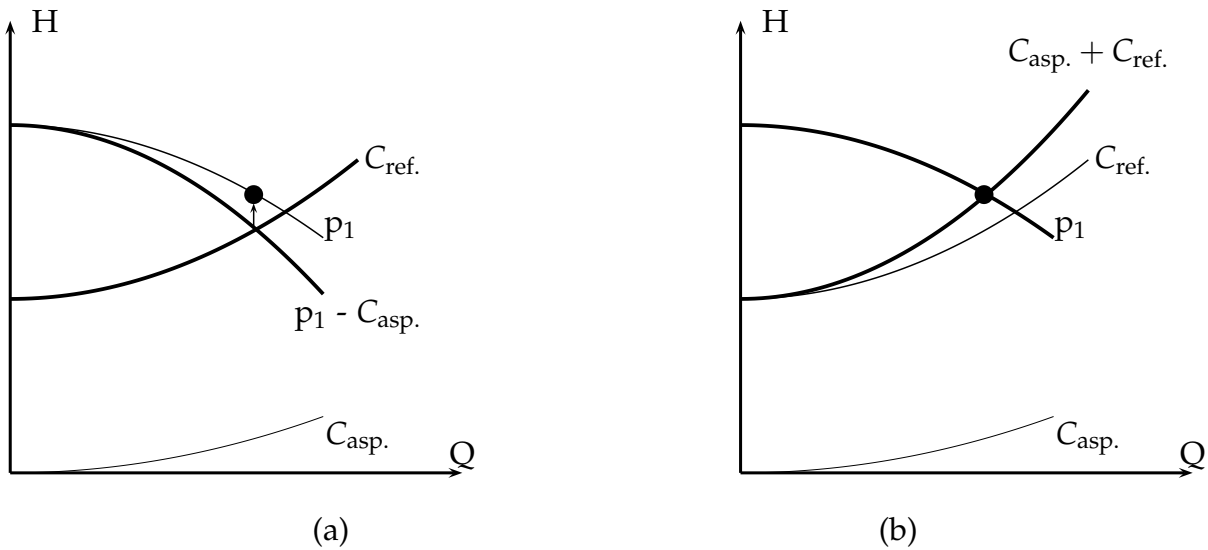


FIGURE 2.27 Détermination du point de fonctionnement de la pompe utilisée dans le réseau hydraulique de la figure 2.26 à partir de deux méthodes. a, la courbe du système alimentant est construite en enlevant les pertes de charge de la conduite d'aspiration de la charge délivrée par la pompe, et la courbe du système à alimenter correspond à la courbe caractéristique de la conduite de refoulement ; b, la courbe du système alimentant correspond à la courbe seule de la pompe, et le système à alimenter correspond aux pertes de charge des conduites d'aspiration et de refoulement. Dans les deux approches, on retrouve les mêmes points de fonctionnement de la pompe (•).

Les deux pompes sont reliées à leur bassin par des conduites d'aspiration dont on ne pourra pas négliger les pertes de charge. La collecte du débit est réalisée au point D placé aux extrémités des conduites de refoulement des deux pompes. Les pertes de charge de ces dernières seront négligées. Le débit collecté est divisé en deux pour alimenter des conduites, C_R et $C_{R'}$, pour atteindre les deux réservoirs. Un schéma de ce réseau est donné sur la figure 2.28.

Les conduites du réseau sont toutes identiques à l'exception de leur longueur (Tab. 2.4). Le coefficient de perte de charge de ce type de conduite vaut $\lambda = 0,045$ et le diamètre $D = 300$ mm.

$C_{Asp,1}$	$C_{Asp,2}$	C_R	$C_{R'}$
10	15	100	150

Tableau 2.4 Longueur des conduites (m) de l'exemple complet.

Le but de cette application est d'une part d'estimer les caractéristiques de fonctionnement des deux pompes (*i.e.* débit et hauteur) et d'autre part évaluer les débits traversant les conduites alimentant les réservoirs.

Solution - Tracé des courbes des systèmes alimentant et à alimenter

La première étape consiste à observer attentivement le réseau hydraulique afin de le décomposer, et d'associer de façon cohérente les courbes caractéristiques des

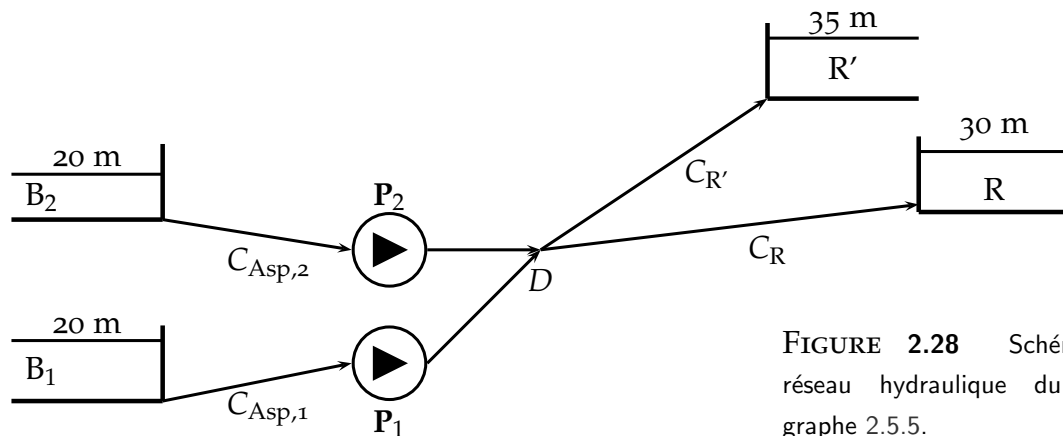


FIGURE 2.28 Schéma du réseau hydraulique du paragraphe 2.5.5.

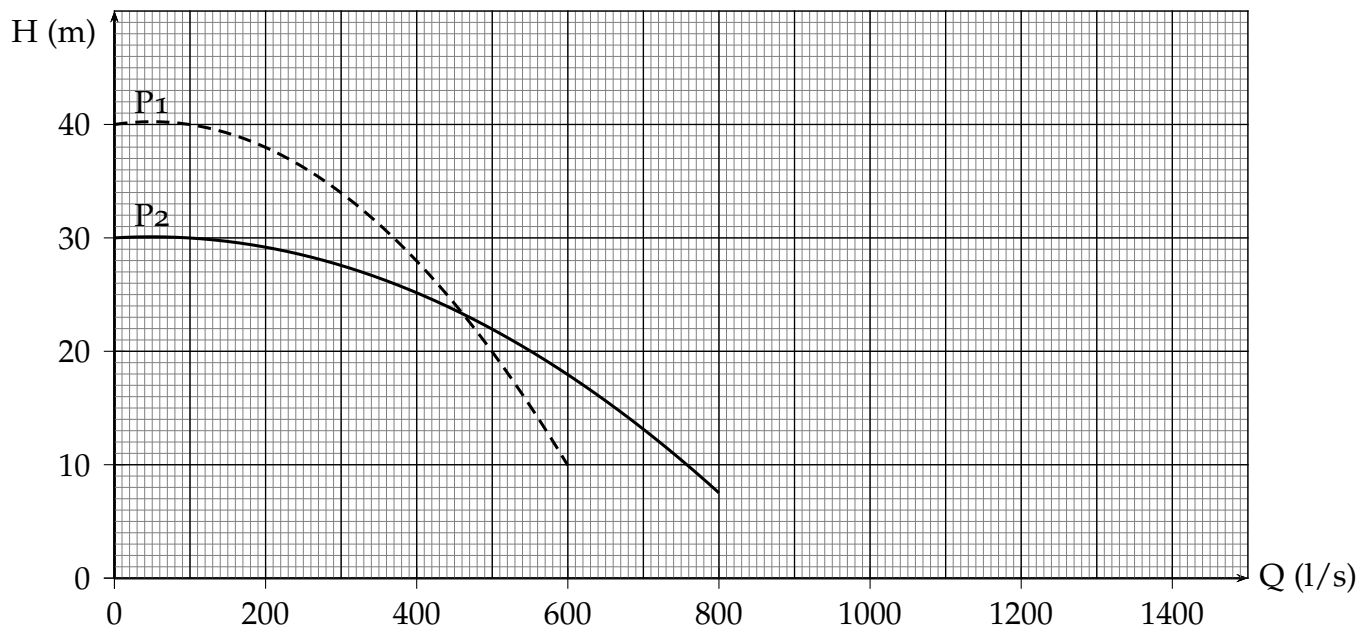


FIGURE 2.29 Courbes caractéristiques des pompes de l'exemple complet (paragraphe 2.5.5).

différents éléments. À partir de la formulation des pertes de charge dans les conduites, et des caractéristiques des conduites de l'exemple, on estime leur formulation (Tab. 2.5). L'évolution de ces pertes de charge peut être tracée en n'oubliant pas de faire intervenir les différences des altitudes entre les surfaces libres des réservoirs et celles des bassins.

Les deux conduites d'aspiration sont placées en parallèle, ainsi que les deux conduites alimentant les réservoirs. Dans ces deux cas, les débits sont additionnés pour des termes de hauteur identiques. Les courbes " $\Delta H_{asp.,1//2}$ " et " $C_R//C_{R'}$ " sont ainsi tracées. Enfin, le groupe constitué par les conduite d'aspiration et le groupe des conduites des réservoir sont placées en série. Dans ce cas les termes des pertes de charge sont additionnés pour des débits identiques pour obtenir la courbe " $\Delta H_{asp.,1//2} + C_R // C_{R'}$ " représentant le système à alimenter.

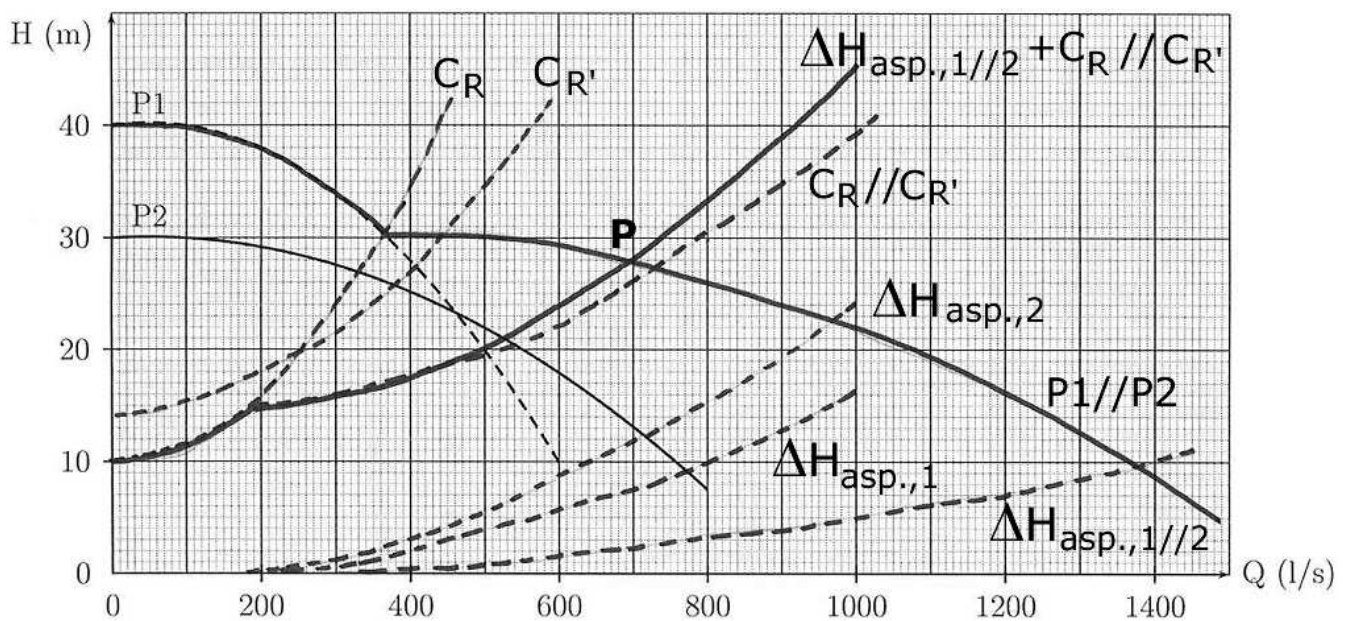
Les deux pompes étant placées en parallèle, la courbe caractéristique de l'ensemble

$\frac{C_{Asp,1}}{15,3 \times Q^2}$	$\frac{C_{Asp,2}}{23 \times Q^2}$	$\frac{C_R}{153 \times Q^2}$	$\frac{C_R}{76,5 \times Q^2}$
-------------------------------------	-----------------------------------	------------------------------	-------------------------------

Tableau 2.5 Pertes de charge des conduites (m) de l'exemple complet.

est obtenue encore une fois par l'addition des débits pour des charges manométriques identiques, "P1//P2".

L'ensemble de ces courbes est tracé sur la figure 2.30. Les points de fonctionnement des deux pompes, ainsi que les débits observés dans les conduites alimentant les réservoirs peuvent être estimés.

**FIGURE 2.30** Solution graphique de l'exemple complet.

Solution - Estimation des points de fonctionnement des pompes

Le point de fonctionnement du réseau, noté P sur la figure 2.30, obtenu par intersection des courbes alimentant et à alimenter vaut ($Q = 700$ l/s ; $H = 28$ m). Pour estimer les points de fonctionnement des deux pompes, il faut se déplacer à partir de ce point sur une horizontale, les deux pompes étant placées en parallèle. Il vient alors les points de fonctionnement ($Q_1 = 400$ l/s ; $H_1 = 28$ m) et ($Q_2 = 290$ l/s ; $H_2 = 28$ m).

Solution - Estimation des débits des conduites d'alimentation des réservoirs

L'obtention des débits traversant les conduites C_R et $C_{R'}$ est moins directe. En effet, on ne doit pas partir du point de fonctionnement du réseau et se déplacer sur une horizontale car les pertes de charge liées à l'aspiration ne seraient pas prise en compte d'une part, et pas de façon cohérente d'autre part. La stratégie consiste alors à partir du point P, enlever les pertes de charge de l'aspiration en se déplaçant verticalement,

et une fois la courbe " $C_R//C_{R'}$ " atteinte, on se déplace sur une droite horizontale pour retrouver les débits des deux conduites. On trouve $Q_R = 320$ l/s et $Q_{R'} = 380$ l/s. On vérifie, aux erreurs graphiques près, que le débit généré par les deux pompes (*i.e.* $Q_1 + Q_2$) est à peu près égal aux débits alimentant les conduites des réservoirs ($Q_R + Q_{R'}$).

2.5.6 Puissances et rendements

Une pompe est une machine dont le rôle est de fournir de l'énergie à un fluide en vue de son déplacement. Evidemment cette énergie n'est pas entièrement restituée, consécutivement à différentes pertes, affectant ainsi le rendement global de la pompe. Définissons en premier lieu les puissances impliquées dans l'étude des pompes, ce qui nous amènera naturellement vers les rendements.

Puissances

Les puissances impliquées dans l'étude d'une pompe sont (1) la puissance communiquée au fluide ou **puissance utile** ($\mathcal{P}_u = \rho g H_m Q$), (2) la puissance de la pompe ou **puissance hydraulique** ($\mathcal{P}_p = \rho g H_p Q$), (3) la puissance absorbée par la roue ($\mathcal{P}_r = \rho g H_p (Q + q)$), et (4) la puissance absorbée sur l'arbre ($\mathcal{P}_a = C_m \omega$) avec C_m le couple délivré par le moteur entraînant la pompe, q le débit de fuite.

Rendements

Le **rendement de la pompe** ou **rendement global** est le rapport de la puissance communiquée au fluide et de la puissance absorbée sur l'arbre moteur :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_a} = \frac{\rho g H_m Q}{C_m \omega}$$

Ce rendement est donné dans les catalogues des fabricants, et peut être affecté par différentes pertes dans la pompe : (1) les pertes hydrauliques, fonctions du débit, (2) les pertes par fuite s'il existe un débit de fuite q (le débit dans la roue doit être de $Q + q$). Le débit de fuite augmente avec la pression et diminue avec la viscosité. (3) les pertes mécaniques fonctions de la vitesse de rotation. On peut alors décomposer le rendement global :

- **Rendement manométrique** : rapport de la puissance communiquée au fluide et de la puissance de la pompe

$$\begin{aligned} \eta_m &= \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_p} = \frac{\rho g H_m Q}{\rho g H_p Q} = \frac{H_m}{H_p} = \frac{H_p - \Delta H_p}{H_p} \\ &= 1 - \frac{\Delta H_p}{H_p} \end{aligned}$$

Ce rendement caractérise les pertes de la charge internes à la pompe.

- **Rendement volumétrique** : rapport de la puissance de la pompe et de la puissance absorbée par la roue. Ce rendement caractérise les pertes par fuite.

$$\eta_v = \frac{\mathcal{P}_p}{\mathcal{P}_r} = \frac{\rho g H_p Q}{\rho g H_p (Q + q)} = \frac{1}{1 + q/Q} \equiv \frac{Q_{\text{réel}}}{Q_{\text{théorique}}}$$

- **Rendement mécanique** : rapport de la puissance absorbée par la roue et de la puissance du moteur.

$$\eta_{\text{méca}} = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_a} = \frac{\rho g H_p (Q + q)}{C_m \omega}$$

Le rendement global peut dès lors s'écrire $\eta = \eta_m \times \eta_v \times \eta_{\text{méca}}$ avec un rendement caractéristique des performances internes à la pompe ($\eta_m \times \eta_v$), et un rendement lié à la partie externe à la pompe ($\eta_{\text{méca}}$). Pour des débits nuls, aucune puissance n'est communiquée au fluide ($\mathcal{P}_u = 0$) et pour un débit très important la puissance utile est nulle car les pertes de charge sont trop importantes. Finalement, la courbe de rendement a une allure en cloche. La pompe devra travailler évidemment dans des conditions pour lesquelles le rendement est maximum, afin entre autre de baisser les coûts d'utilisation. Ce dernier aspect est important et à ne pas négliger car les pompes consomment près de 20 % de l'énergie électrique utilisée par l'industrie [23]. Un abaissement de la puissance consommée peut être atteint par amélioration de la pompe elle-même mais aussi par le moteur associé.

Forme de la courbe de rendement

L'avantage d'un rendement élevé est le coût de la hauteur fournie au fluide. On estime que le gain obtenu sur une année à partir d'une augmentation du rendement de l'ordre de 3% est équivalent au prix de la pompe. Le gain monétaire n'est pas la seule raison d'une utilisation sur un rendement élevé. Pour ce rendement, la puissance à apporter est plus faible. Le moteur associé à la pompe est donc très peu encombrant. D'autre part, une courbe de rendement caractérisée par un pic n'est pas forcément souhaitable dans toutes les configurations. Prenons le cas de deux pompes caractérisées par la même courbe HQ et des courbes de rendement différentes (Fig. 2.31). Elles fonctionnent toutes deux au débit de fonctionnement Q_f , et au même rendement. Le rendement maximum de la pompe 1, placé à un débit inférieur, est supérieur à celui de la pompe 2. Néanmoins, la pompe 1 n'est pas forcément la pompe optimale. En effet, une pompe ne fonctionne que très rarement sur un point de fonctionnement fixe. Si la pompe est amenée à travailler entre les débits Q_b et Q_d , la pompe 1 sera inadaptée car certains rendements sont trop faibles dans cette gamme de débit. Si maintenant la gamme de débit est située entre Q_a et Q_c , l'utilisation de cette même pompe est préférable.

2.5.7 Choix d'une pompe

Le choix d'une pompe pour une application est extrêmement important pour l'obtention d'un rendement global élevé et une sûreté du système de pompage. Ce choix est

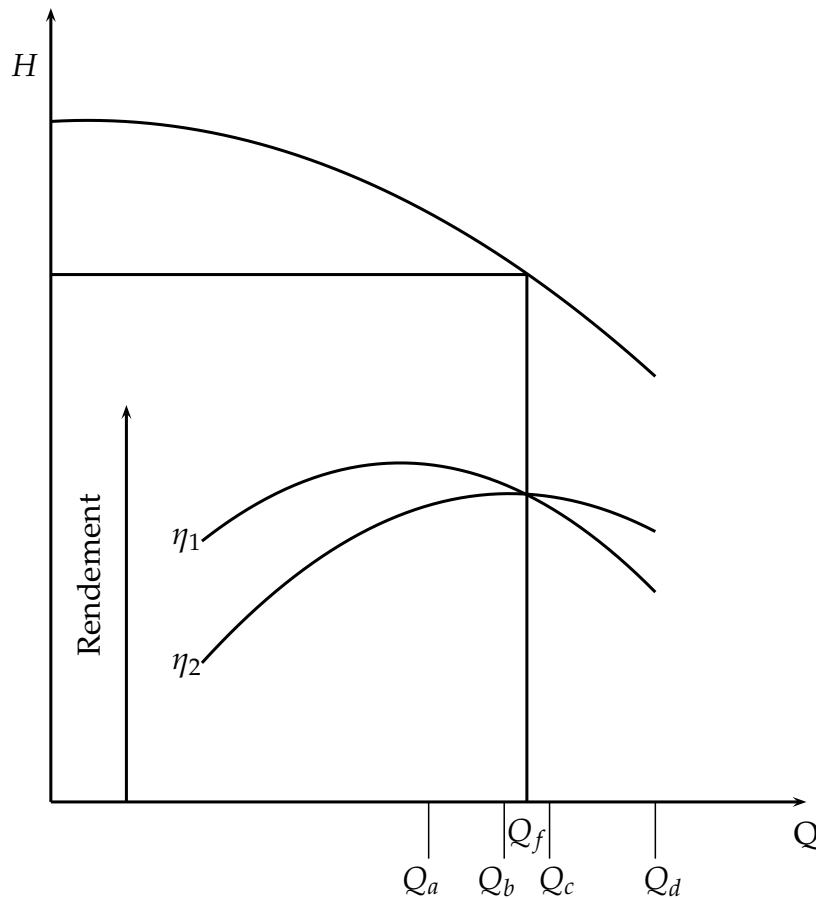


FIGURE 2.31 Relation entre la forme de la courbe de rendement et la gamme de débit de fonctionnement d'une pompe centrifuge.

basé sur différents critères que l'on cherche à respecter au mieux. La ligne directrice aidant l'utilisateur à faire ce choix est détaillé ci-dessous.

Le débit : celui-ci est spécifié par le responsable du projet et découle des besoins simultanés à assurer (besoins domestiques, appareils à alimenter, puissance calorifique d'une installation de chauffage dont la chute de température est fixée,...). Malgré le fait que les statistiques (Tableau 2.6) ne font apparaître que des données moyennées, il ne faut tenir compte que des débits instantanés. Pour une utilisation domestique, on admet en général comme débit de la pompe 1/3 de la consommation totale journalière.

Tableau 2.6 évaluation de la consommation d'eau.

Consommation par appareil (l/s)		Consommation journalière (l/jour)	
NF P41204 (extrait)		(usage domestique)	
évier	0,2	Par habitant	200
Lavabo	0,1	Arrosage jardin par m ²	6
Bidet	1,1	élev. gros bétail par tête	80
Douche	0,25	élev. petit bétail par tête	20
Baignoire	0,35		
WC	0,1		

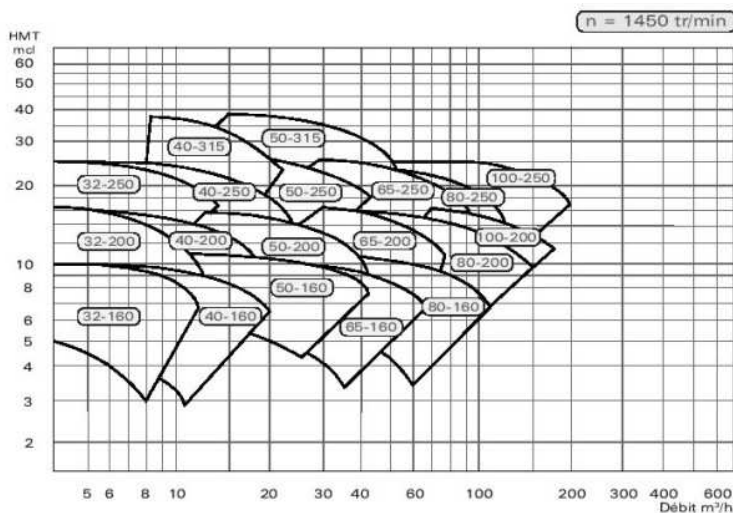


FIGURE 2.32 Plages d'utilisation d'un type de pompes monocellulaires centrifuges -Document Sihi.

La hauteur manométrique : celle-ci est déterminée à partir de l'installation : hauteur d'élévation du fluide, pressions et pertes de charge pour le débit considéré. On choisit généralement un diamètre de conduite tel que la vitesse de l'écoulement soit comprise entre un et deux mètres par seconde. Cette valeur résulte d'un compromis entre un coût énergétique élevé (canalisation de petit diamètre créant de fortes pertes de charge), et un coût d'investissement élevé (canalisation de gros diamètre plus chère à l'achat).

Le point de fonctionnement : nous l'avons vu précédemment, le point de fonctionnement est l'intersection de la courbe réseau avec la courbe de la pompe. Toute variation de la hauteur présumée ou de la consigne déplace le point de fonctionnement sur la courbe de la pompe.

La puissance du moteur : il est recommandé de conserver une marge entre la puissance du moteur et la puissance absorbée par la pompe pour garantir un fonctionnement correct du moteur dans des conditions normales d'utilisation. Il est indispensable d'examiner les points extrêmes de fonctionnement (remplissage d'un réservoir,...) pour déterminer la puissance maximale absorbée par la pompe.

Les catalogues des constructeurs : une fois les conditions de débit et de charge fixées, ceci pour une vitesse de rotation de l'arbre-moteur, la valeur numérique de la vitesse spécifique est estimée. Celle-ci permet de choisir la famille de pompes parmi les pompes rotodynamiques. On peut ensuite s'intéresser aux pompes proposées par les constructeurs dans la famille la plus adaptée. Ces derniers proposent aux clients des plages d'utilisation de leurs pompes pour lesquelles le rendement est correct et ceci pour des vitesses de rotation fixées. La figure 2.32 représente les plages d'utilisation d'une pompe centrifuge fonctionnant à une vitesse de rotation égale à 1450 tr/min. Il s'agit ici d'une plage et non pas d'une courbe car un rognage des aubes, c'est à dire une réduction du diamètre, est toujours possible.

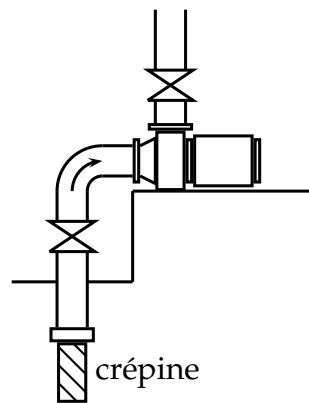


FIGURE 2.33 Clapet de pied avec crépine.

Il est très difficile d'estimer à l'avance les pertes de charge d'un réseau hydraulique. Les points de fonctionnement sur site et par le calcul seront probablement différents. La pompe risque alors de ne pas fonctionner à son rendement le meilleur. Pour une optimisation, on peut adapter la pompe au réseau en réduisant par exemple le diamètre de la roue à la valeur calculée après essais.

2.5.8 Accessoires pour une installation hydraulique

Il existe différents accessoires associés à une pompe, utiles à tout bon fonctionnement de l'installation hydraulique :

- **Le clapet de pied avec crépine** : il s'agit d'un organe d'étanchéité situé à l'extrémité inférieure du tuyau d'aspiration (Fig. 2.33). Il empêche l'évacuation de l'eau hors de la pompe à chaque arrêt de celle-ci. Il faut qu'il soit immergé et à une profondeur qui garantisse un fonctionnement parfait en évitant tout phénomène de cavitation. Il est aussi bon de prévoir un flotteur pour l'arrêt automatique de la pompe lorsque le niveau de l'eau descend au-dessous du niveau préétabli.
- **Clapet anti-retour** : il doit être installé sur la conduite de refoulement pour éviter tout reflux de fluide en cas d'arrêt soudain du moteur. Il est aussi préférable de choisir des types de clapet avec ressort intérieur et avec obturateur à ogive, aidant ainsi à atténuer le phénomène de coup de bélier.
- **Vanne** : non seulement elle permet le démontage de la pompe sans vider l'installation mais elle sert aussi pour le démarrage du groupe et pour le réglage de débit.

2.5.9 La cavitation (Introduction du NPSH)

La cavitation est le phénomène qui se produit quand, en un point de l'écoulement, la pression statique devient égale à la pression de vapeur saturante du liquide, notée $p_v(T)$. Ce phénomène n'est pas à prendre à la légère tant l'impact à la fois sur le rendement de fonctionnement, mais surtout sur la survie du matériel, est important. Afin d'éviter son apparition, il existe un critère basé sur la connaissance du réseau hydraulique amont à la pompe et sur les caractéristiques internes de celle-ci.

La suite de ce paragraphe se propose dans une première partie de détailler les

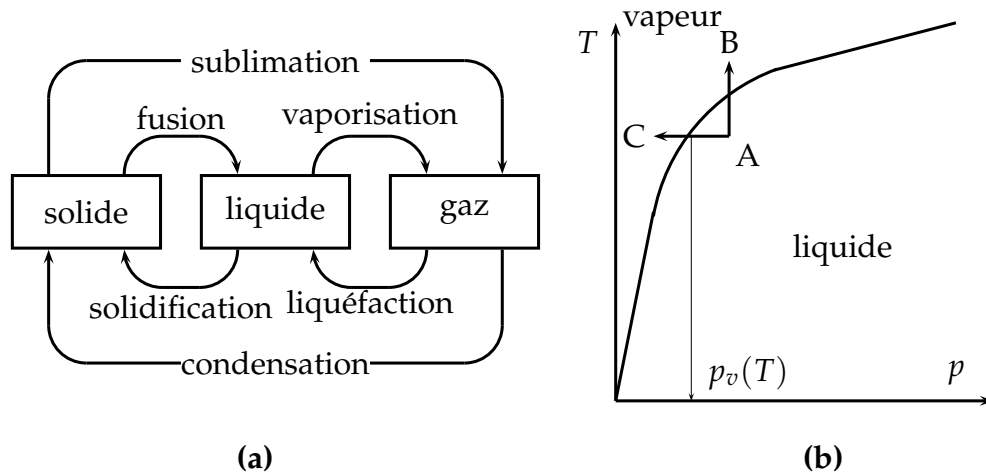


FIGURE 2.34 (a), Nomenclature des changements de phase; (b) Courbe de saturation.

changements de phase impliqués dans ce processus. On terminera enfin par la présentation du critère cité plus haut.

Changements de phase

La cavitation est un type particulier de changement de phase d'un corps correspondant à la vaporisation (Fig. 2.34.a), c'est à dire à la formation de cavités gazeuses. Il existe en effet plusieurs façons de vaporiser un liquide. Aidons-nous du diagramme d'équilibre² entre les phases vapeur et liquide (Fig. 2.34.b). À partir d'un point A appartenant à la phase liquide, l'ébullition peut être atteinte soit en augmentant la température du fluide à pression constante³ ($A \rightarrow B$); soit en baissant la pression du fluide à température constante ($A \rightarrow C$): c'est la cavitation. C'est ce dernier processus qui nous intéresse dans le cas des pompes.

La pression de vapeur saturante peut être estimée à partir de la relation suivante dans laquelle la pression de vapeur saturante $p_v(T)$ est obtenue en mm de colonne de mercure, dont la masse volumique vaut $\rho_{Hg} = 13\,600 \text{ kg/m}^3$, à partir de la température exprimée en Kelvin :

$$\log_{10}(p_v(T)) = 20,310 - \frac{2\,795}{T} - 3,868 \times \log_{10} T.$$

Ainsi pour une température d'eau égale à 20°C , la pression de vapeur saturante vaut approximativement 2260 Pa.

Impacts de la cavité sur les pompes

Une pompe génère une zone de dépression dans son orifice d'aspiration. Si, dans cette zone, le liquide voit sa pression absolue diminuer d'une façon conséquente, une

2. Cette courbe est aussi appelée courbe de saturation.

3. C'est le cas de l'eau bouillante dans une casserole.

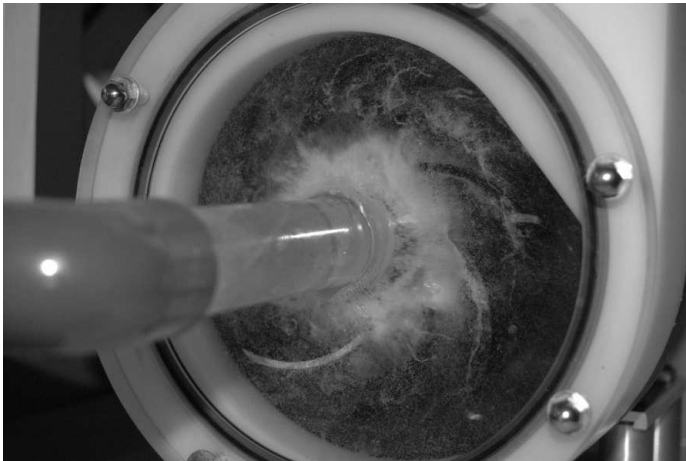


FIGURE 2.35 Cavitation à l'aspiration d'une pompe centrifuge (Photo : Y. Marchesse).

cavitation peut alors avoir lieu (Fig. 2.35). La vapeur créée peut s'accumuler (dans une partie haute de la conduite) ou être entraînée dans le corps de la pompe. La trajectoire suivie par ces bulles de gaz les amène vers des régions de plus forte pression (extrémités des aubages sur une pompe centrifuge par exemple). Le fluide repasse en dessous de sa courbe de saturation : les vapeurs se liquéfient. On note ainsi des implosions continues, de fréquences élevées. Ces implosions produisent des microjets et des surpressions (onde de choc) qui peuvent atteindre plusieurs centaines, voire milliers de bar.

Ce phénomène de cavitation s'accompagne de différentes nuisances : (1) du bruit et des vibrations caractéristiques, première manifestation de la cavitation. La tuyauterie se trouve ainsi excitée et vient à son tour rayonner un champ acoustique dans le milieu aérien ambiant. (2) l'effondrement de la courbe de débit et du rendement de la pompe. En effet, une partie de l'énergie est perdue à comprimer les cavités gazeuses. Pour des poches de vapeur très développées, les pompes subissent des chutes de leur performance qui les rendent inutilisables. Ce phénomène est souvent décrit comme *la chute de caractéristique*. (3) un échauffement anormal, et (4) l'érosion caractéristique des aubages et autres éléments de la pompe. Dans ces conditions, une pompe fonctionne très mal et voit sa durée de vie considérablement réduite. Pour toutes ces raisons, la pression à l'aspiration doit être mesurée à l'aide d'un manomètre.

Notion de NPSH

Afin d'éviter les nuisances citées plus haut, il faut qu'en tout point du circuit, la pression absolue soit supérieure à la tension de vapeur saturante. Cette pression étant mesurable en tout point du circuit, on est donc capable d'estimer la marge que le fluide dispose par rapport à la cavitation, $p_{\text{abs}} - p_v(T)$. Cette quantité variable dans le circuit, est appelée NPSH, pour Net Positive Suction Head (Hauteur de Charge Nette Absolue). Cette valeur traduit l'énergie encore disponible dans le fluide, au-dessus du seuil de tension de vapeur saturante : **c'est une réserve d'énergie**. À l'entrée de la pompe, cette quantité va atteindre une valeur minimale. En ce point du circuit (et uniquement), on parle de **NPSH disponible**. Cette réserve d'énergie dépend du

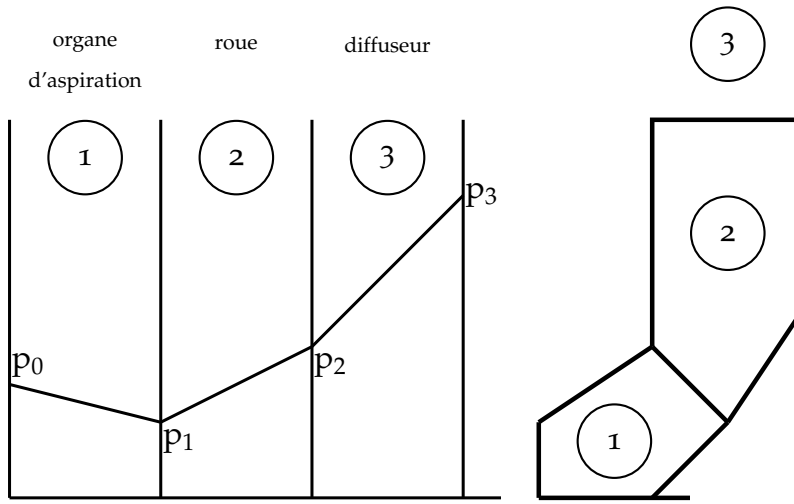


FIGURE 2.36 Évolution de la pression dans la pompe et trajectoire des particules fluide dans la pompe (les évolutions à travers les différents organes de la pompe ne sont pas respectées ici).

fluide, et du type d'installation (réseau en aspiration ou en charge, cf. figure 2.37). À l'intérieur de la pompe, l'écoulement perd de sa charge avant de recevoir l'énergie communiquée par la roue. Cette perte de charge $p_0 - p_1$, illustrée sur la figure 2.36, n'est connue que par le fabricant de la pompe et dépend à la fois de la vitesse de rotation et du débit. La quantité $(p_0 - p_1)/(\rho g)$ est désignée sous le nom de **NPSH requis**, dont le constructeur propose une courbe de NPSH pour différents débits (Fig. 2.7).

Finalement pour éviter tout cavitation, la réserve d'énergie du fluide à l'entrée de la pompe doit être supérieure à la perte de la charge dans la pompe, soit :

$$\frac{p_{\text{abs}} - p_v(T)}{\rho g} - \frac{p_0 - p_1}{\rho g} > 0 \quad \text{ou} \quad \text{NPSH}_{\text{disponible}} > \text{NPSH}_{\text{requis}}$$

Le respect de cette relation assure *a priori* l'utilisateur d'une absence de cavitation dans le circuit. Il est néanmoins préférable de prendre une marge de l'ordre du mètre afin de considérer à la fois les erreurs d'appréciation du point de fonctionnement mais aussi des susceptibles variations de ce point sur place. On peut dès lors écrire :

$$\text{NPSH}_{\text{disponible}} > \text{NPSH}_{\text{requis}} + 1 \text{ m} \quad (2.5)$$

Calcul de NPSH disponible

Nous allons traiter deux cas opposés illustrés sur la figure 2.37 qui nous permettront d'énoncer certaines conditions propices à l'absence de cavitation dans une pompe. Le **cas a** considère une pompe placée à une altitude plus basse que la surface libre de l'eau dans le réservoir. La colonne d'eau assure une pression suffisante pour éviter la présence d'une cavitation. Le **cas b** est moins favorable, la pompe étant placée à une altitude plus importante que la surface libre exposée à une pression atmosphérique. De ce fait, la pompe doit créer une dépression importante pour générer

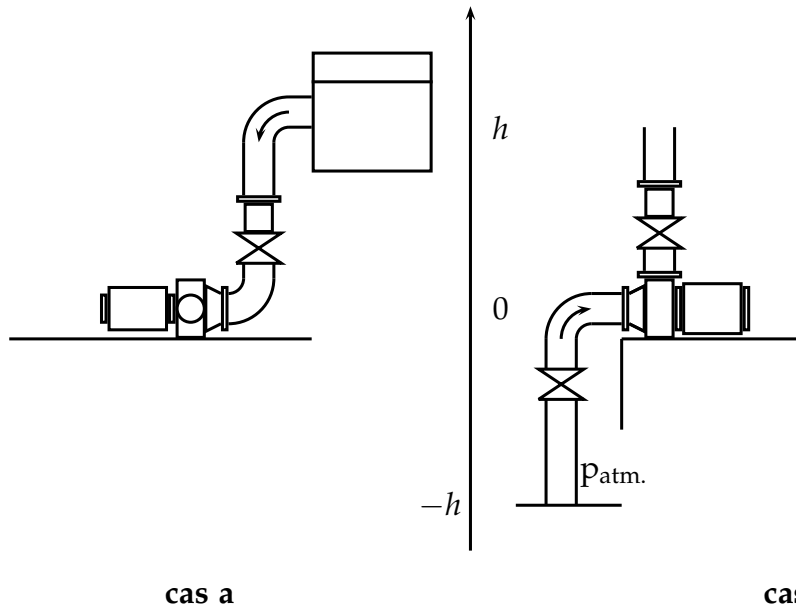


FIGURE 2.37 Réseaux hydrauliques. cas a, pompe montée en charge ; cas b, pompe montée en aspiration.

le mouvement de fluide. Cette dépression doit évidemment être étudiée sérieusement dans le cadre de la cavitation.

⇒ **Cas a : Pompe montée en charge** : le liquide provient d'un réservoir dont la surface est pressurisée à une pression $p_s = p_{\text{atm.}} + p_{\text{relative}}$ et situé à une hauteur h au-dessus de l'entrée de la pompe. On notera ΔH_a les pertes de charge dans la conduite d'aspiration, et V_e la vitesse du liquide à l'entrée de la pompe. En négligeant le terme de hauteur associé à la vitesse de l'écoulement à l'aspiration, il vient $H_E = p_s / \rho g + h - V_e^2 / 2g - \Delta H_a$. Le NPSH disponible est alors estimé par la relation $\text{NPSH}_{\text{disp}} = (p_s - p_v(T)) / \rho g + h - V_e^2 / 2g - \Delta H_a$.

⇒ **Cas b : Pompe montée en aspiration** : un liquide est prélevé d'un bassin, pour lequel la pression à sa surface est égale à la pression atmosphérique et situé à une hauteur h en-dessous de l'entrée de la pompe. La charge à l'aspiration s'écrit $H_E = p_{\text{atm.}} / \rho g - h - V_e^2 / 2g - \Delta H_a$, d'où $\text{NPSH}_{\text{disp}} = (p_{\text{atm.}} - p_v(T)) / \rho g - h - V_e^2 / 2g - \Delta H_a$.

⇒ **Cas général** : d'après les deux cas précédents, on peut exprimer de façon générale le NPSH disponible :

$$\text{NPSH}_{\text{disp}} = \frac{p_s - p_v(T)}{\rho g} + h_{\text{géo}} - \frac{V_e^2}{2g} - \Delta H_a \quad (2.6)$$

où p_s est la pression à la surface du réservoir alimentant la pompe. Dans le cas d'un bassin ouvert, cette pression est égale à la pression atmosphérique. S'il s'agit d'un réservoir fermé pressurisé, il faut alors additionner la pression (relative) lue sur le

manomètre monté sur le réservoir à la pression atmosphérique. $h_{\text{géo}}$ correspond à la différence de hauteur entre le niveau d'alimentation et l'entrée de la pompe. La pompe fonctionnant en charge, cette hauteur sera considérée comme positive. Dans le cas où on pompe un liquide d'un niveau plus bas, la hauteur devient négative. $V_e^2/2g$ représente la part cinétique de l'énergie soustraite au liquide. Dans les conduites bien conçues, la vitesse de l'écoulement est de l'ordre de 1 m/s de sorte que ce terme peut généralement être négligé ($V_e^2/2g = 0,05$). Il convient néanmoins à l'utilisateur de vérifier cette valeur numérique. ΔH_a représente les pertes de charge dans la conduite d'aspiration. On note d'après la relation (2.6) que le niveau de pression disponible fait intervenir quatre composantes, qui ajoutent ou au contraire ôtent de l'énergie au système. Ainsi pour augmenter le NPSH disponible, on peut agir sur différents paramètres : (1) se placer si possible dans le cas d'une pompe montée en charge et augmenter au plus la hauteur d'alimentation ; (2) pressuriser si possible l'alimentation ; (3) réduire au maximum les coudes dans la conduite d'aspiration et optimiser le diamètre de celle-ci afin de réduire les pertes de charge ; (4) diminuer la température du liquide afin d'abaisser la pression de vapeur saturante (Fig. 2.34.b).

Notons que la valeur de la pression atmosphérique dépend de l'altitude du bassin et diminuera d'autant plus que cette dernière est élevée (par exemple, au niveau de la mer, la pression atmosphérique vaut 760 mm Hg, alors qu'elle tombe à 596 mm Hg à 2000 m). On peut estimer la pression atmosphérique $p_{\text{atm.}}$ (en Pascal), fonction de l'altitude z , à partir de la relation :

$$p_{\text{atm.}} = 1,19745 \times 10^{-8} (288,15 - 0,0065 \times z)^{5,25588}$$

Il ne faut pas oublier que la tension de vapeur augmente avec la température du fluide. Un fluide plus chaud aura pour effet de baisser le NPSH disponible...

Courbes de NPSH

Ces courbes de cavitation des pompes ne peuvent être obtenues, aujourd'hui encore qu'exclusivement par la voie expérimentale, conformément aux recommandations et exigences des normes en vigueur. On commence pour cela par réaliser un point d'essai à NPSH suffisamment élevé pour éviter toute cavitation. Ensuite, en maintenant le débit, les pertes de charge dans le circuit et la vitesse de rotation, on diminue progressivement la pression de l'écoulement. On note alors plusieurs valeurs caractéristiques, basées sur l'observation et le bruit émis par la cavitation. (1) Le NPSH de début de cavitation. Il s'agit de l'apparition des premières poches gazeuses. Ce phénomène peut être détecté acoustiquement, ou visuellement lorsque les machines sont prédisposées de hublots transparents ; (2) il existe ensuite d'autres valeurs particulières correspondant à des phases de développement de la cavitation. Ces valeurs correspondent la plupart du temps à des critères propres aux constructeurs ; (3) pour des valeurs de NPSH encore plus faibles, on observe une chute des performances de la machine. On peut dès lors donner un critère objectif pour déterminer un NPSH. Les constructeurs considèrent que la cavitation atteint un degré inacceptable

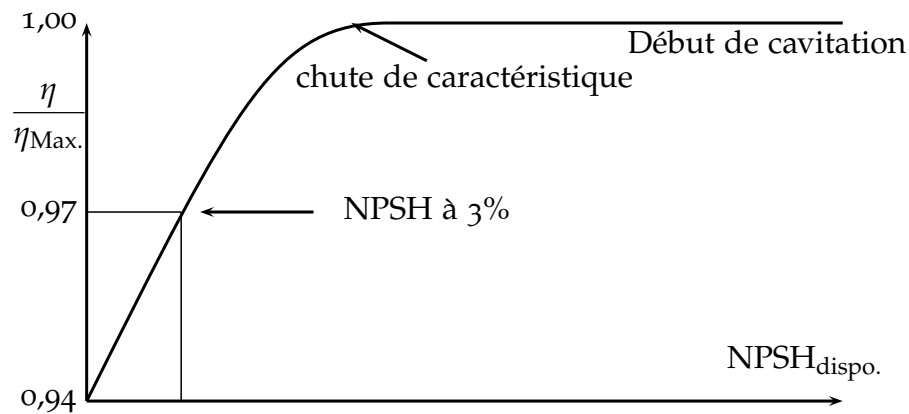


FIGURE 2.38 Évolution du NPSH pendant l'augmentation de la contribution de la cavitation.

lorsque le rendement est atteint de 3 %. En répétant cette opération, on peut tracer l'ensemble de la courbe NPSH à 3 % de la pompe en fonction du débit. C'est cette courbe qui est présentée dans les catalogues de pompes (NPSH requis, Fig. 2.7). Une machine calée à une pression inférieure verra ses performances nettement dégradées.

2.6 Analyse interne d'une pompe centrifuge

L'analyse externe d'une pompe centrifuge a été effectuée, celle-ci nous a permis d'appréhender la notion de point de fonctionnement principalement à partir des caractéristiques du réseau et de la pompe. Cette deuxième partie considère, elle, la région interne de la pompe, utile à la compréhension de l'origine de la charge délivrée par la roue de la pompe. Les différents paramètres sur lesquels on peut agir pour modifier cette charge seront donc mis en évidence. Après une brève description de la région interne proche de la roue, on s'intéressera à la cinématique de l'écoulement en présentant le triangle des vitesses. Ce dernier est nécessaire à la mise en place de la charge d'Euler, charge délivrée par la roue mobile.

2.6.1 Description de la partie interne d'une pompe centrifuge

Un schéma de la partie interne d'une pompe centrifuge est donné sur la figure 2.39. La **roue**, partie active de la pompe, porte les **aubes mobiles** autrement appelées pales ou ailettes. La vitesse de rotation⁴ est constante (autour de l'axe OO'). L'espace compris entre deux aubes mobiles constitue un canal mobile dans lequel on considère l'écoulement permanent par rapport à un repère solide des aubes. Les pales exercent des efforts de pression sur le fluide, qui se traduit par l'existence d'une surpression le long de leur extradots, et d'une dépression sur leur intrados. Le travail de ces efforts exige un apport permanent d'énergie mécanique par l'arbre qui doit

4. Les pompes centrifuges sont généralement des pompes rapides avec des vitesses de rotation de 1500 à 3000 tr/min. Ces vitesses en Europe correspondent aux vitesses de moteurs ayant une fréquence à 50 Hz. On trouvera dans la plupart des catalogues des constructeurs des vitesses de 1450 et 2900 tr/min.

être mis en mouvement par un moteur. Le stator porte une couronne d'aubages fixes constituant un canal dans lequel l'écoulement est considéré comme permanent : le **diffuseur**. Une **volute** collecte tous les filets sortant du diffuseur et les ramène au raccordement de refoulement.

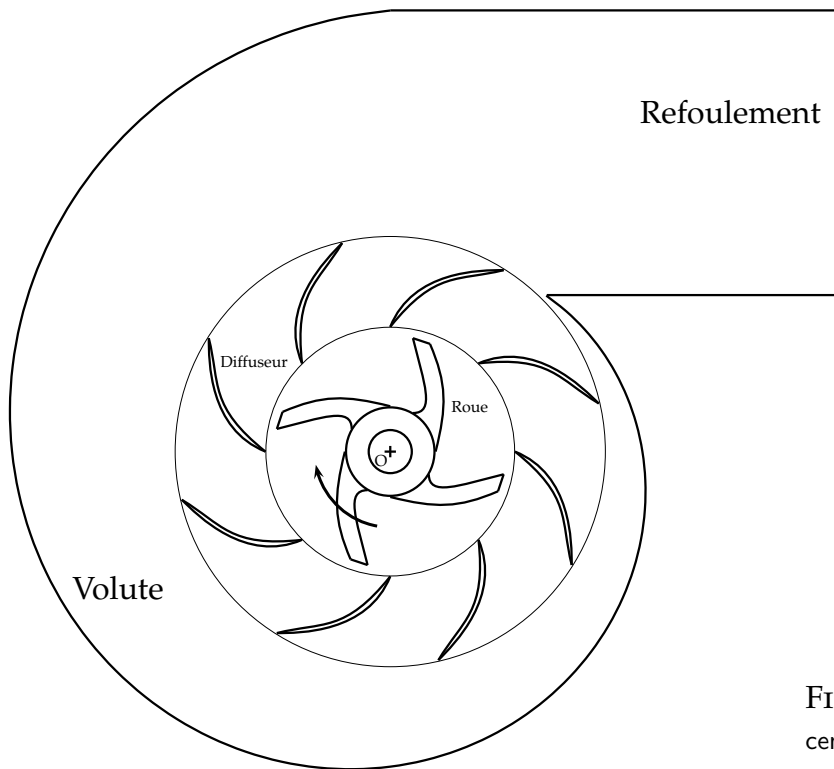


FIGURE 2.39 Coupe d'une pompe centrifuge.

2.6.2 Principe de fonctionnement

La pompe est remplie d'eau. La rotation de l'arbre, entraîné par le moteur, projette l'eau à la périphérie et de ce fait engendre une dépression. Celle-ci provoque un appel des tranches suivantes, et par suite un écoulement permanent. L'énergie reçue par le fluide, pendant la traversée du canal mobile, se manifeste par un accroissement de sa pression et de son énergie cinétique. En ralentissant dans le diffuseur, il y a de nouveau une augmentation de pression par transfert de l'énergie cinétique vers l'énergie potentielle.

2.6.3 Cinématique de l'écoulement

Le fluide entrant par l'oeillard de la roue est guidé par les aubes en mouvement. La trajectoire dans un repère relatif aux aubes mobiles est donc très proche de l'inclinaison des aubes (Fig. 2.40.a). La trajectoire du fluide vue d'un repère absolu et non lié aux aubes ressemble quant à elle à l'entame d'une spirale.

La vitesse du fluide en un point M de l'écoulement peut être définie (1) par rapport à un trièdre de référence fixe (**vitesse absolue**, $\vec{V}$), et (2) par rapport à un trièdre lié aux organes mobiles (**vitesse relative**, $\vec{W}$) (Fig. 2.40.b). Le passage du domaine fixe

au domaine mobile est effectué à l'aide de la composition des vitesses :

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{W} \quad (2.7)$$

où $\vec{U}$ est la vitesse d'entraînement orientée dans le sens de rotation. Cette vitesse est circonférencielle et est égale en valeur absolue à $r\omega$, où r est la distance de la particule considérée par rapport à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de rotation. La composition des vitesses donne lieu au tracé d'un triangle des vitesses (Fig. 2.41.a). On notera α et β respectivement les angles que font les vitesses absolue et relative avec la vitesse d'entraînement.

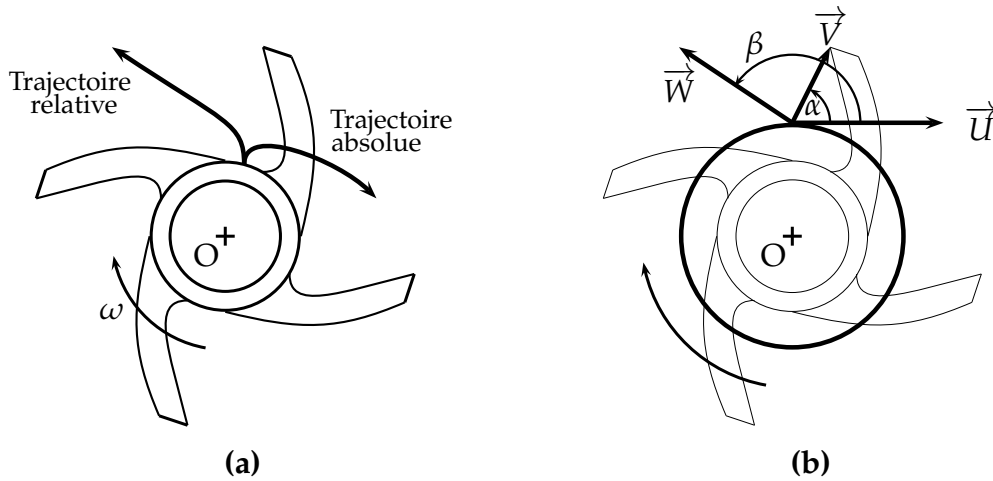


FIGURE 2.40 Cinématique dans la roue d'une pompe centrifuge. (a), trajectoires absolue et relatives; (b), triangle des vitesses.

On définit un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ lié aux aubes en mouvement (Fig. 2.41.b). Le vecteur $\vec{i}$ est orienté radialement sortant et est donc placé dans un plan méridien⁵, le vecteur $\vec{j}$ est aligné selon $\vec{U}$ et $\vec{z}$ tel que $\vec{z} = \vec{i} \wedge \vec{j}$. Ces vecteurs sont utiles à des décompositions des vitesses introduites plus haut.

L'entrée et la sortie de la roue sont généralement indiquées respectivement par les indices 1 et 2. Ainsi, les vitesses d'entraînement en ces points valent $U_1 = \omega r_1$ et $U_2 = \omega r_2$.

Les vitesses $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont décomposées en deux termes : (1) une composante projetée sur $\vec{j}$ et donc alignées avec $\vec{U}$ dite tangentielle ou orthoradiale, V_u ou W_u , mesurée positivement dans le sens de rotation; et (2) une composante projetée sur $\vec{i}$ dite radiale ou méridienne, V_r et W_r , ou V_m et W_m . Il faut bien comprendre que toute composante projetée selon le vecteur $\vec{U}$ est liée au transfert d'énergie, alors que les composantes méridiennes sont quant à elles liées au débit (massique) traversant les roues mobiles, $\rho S_2 \vec{W}_2 \cdot \vec{n}_2$ avec $\vec{n}_2$ sortant radialement de la surface d'éjection S_2 placée au rayon r_2 . Les différentes relations entre ces projections sont les suivantes :

5. Un plan méridien d'une géométrie axisymétrique contient l'axe de rotation.

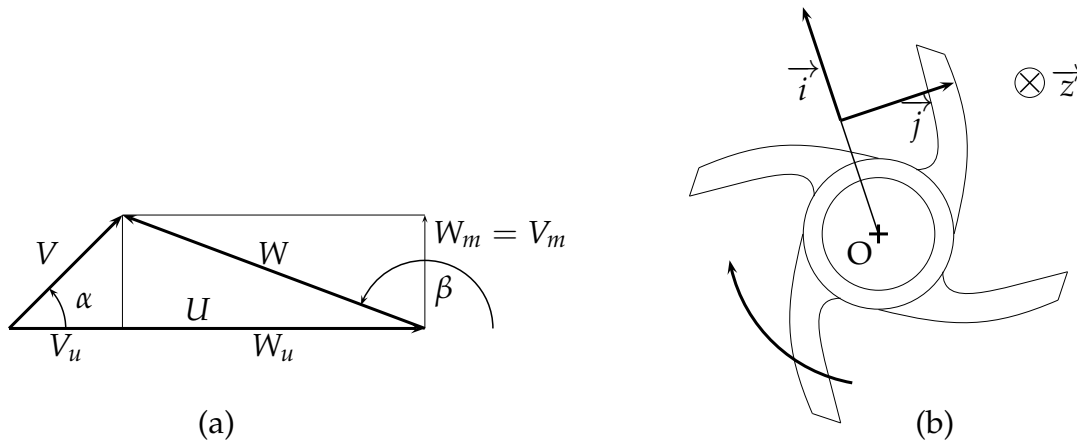


FIGURE 2.41 Définition du triangle des vitesses (a) et des vecteurs unitaires (b).

$$\begin{cases} \vec{V}_r = \vec{W}_r \\ \vec{V}_u = \vec{W}_u + \vec{U} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} V_r = V \sin \alpha = W \sin \beta \\ V_u = V \cos \alpha = W \cos \beta + U \end{cases}$$

Pour que l'écoulement s'effectue correctement, W_1 et W_2 doivent être le plus tangent possible aux aubes. À l'entrée de la roue, la vitesse absolue forme avec U_1 un vecteur α_1 très proche de 90° , la composante V_{u1} étant donc très faible. D'autre part, l'angle β_2 , appelé *angle de sortie* de la roue, a une valeur généralement comprise entre 130° et 165° .

La suite du document se propose de formuler analytiquement la charge délivrée par la roue. On s'attend, d'après ce qui a été dit plus haut, à noter dans cette expression uniquement des termes de transfert d'énergie.

2.6.4 Rôle de la roue - Charge d'Euler

On aborde ici une étape très importante concernant les pompes. Il s'agit d'estimer la hauteur susceptible d'être communiquée au fluide, c'est à dire l'augmentation d'énergies cinétique et potentielle du fluide, par la roue et donc exprimée à partir du triangle des vitesses seul. Cette charge communiquée sera appelée **charge d'Euler**, et sera notée H_E . L'expression de la charge d'Euler sera déterminée à partir de deux approches : (i) l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique, et (ii) l'application du bilan de quantité de mouvement.

En considérant une infinité d'aubes, ce qui revient à considérer des aubes d'épaisseur nulle, l'écoulement du fluide est constitué de lignes de courant parfaitement guidées par deux aubes consécutives et adjacentes. L'écoulement suit alors via cette hypothèse une trajectoire identique à celle de l'inclinaison des aubes et l'angle d'un filet avec la tangente est égale à l'angle de l'aubage avec la tangente. Cette hypothèse revient à considérer l'écoulement en bloc. En réalité, avec un nombre fini d'aubes, le filet moyen n'est plus parfaitement guidé et les deux angles précédents sont légèrement différents.

Détermination de la charge d'Euler à partir du théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique relie l'énergie cinétique d'un système au travail des efforts auquel il est soumis. Nous verrons plus loin que l'application de ce bilan sur un volume de fluide sur un chemin élémentaire $\vec{dl}$ permet d'écrire l'équation de Bernoulli en relatif. Il est très important de comprendre les raisons d'écriture de ce bilan dans un repère relatif. En effet, travailler dans ce repère est une condition nécessaire pour observer un écoulement permanent. Ceci n'est plus le cas dans un repère absolu non lié aux aubes en mouvement.

Considérons donc un volume élémentaire de fluide parcourant pendant un temps dt un chemin élémentaire $\vec{dl}$ (Fig. 2.42). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit dans le repère relatif de la façon suivante :

$$\frac{dW^2}{2} = -\frac{dp}{\rho} - g dz + dw_e + dw_c$$

où $dW^2/2$ est la variation élémentaire de l'énergie cinétique, et le membre de droite représente respectivement les travaux des efforts de pression, de pesanteur, d'entraînement, et de Coriolis.

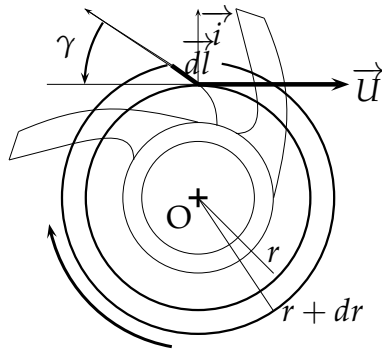


FIGURE 2.42 Définition du chemin élémentaire $\vec{dl}$, et de l'angle gamma γ .

Le travail élémentaire des efforts massiques d'inertie d'entraînement est évalué par le produit scalaire de ces efforts et du chemin élémentaire parcouru par la particule de fluide, $-(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) \cdot \vec{dl}$, et vaut $dw_e = r\omega^2 dr$. Le travail élémentaire des efforts massiques d'inertie de Coriolis, $-2(\vec{\omega} \wedge \vec{W}) \cdot \vec{dl}$, est quant à lui nul car $(\vec{\omega} \wedge \vec{W})$ est perpendiculaire à $\vec{dl}$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dW^2}{2} &= -g dz - \frac{dp}{\rho} + r\omega^2 dr \\ &= -g dz - \frac{dp}{\rho} + \frac{dU^2}{2} \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\frac{d(W^2 - U^2)}{2g} + dz + \frac{dp}{\rho g} = 0$$

L'équation de Bernoulli en mouvement relatif (fluide incompressible) est donc obtenue à partir d'un bilan sur un filet de fluide :

$$\frac{W^2 - U^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{constante}$$

Cette quantité est conservée entre l'entrée (indice 1) et la sortie (indice 2) des aubes mobiles, en considérant d'autre part la relation $W^2 - U^2 = V^2 - 2UV_u$:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 = \frac{U_2 V_{u2} - U_1 V_{u1}}{g}$$

Le terme de gauche caractérise des transferts d'énergies cinétique ($\Delta V^2/2g$) et d'énergie potentielle ($\Delta p/\rho g + \Delta z$), lors du passage du fluide dans la roue mobile. Cette quantité correspond donc à la charge d'Euler telle qu'elle a été définie précédemment. Par identification le terme du membre de droite est une autre forme d'écriture, plus pratique, de la charge d'Euler :

$$H_E = \frac{U_2 V_{u2} - U_1 V_{u1}}{g}$$

Détermination de la charge d'Euler à partir du bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement sera cette fois encore appliqué dans un repère relatif, repère dans lequel l'écoulement est permanent. Dans le cas où ce bilan est appliqué dans un repère absolu, les termes d'inertionnarités difficiles à estimer dans ce cas doivent être pris en compte (dérivée temporelle dans la relation (1.14) page 12). La charge d'Euler traduisant la puissance communiquée au fluide ($\rho g Q H_E$) par la roue, et cette puissance étant directement liée à la puissance absorbée par l'arbre ($C\omega$, si on considère la puissance mécanique totalement transférée au fluide), il nous faut donc exprimer le couple via l'effort exercé par les aubes sur le fluide pour obtenir *in fine* la charge d'Euler.

Considérons le schéma de la figure 2.43, et intéressons-nous à l'effort exercé par l'aube de gauche sur le fluide au point P. Dans le cas où les effets visqueux sont négligés, cet effort élémentaire s'écrit

$$-p \vec{n}_p dS$$

où $\vec{n}_p$ est la normale sortante à la paroi, et dS la surface élémentaire autour de ce point. Cet effort local crée un couple élémentaire autour de l'axe de rotation

$$d\vec{C} = \vec{r} \wedge (-p \vec{n}_p) dS$$

avec $||\vec{r}||$ la distance radiale au point P. Le couple total exercé par les aubes en mouvement sur le fluide s'écrit donc en intégrant l'expression précédente sur la surface des deux aubes en contact avec le fluide :

$$\vec{C} = \int_{S_p} \vec{r} \wedge (-p \vec{n}_p) dS$$

Le but de la démonstration ci-dessous est d'écrire cette expression en fonction de la cinématique de l'écoulement aux extrémités des aubes.

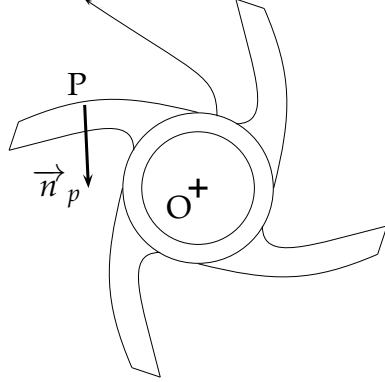


FIGURE 2.43 Application des efforts de pression sur les aubes.

Nous nous plaçons dans cette démonstration dans l'hypothèse énoncée plus haut. Toutes les particules fluides sont dès lors soumises aux mêmes efforts extérieurs quelle que soit leur position. Les effets que pourraient avoir le voisinage des aubes sont donc négligés. Ceux-ci ont une répercussion sur l'écoulement, et leurs conséquences sont discutées dans le paragraphe 2.6.8. Le bilan de moment de quantité de mouvement s'écrit dans notre cas :

$$\int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho \overrightarrow{W} (\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{n}) dS = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{n} dS + \int_D \overrightarrow{OM} \wedge \rho \overrightarrow{f_v} dv + \overrightarrow{\mathcal{M}(F_e)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(F_c)} \quad (2.8)$$

Ce bilan est appliqué sur le volume de contrôle proposé sur la figure 2.44 défini par la région de passage des particules entre deux aubes consécutives. L'entrée et la sortie du domaine sont caractérisées respectivement par des indices 1 et 2 ayant des normales unitaires sortantes $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ purement radiales, la paroi étant identifiée par l'indice p . Le premier terme de l'expression (2.8) représente le moment du débit de quantité de mouvement, alors que les termes du membre de droite sont respectivement les moments des efforts surfaciques, des efforts volumiques, et des efforts massiques d'inertie d'entraînement et de Coriolis définis par les expressions suivantes :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(F_e)} = - \int_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\gamma_e} dm = - \int_D \overrightarrow{r} \wedge [\overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r})] dm \quad (2.9)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(F_c)} = - \int_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\gamma_c} dm = -2 \int_D \overrightarrow{r} \wedge [\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{W}] dm \quad (2.10)$$

Le premier terme du membre de droite de la relation (2.8) contient le couple total exercé par les parois sur le fluide. En effet, si on le développe, nous obtenons l'expression :

$$\int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{n} dS = \int_{S_1} \overrightarrow{r} \wedge (-p \overrightarrow{n}_1) dS + \int_{S_p} \overrightarrow{r} \wedge (-p \overrightarrow{n}_p) dS + \int_{S_2} \overrightarrow{r} \wedge (-p \overrightarrow{n}_2) dS \quad (2.11)$$

avec les termes placés aux extrémités du membre de gauche nuls car $\overrightarrow{r}$ colinéaires à $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$. Le moment du débit de quantité de mouvement de la relation (2.8) s'écrit,

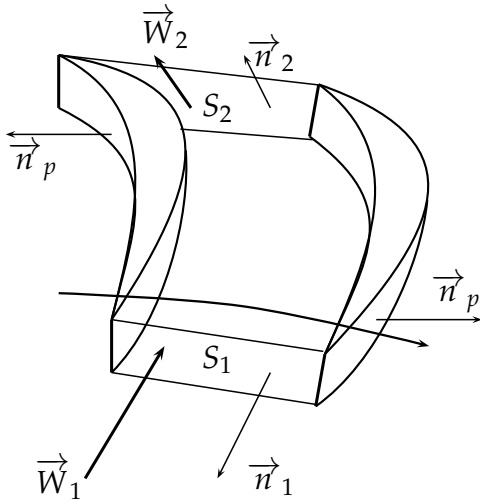


FIGURE 2.44 Domaine de contrôle.

en tenant compte des notations de la figure 2.44 :

$$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho \overrightarrow{W} (\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{n}) dS &= \int_{S_1} \overrightarrow{r} \wedge \rho \overrightarrow{W}_1 (\overrightarrow{W}_1 \cdot \overrightarrow{n}_1) dS + \int_{S_2} \overrightarrow{r} \wedge \rho \overrightarrow{W}_2 (\overrightarrow{W}_2 \cdot \overrightarrow{n}_2) dS \\ &+ \int_{S_p} \overrightarrow{r} \wedge \rho \overrightarrow{W}_p (\overrightarrow{W}_p \cdot \overrightarrow{n}_p) dS \end{aligned}$$

L'intégrale en paroi devient nulle car la vitesse est tangente à cette paroi. Les deux autres termes font apparaître la composante $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{W}_i = r_i W_{ui} \overrightarrow{z}$ constante sur les surfaces d'intégration S_1 et S_2 . On fait apparaître d'autre part le débit massique "dans le sens de l'écoulement" et défini par la relation suivante :

$$Q_m = \int_S \rho \overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{N} dS$$

où $\overrightarrow{N}_1 = -\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{N}_2 = \overrightarrow{n}_2$. Le moment du débit de quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho \overrightarrow{W} (\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{n}) dS = Q_m (r_2 W_{u2} - r_1 W_{u1}) \overrightarrow{z}$$

Les moments des efforts d'inertie s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(F_e)} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}(F_c)} = -2\omega \int_D r W_r \overrightarrow{z} dm$$

Notons d'autre part que $dm = \rho dV = \rho A(r) dr$, avec $A(r)$ la surface de révolution située à la distance radiale r de l'axe de rotation (W_r est normale à cette surface). L'expression du moment de quantité de mouvement projeté selon z s'écrit finalement :

$$C = Q_m (r_2 W_{u2} - r_1 W_{u1}) + 2\rho\omega \int_{r_1}^{r_2} A(r) r W_r dr$$

On remarque dans l'expression précédente le débit massique traversant la surface $A(r)$, $Q_m = \rho A(r) W_r$. Après quelques réarrangements, en utilisant entre autres la composition des vitesses tangentielles ($V_u = U + W_u$), le couple devient :

$$C = Q_m [r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}]$$

On peut maintenant introduire la puissance absorbée par l'arbre :

$$\begin{aligned} C\omega &= Q_m[U_2V_{u2} - U_1V_{u1}] \\ &= Q_m g H_E \text{ d'après le transfert de puissance.} \end{aligned}$$

La charge d'Euler s'exprime donc par la relation :

$$H_E = \frac{U_2V_{u2} - U_1V_{u1}}{g} \quad (2.12)$$

Remarque sur la formulation de la charge d'Euler

Les parties précédentes ont formulé la charge d'Euler. On note en premier lieu que cette charge dépend du triangle des vitesses à travers des termes de transfert d'énergie uniquement. Il n'y a pas de composante méridienne liée uniquement au débit traversant la pompe. Ceci est cohérent avec la définition de la charge d'Euler. D'autre part, le fluide entre généralement dans la partie mobile radialement et sans pré-rotation. De ce fait, la vitesse du fluide ne possède pas à l'entrée des aubes de composante orthoradiale, *i.e.* $V_{u1} = 0$. La charge d'Euler est donc simplifiée à l'expression suivante :

$$H_E = \frac{U_2V_{u2}}{g}$$

La charge d'Euler est fonction de la forme des aubes, et finalement, ces dernières sont adaptées à un point de fonctionnement correspondant à un rendement maximum. En dehors de ce point, il y a décollement, voire des recirculations qui font chuter le rendement.

L'accroissement de pression est utilisable immédiatement. Il n'en est pas de même pour l'augmentation d'énergie cinétique. Celle-ci sera transformée en énergie de pression par le diffuseur. D'autre part, l'expression de la charge d'Euler ne fait apparaître que des termes de vitesse projetés dans la direction de la vitesse d'entraînement. Il n'y a donc que des termes de transfert d'énergie, nécessaire à une augmentation de la charge de l'écoulement.

2.6.5 Courbe caractéristique idéale

Nous allons étudier l'évolution de la charge fournie par la roue, et donc à partir du triangle des vitesses seul, en fonction du débit. Lorsque le débit varie, la direction de la vitesse relative W_2 n'est pas modifiée. Par contre, sa norme est changée et sa projection est alors dépendant du débit. Il est généralement supposé ici que cette dépendance reste linéaire, $W_{u2} = kQ$. La charge d'Euler peut s'écrire :

$$gH_E = U_2V_{u2} = U_2(U_2 - W_{u2}) = U_2^2 - U_2kQ \quad (2.13)$$

Pour une inclinaison d'aubes donnée et à vitesse de rotation fixée, il apparaît que *la charge d'Euler est une fonction linéaire décroissante du débit*. La comparaison avec l'expérience fait apparaître des différences (Fig. 2.45) dont l'origine est connue. Dans la zone 1, région de faible débit, des phénomènes de recirculation dans la pompe dégradent son rendement, et des pertes hydrauliques existent dans la zone 3 pour laquelle le débit est cette fois-ci élevé. On observe cependant que la charge manométrique réelle, c'est à dire mesurée, d'une pompe reste généralement inférieure à 60% de la charge d'Euler [25]. Ceci est principalement lié à la complexité de l'écoulement réel qui n'est pas pris en compte dans l'approche théorique.

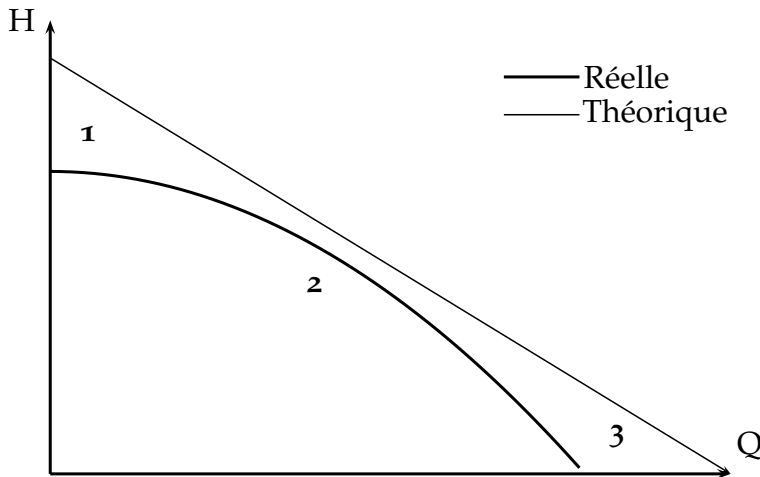


FIGURE 2.45 Courbes caractéristiques d'une pompe centrifuge.

2.6.6 Influence du profil d'aubes sur la charge d'Euler

Nous avons vu précédemment que la charge d'Euler est directement liée au triangle des vitesses, $gH_E = U_2 V_{u2}$. L'orientation des trajectoires des particules-fluides dépendant fortement de l'inclinaison des aubes, le but de ce paragraphe est de relier plus précisément ces deux paramètres (H_E et β_2). D'après les simplifications précédentes, pour des aubes identiques (avec une inclinaison identique), tous les filets reçoivent la même énergie H_E . D'après le triangle des vitesses, nous avons :

$$U_2 = r_2 \omega$$

$$V_{u2} = U_2 + W_2 \cos \beta_2$$

$$V_{r2} = W_2 \sin \beta_2$$

d'où $V_{u2} = U_2 + V_{r2} / \tan \beta_2$. V_r étant la composante débitante de la vitesse, on a alors $Q = V_{r2} S_2$, et ainsi $gH_E = U_2 (U_2 + Q / [S_2 \tan \beta_2])$. L'évolution de la charge d'Euler avec le débit dépend donc du signe de la fonction tangente, sachant que l'angle est compris dans l'intervalle angulaire $[0, \pi]$. La figure 2.46 représente les deux cas pour lesquels l'angle β est obtu ou aigu. Pour les angles situés dans l'intervalle $[0, \pi/2[$, la fonction tangente est positive, alors que dans l'intervalle $] \pi/2, \pi]$ elle est négative. De ce fait, dans le premier cas, la charge augmente avec le débit, alors qu'elle est décroissante dans le deuxième cas (Fig. 2.47). On notera d'ailleurs que la figure 2.47 représente la charge d'Euler et ne tient pas compte de la volute qui est généralement adaptée à un angle d'inclinaison obtu. Un sens de rotation désadapté entraîne alors une mauvaise circulation du fluide générant de fortes pertes de charge, diminuant

de façon catastrophique le rendement (ce que l'on observe lors du TP "Les pompes centrifuges"). Pour ces raisons, les pompes ayant des aubes incurvées vers l'arrière sont généralement préférées.

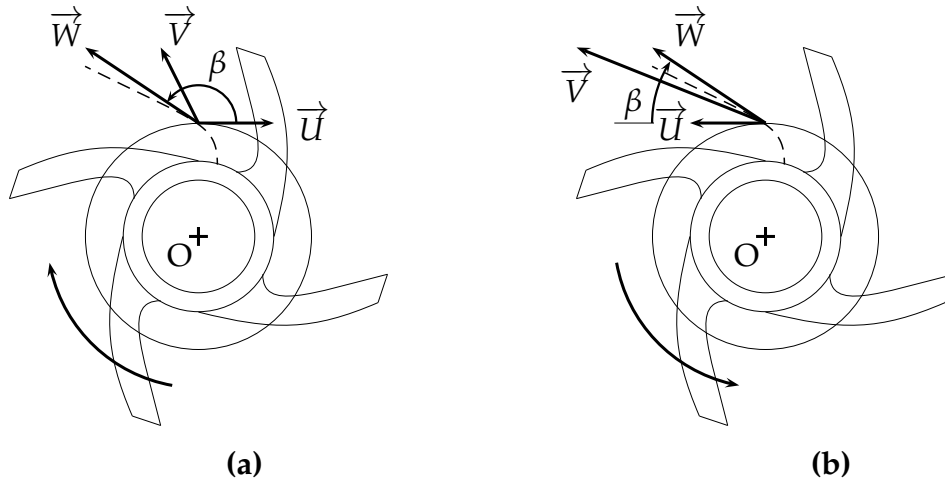


FIGURE 2.46 Influence du sens de rotation sur le triangle des vitesses : a, β est obtus ; b, β est aigu. Dans les deux cas, la vitesse d'entraînement est orthoradiale et est orientée dans le sens de rotation des aubes, le vecteur relatif est tangente à la trajectoire relative (en pointillé sur la figure). La vitesse absolue est ensuite obtenue par composition des deux vecteurs précédents.

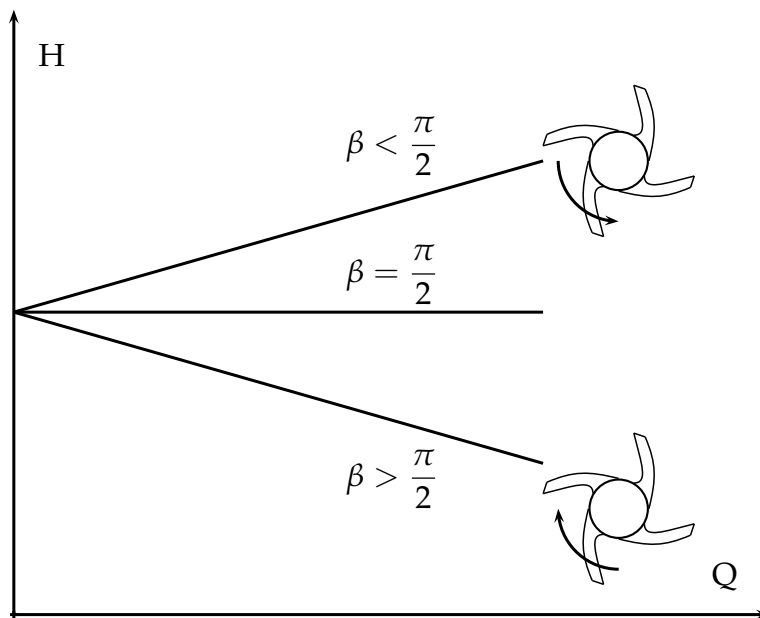


FIGURE 2.47 Effet de l'inclinaison des aubes sur la charge d'Euler.

2.6.7 Facteur de glissement

Même dans un cas idéal d'écoulement, *i.e.* sans dissipation énergétique, la direction de l'écoulement en sortie d'aubes ne serait pas alignée avec celle des aubes. Ceci serait le cas si le rotor était constitué d'un nombre infini d'aubes d'épaisseur nulle

permettant alors de guider parfaitement l'écoulement. Le nombre d'aubes étant fini dans les pompes réelles, l'écoulement a tendance à glisser vers l'arrière comparativement à la direction des aubes (Fig. 2.48). L'angle que fait l'écoulement est donc plus grand que celui caractérisant les aubes, ces deux quantités seront notées respectivement β_2 et β'_2 . Cette inclinaison plus élevée entraîne une diminution de la composante orthoradiale de la vitesse absolue d'aubes, V_{u_2} , comparativement à celle qui serait observée si l'écoulement était parfaitement guidé, V'_{u_2} (Fig. 2.49). Ainsi, le glissement a pour conséquence une charge d'Euler, $gH_E = U_2 V_{u_2}$, diminuée par rapport à celle observée, encore une fois, si l'écoulement était parfaitement guidé, $gH_E = U_2 V'_{u_2}$.

Ce phénomène est quantifié par le facteur de glissement :

$$\sigma = \frac{V_{u_2}}{V'_{u_2}} \quad (2.14)$$

évoluant entre 0 et 1, les valeurs numériques étant généralement proches de 0,8–0,9. Le facteur de glissement représente donc la qualité du transfert d'énergie entre les aubes et l'écoulement. Il représente un critère important à considérer lors de la conception interne d'une pompe. Plusieurs modèles ont été proposés permettant d'approcher au mieux la valeur numérique du facteur de glissement en fonction des données géométriques des aubes, de la vitesse angulaire et du débit éjecté par le rotor. Wiesner [57] a rassemblé l'ensemble des modèles connus et a proposé la formulation du facteur de glissement suivante :

$$\sigma = 1 - \frac{\sqrt{\cos \beta'_2 / Z^{0,7}}}{(1 - \phi_2 \tan \beta'_2)} \quad (2.15)$$

avec Z le nombre d'aubes, $\phi_2 = V_{r_2}/U_2$. Cette formulation est utilisable lorsque la relation suivante est observée :

$$\left(\frac{D_1}{D_2} \right) < \exp \left(\frac{-8,16 \times \cos \beta'_2}{Z} \right) \quad (2.16)$$

Lorsque ceci n'est pas observé, l'auteur propose une correction à apporter à cette formulation. D'après l'auteur, la formulation (2.15) prévoit des valeurs de facteur de glissement proches de celles prévues par les autres modèles et a l'avantage d'être simple d'utilisation.

On peut dès lors s'intéresser à la charge réelle délivrée par le rotor, H_m , différente de celle prévue par la théorie d'Euler, H_E . La première est plus faible que cette dernière, on peut définir un rendement hydraulique, η_h , caractérisant les dissipations énergétiques présentes dans le rotor uniquement :

$$\eta_h = \frac{H_m}{H_E} = \frac{gH_m}{U_2 V_{u_2}} \quad (2.17)$$

En utilisant le triangle des vitesses, il vient :

$$H_m = \frac{\eta_h \sigma U_2^2}{g} \times \left(1 + \frac{\phi_2}{\tan \beta'_2} \right)$$

Ainsi, d'après cette formulation, dès lors que le rendement hydraulique est connu et que le facteur de glissement est évalué à l'aide de la formulation (2.15), il est possible de prévoir la charge réelle délivrée par le rotor à l'écoulement.

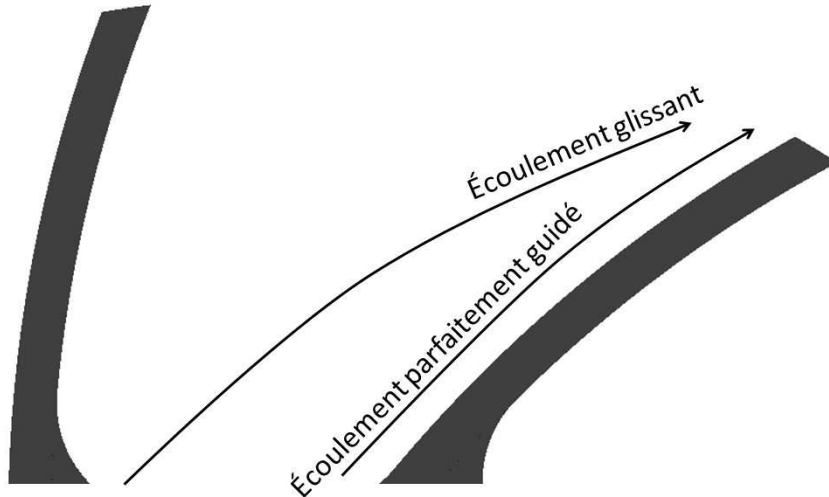


FIGURE 2.48 Influence du phénomène de glissement sur l'écoulement.

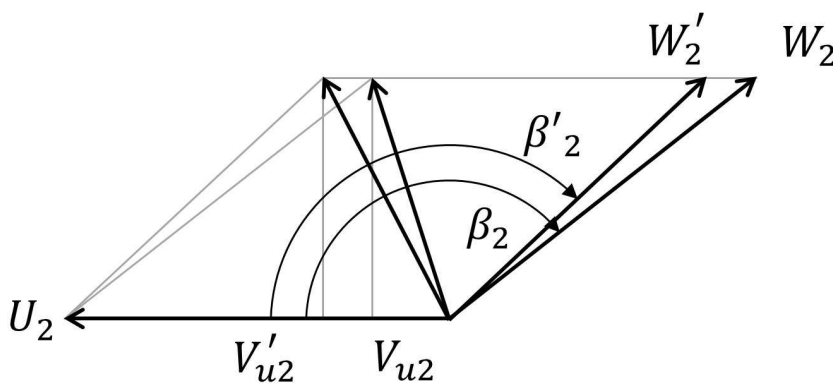


FIGURE 2.49 Influence du phénomène de glissement sur le triangle des vitesses.

2.6.8 Remarques sur l'écoulement réel

La charge d'Euler a été établie à partir de plusieurs hypothèses, et entre autres que l'écoulement est parfaitement guidé. L'écoulement peut alors être traité comme un bloc entre deux aubes consécutives. En réalité, comme il a été dit plusieurs fois précédemment il n'en est rien, car il existe plusieurs effets. (i) Des effets d'extrados et d'intrados conduisent à une surpression le long de l'extrados et une dépression le long de l'intrados. De ce fait, le fluide ne subit pas les mêmes effets qu'il soit proche d'un côté ou de l'autre de l'aube en mouvement, et l'écoulement ne peut plus être considéré comme un bloc. (ii) Les effets de viscosité entraînent l'apparition d'une couche limite. Celle-ci affecte essentiellement la charge délivrée par la pompe. (iii) De façon générale la couche limite de l'intrados décolle dans une région proche du bord d'attaque de l'aube et forme ainsi plus en aval une région de sillage. Ce phénomène a été observé la première fois par Fisher et Thoma [24] constatant qu'il apparaissait même sur des profils d'aubes optimisés. L'écoulement entre deux aubes

est alors composé d'un écoulement à plus faible vitesse près de l'intrados appelé *sillage* et, nécessairement pour des raisons de conservation du débit, un écoulement plus rapide près de l'extrados appelé *jet* (Figure 2.50). (iv) Enfin la rotation des aubes entraînent un mouvement circulaire de l'écoulement au sein même de l'espace entre les aubes à l'origine d'un glissement.

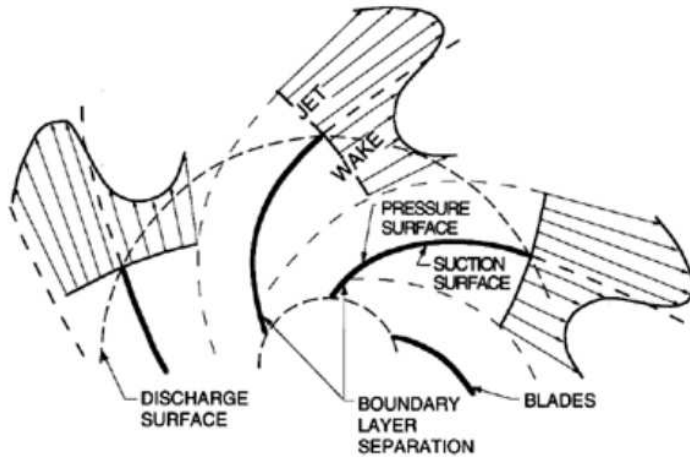


FIGURE 2.50 Schéma de l'écoulement entre deux aubes composé d'un sillage et d'un jet [14].

2.7 Analyse interne d'une pompe axiale

Les pompes axiales sont issues de la famille de pompes dites rotodynamique comme les pompes centrifuges. Elles sont appelées, aussi, pompes à hélices, ont un domaine d'utilisation différent de celui des pompes centrifuges. En effet, elles sont principalement utilisées dans le cadre de forts débits (10^3 à 10^5 m³/h) pour des faibles hauteurs manométriques ($H_m \sim 10$ m). Cette plage des débits est aussi couverte par les pompes centrifuges, mais la hauteur manométrique associée est 10 voire 100 fois plus élevée. Nous supposons par ailleurs que les vitesses d'entrées à la pompe sont exemptes de toute composante giratoire.

2.7.1 Constitution

Une pompe axiale est composée d'un convergent d'entrée, d'une roue à aubes mobile, d'un redresseur et d'un diffuseur axial. Le convergent permet d'uniformiser les vitesses moyennes à l'entrée tout en diminuant le taux de turbulence. Le redresseur est principalement destiné à ramener les filets fluides suivant l'axe de la pompe en permettant une récupération et une transformation partielle en pression de l'énergie cinétique. Différentes coupes sont dessinées sur les figures 2.51 et 2.52.

Nous supposons dans notre cas que les particules de fluide entrant dans la partie mobile de la pompe axiale conserveront leur distance radiale à l'axe de rotation. Ainsi la composante radiale de la vitesse de ces particules est nulle. Il s'agit là de l'hypothèse d'écoulement en *équilibre radial* traduisant l'équilibre entre les efforts centrifuges et les efforts de pression.

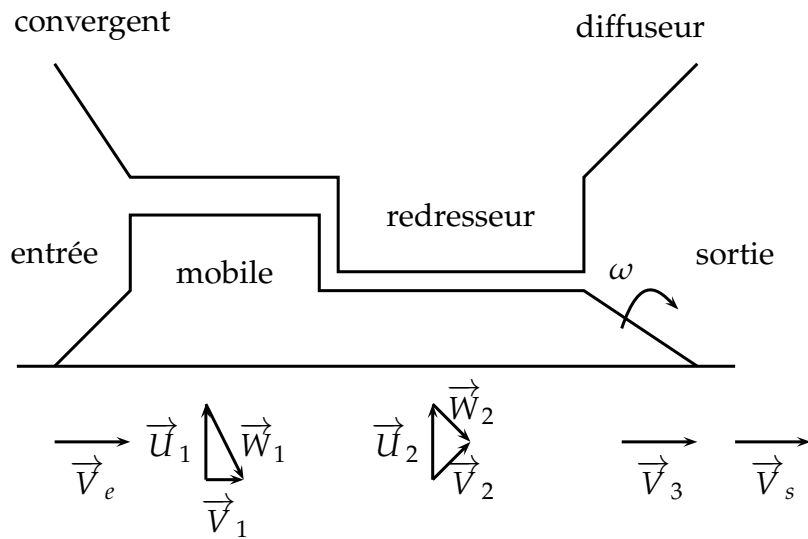


FIGURE 2.51 Composants d'une pompe axiale - évolution des vitesses.

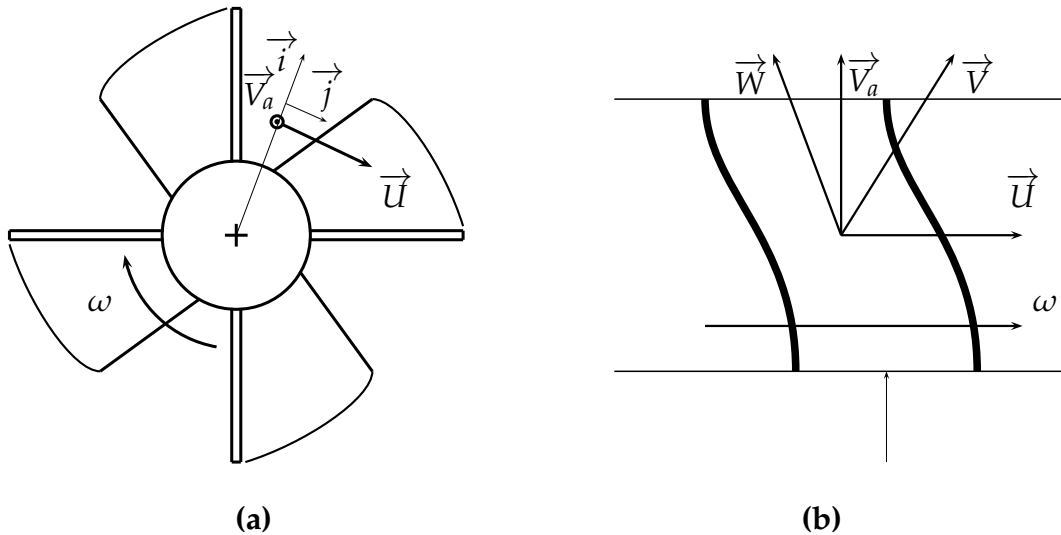


FIGURE 2.52 Vues frontale (a) et de dessus (b) des aubes mobiles d'une pompe axiale - définition des vitesses.

L'écoulement généré par les aubes mobiles fait apparaître une vitesse d'entraînement ($\vec{U}$), et une vitesse relative ($\vec{W}$), toutes deux reliées par la composition des vitesses (relation 2.7).

Comme nous l'avons vu précédemment, il est très utile de décomposer la vitesse d'une particule fluide en une composante débitante ou axiale (V_a), et une composante tangentielle (V_u) :

$$\begin{cases} V_a = V \sin \alpha = W \sin \beta & : \text{Composante débitante;} \\ V_u = V \cos \alpha = U + W \cos \beta & : \text{Composante de transfert d'énergie.} \end{cases}$$

Notons d'autre part que dans le cas des pompes axiales, la composante radiale est inexistante. Elle pourra être non-nulle dans le cas de faibles débits pour lesquels un

phénomène de recirculation existe. De ce fait, on considère en première approximation que les filets de fluide restent à la même distance radiale le long du trajet dans la pompe.

2.7.2 Invariance de la vitesse axiale

Contrairement aux pompes centrifuges pour lesquelles nous avons traité l'écoulement en bloc dans le canal que représente les aubes, les filets de fluide des pompes axiales possèdent des vitesses d'entraînement différentes selon leur distance radiale, $U = r\omega$. De ce fait l'énergie apportée par la paroi dépend *a priori* de la distance radiale. Afin d'impliquer les particules fluides recevant la même quantité d'énergie, nous traiterons alors un filet de fluide traversant un cylindre (élémentaire) de rayon r et d'épaisseur dr , et conservant la même épaisseur. Les indices 1 et 2 indiquent respectivement l'entrée et la sortie du domaine élémentaire.

Le débit élémentaire, exprimé par la relation $dQ = V_a dS = 2\pi V_a r dr$ est conservé entre l'entrée et la sortie de la roue :

$$dQ_1 = dQ_2 \quad \rightarrow \quad 2\pi V_{a1} r dr = 2\pi V_{a2} r dr \quad \rightarrow \quad V_{a1} = V_{a2}$$

La conservation du débit met en évidence le fait que **la vitesse axiale est un invariant**. Si le fluide à l'entrée n'est pas animé de pré-rotation, l'évolution du triangle des vitesses est alors donné par la figure 2.53.

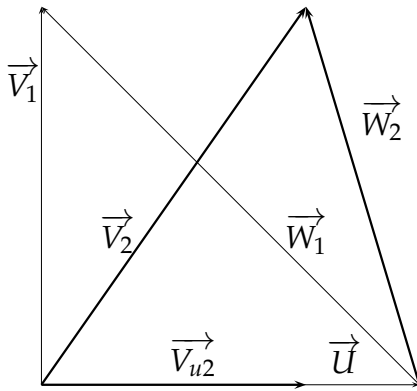


FIGURE 2.53 Évolution des vitesses le long de la roue mobile.

On note bien le fait que la vitesse axiale reste constante, ainsi que la vitesse d'entraînement (si on demeure sur le cylindre de rayon constant). On remarque d'autre part que les variations des projections sur $\vec{U}$ des vitesses absolues et relatives entre la sortie et l'entrée sont égales,

$$\Delta V_u = \Delta W_u. \quad (2.18)$$

2.7.3 Détermination de la charge d'Euler à partir d'un bilan de moment de quantité de mouvement

Nous allons déterminer dans cette partie l'expression de la charge d'Euler à partir de l'application du bilan du moment de quantité de mouvement. Il faut en premier

lieu définir le domaine de contrôle. Ce dernier doit être construit de telle sorte que toutes les particules-fluides entrant dans ce domaine reçoivent la même charge de la part des aubes. La vitesse tangentielle dépendant de la distance radiale, la charge reçue par une particule-fluide entrant avec une distance radiale r est *a priori* plus faible que celle d'une particule-fluide entrant à une distance radiale $r' > r$. Ainsi pour isoler la contribution de la vitesse tangentielle, le domaine de contrôle est un cylindre de rayon interne r , d'épaisseur dr , et de longueur identique à celle des aubes. Toutes les particules-fluides entrant dans le volume de contrôle ainsi défini recevront la même quantité de charge par les aubes mobiles. La conséquence est l'application d'un bilan *élémentaire* et non plus *global* comme cela était le cas pour la pompe centrifuge. Ce bilan est obtenu en ôtant les intégrales de la relation (1.15) :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \rho \overrightarrow{W} (\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{n}) dS = \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{f} dV + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{n} dS + d\mathcal{M}(\vec{F}_e) + d\mathcal{M}(\vec{F}_c)$$

Comme plus haut les efforts de pesanteur seront négligés. L'expression précédente devient après développement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} \wedge \rho \overrightarrow{W}_1 (\overrightarrow{W}_1 \cdot \overrightarrow{n}_1) dS_1 + \overrightarrow{r} \wedge \rho \overrightarrow{W}_2 (\overrightarrow{W}_2 \cdot \overrightarrow{n}_2) dS_2 + \overrightarrow{r} \wedge \rho \overrightarrow{W}_p (\overrightarrow{W}_p \cdot \overrightarrow{n}_p) dS_p \\ = \overrightarrow{r} \wedge (-p_1 \overrightarrow{n}_1) dS_1 + \overrightarrow{r} \wedge (-p_2 \overrightarrow{n}_2) dS_2 \\ + \overrightarrow{r} \wedge (-p \overrightarrow{n}_p) dS_1 - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{\gamma}_e dm \\ - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{\gamma}_c dm \end{aligned} \quad (2.19)$$

La contribution des termes agissant sur les surfaces de r et $r + dr$ sont nulles. L'hypothèse d'un fluide parfait ayant été posée, le fluide glisse le long des parois sans adhérence avec un vecteur-vitesse perpendiculaire à la normale locale. Le troisième terme du membre de gauche est donc nul. On introduit le débit élémentaire "dans le sens de l'écoulement"

$$dQ = \overrightarrow{W}_i \cdot \overrightarrow{N}_i dS_i$$

avec $\overrightarrow{N}_1 = -\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{N}_2 = \overrightarrow{n}_2$. Les produits vectoriels impliquant les efforts d'inertie sont nuls. Enfin le troisième terme du membre de droite correspond au couple élémentaire exercé par les aubes sur le fluide dC et orienté selon $\overrightarrow{z}$. La relation (2.19) devient donc

$$\rho dQ (\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{W}_2 - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{W}_1) = -p_1 r \overrightarrow{j} dS_1 + p_2 r \overrightarrow{j} dS_2 + d\vec{C}$$

La projection de cette équation selon $\overrightarrow{z}$ permet d'obtenir le couple élémentaire :

$$\begin{aligned} dC &= \rho dQ r (W_{u2} - W_{u1}) \\ &= \rho dQ r (V_{u2} - V_{u1}) \quad \text{d'après la relation (2.18)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dC\omega &= \rho dQ U V_{u2} && \text{si on considère une vitesse d'entrée purement axiale;} \\ &= \rho g dQ H_E && \text{d'après la définition de la puissance utile élémentaire.} \end{aligned}$$

Soit

$$H_E = \frac{UV_{u2}}{g} \quad (2.20)$$

la charge théorique délivrée (*i.e.*, la charge d'Euler) à un filet de fluide situé à une distance r de l'axe de rotation. On retrouve une expression similaire à celle obtenue dans le cas des pompes centrifuges. Ceci est logique car les deux types de pompes font parti de la même famille des pompes rotodynamiques. Il n'est pas souhaitable cependant que la charge délivrée par les aubes dépende de la distance radiale. En effet les gradients de pression dans la direction radiale seraient à l'origine d'une déformation des lignes de courant et donc de pertes hydrauliques. Pour éviter cela, la charge doit être identique quelle que soit la distance radiale du filet de fluide. Il faut donc $V_{u2} = K/r$, étant donné le fait que $U = r\omega$. Les aubes sont dessinées la plupart du temps pour satisfaire cette condition.

2.8 Adaptation des conditions de fonctionnement

Une pompe est généralement choisie pour satisfaire un point de fonctionnement en limitant la consommation électrique. Il se peut néanmoins que cette demande évolue ou même que la courbe du réseau *in situ* ne soit pas correctement estimée, il existe alors plusieurs stratégies possibles pour palier ces problèmes.

2.8.1 Modifications possibles

Nous présentons ici les démarches les plus communément utilisées pour la modification d'un point de fonctionnement. On note que le responsable de l'installation peut modifier à la fois le réseau mais aussi la pompe.

Vannage sur la canalisation de refoulement

Il est possible de déplacer le point de fonctionnement à partir d'une modification de l'état d'une vanne placée dans la conduite de refoulement. Si on souhaite par exemple diminuer le débit de fonctionnement Q_0 à une valeur plus faible Q'_0 , l'utilisateur devra alors fermer de façon plus importante la vanne dans le but de générer des pertes de charge supplémentaires ΔH pour obtenir le nouveau débit (Fig. 2.54.a). Notons tout de même que le vannage n'est qu'une solution provisoire car la pompe ne fonctionne plus à son meilleur rendement pour lequel elle a été choisie ce qui augmente la consommation électrique.

Variation de la vitesse de rotation de la pompe

Une autre méthode permettant de déplacer facilement le point de fonctionnement consiste à adapter la vitesse de rotation de la pompe. Pour cela, le moteur de la pompe doit être à courant continu alimenté à tension variable, ou asynchrone avec variateur

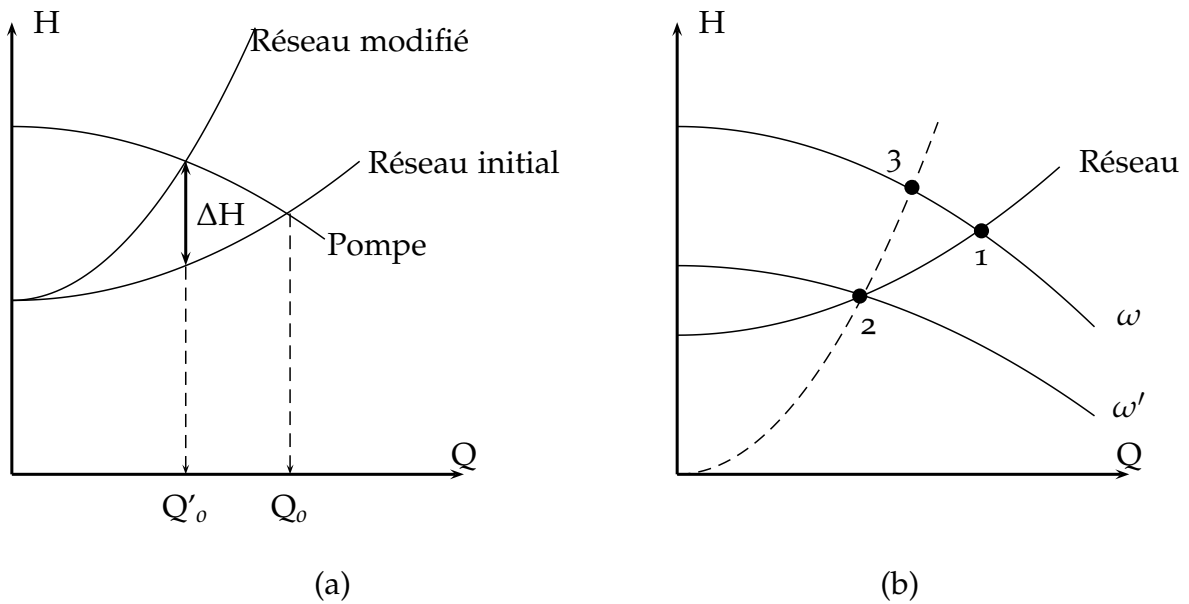


FIGURE 2.54 Modification du point de fonctionnement à partir (a) d'un vannage sur la conduite de refoulement, (b) d'un changement de la vitesse de rotation de la pompe.

de fréquence. Nous l'avons vu plus haut, le débit et la hauteur manométrique sont fonction de la vitesse de rotation, le débit répondant linéairement et la hauteur selon le carré de cette vitesse de rotation. L'obtention de la nouvelle vitesse de rotation n'est pas immédiate et nécessite le tracé d'une courbe intermédiaire (Cf. paragraphe 2.4). Considérons le cas schématisé sur la figure 2.54.b pour lequel le point de fonctionnement initial correspond au point 1, la pompe tournant dans ce cas à la vitesse de rotation ω . On souhaite ici adapter la vitesse de rotation de la pompe afin que le débit de fonctionnement soit plus faible et corresponde à celui du point 2. Pour ce débit, la charge du réseau vaut H_2 , la courbe caractéristique de la pompe, à la vitesse de rotation inférieure ω' , devra donc passer par ce point (Q_2, H_2) . Notons de suite que le point 2 n'est pas obtenu à partir du point 1 par application directe des lois de similitude (*i.e.* $Q/\omega = \text{Cste}$ et $H/\omega^2 = \text{Cste}$), mais à partir d'un autre point, ici le point 3, qu'il va falloir estimer.

La prochaine étape consiste à déterminer les caractéristiques du point 3. Pour cela, nous allons tracer la courbe respectée par le point 2 lorsque la vitesse de rotation de la pompe évolue. D'après les relations de similitudes précédentes, le débit et la hauteur manométrique pour ce point-là sont reliées de la façon suivante :

$$\frac{H}{Q^2} = \text{Constante}$$

La constante peut être déterminée à partir du point 2, $\text{Constante} = H_2/Q_2^2$, et cette fonction parabolique tracée. L'intersection avec la courbe de la pompe à la vitesse ω permet l'estimation des caractéristiques du point 3 qui est donc relié au point 2 à partir des lois de similitude. Le rapport des débits Q_3/Q_2 est égal au rapport des vitesses de rotation ω/ω' , et la nouvelle vitesse de rotation peut donc être estimée.

L'exercice [E19] propose une application de cette méthode.

Le rognage des aubes

Il est possible de modifier la courbe caractéristique de la pompe par diminution du diamètre des aubes abaissant ainsi la valeur de la vitesse orthoradiale en bout d'aube. Considérons le cas illustré sur la figure 2.55 pour lequel l'utilisation de la pompe et son diamètre initial D conduit à un point de fonctionnement 1. Le débit de fonctionnement étant trop important, le rognage des aubes, d'un diamètre D à un diamètre plus faible D' , abaisse la courbe caractéristique de la pompe entraînant un débit de fonctionnement plus faible.

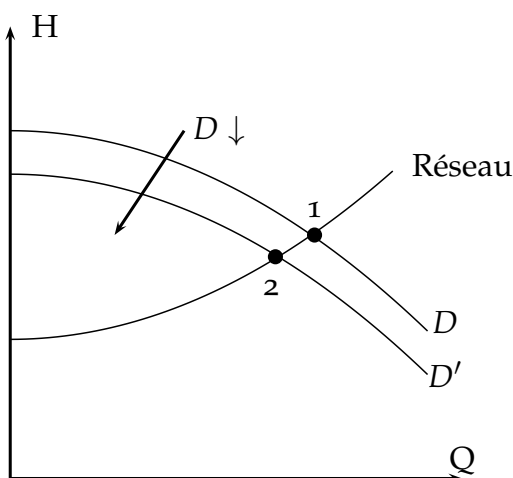


FIGURE 2.55 Modification du point de fonctionnement à partir du rognage des aubes d'une pompe.

L'opération de rognage est effectuée sous contrôle du constructeur et nécessite un rééquilibrage avant le remontage des pièces mobiles.

2.8.2 Adaptation du point de fonctionnement consécutivement à une mauvaise estimation du réseau

Les modifications que l'on peut apporter au réseau et à la pompe ont été présentées. On se propose maintenant d'aborder les deux cas d'erreur de la courbe de réseau, la sous-estimation ou la surestimation. Ces deux cas sont représentés sur la figure 2.56. Les modifications à apporter ne seront pas identiques dans les deux cas.

Réseau sous-estimé

Ce cas n'est pas fréquent car les pertes de charge sont généralement surestimées dans le calcul. Ce problème provient généralement d'une hauteur géométrique ou des pertes de charge réelles supérieures à celles estimées. Ce dernier point peut être consécutif à un encrassement des conduites.

On observe alors sur place un débit plus faible que celui souhaité (Fig. 2.56.a). Une possibilité consiste alors à réduire les pertes de charge (1) si cela est possible. Si cette modification n'est pas possible, la vitesse de rotation peut être augmentée (2)

pour déplacer le point de fonctionnement vers des débits plus élevés. Si aucune de ces modifications ne peut être apportée, le responsable de l'installation devra alors changer la pompe et adapter ainsi le diamètre des aubes.

Réseau surestimé

Ce cas est plus fréquent que le précédent, et est lié à une hauteur géométrique ou des pertes de charge réelles inférieures à celles estimées.

Le débit observé sur place est dans ce cas plus élevé que celui souhaité (Fig. 2.56.b). Il y a un risque de cavitation si la pompe est placée en aspiration. Les pertes de charge peuvent être augmentées (1) par l'utilisation d'une vanne ou d'un diaphragme. On peut d'autre part rogner les aubes ou diminuer la vitesse de rotation (2), ces deux opérations ayant le même effet à savoir une diminution de la charge fournie par la pompe. Le point de fonctionnement voit alors sa valeur de débit chuter.

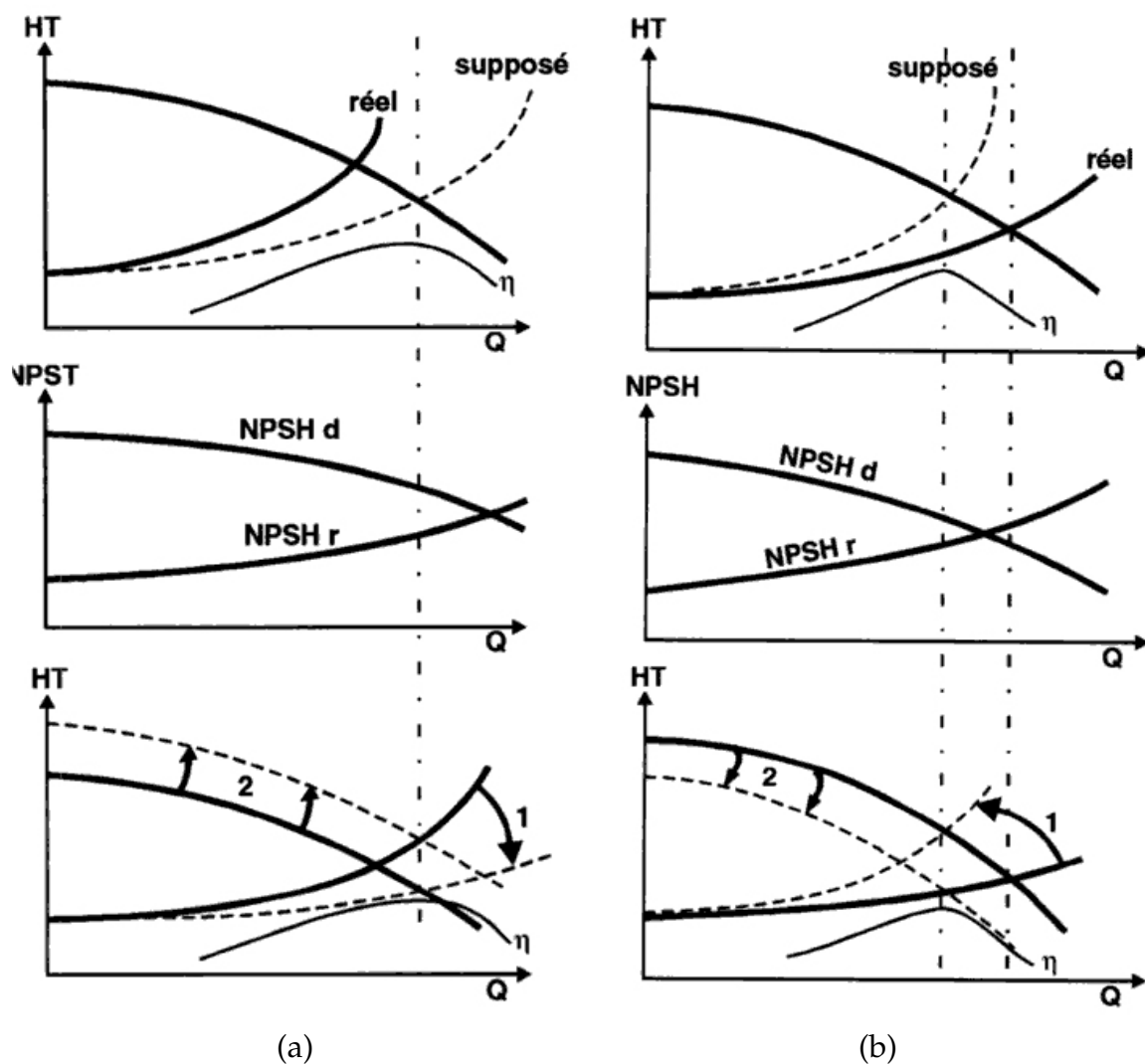


FIGURE 2.56 Modification du point de fonctionnement lorsque le réseau est mal-dimensionné. a, réseau sous-estimé; b, réseau surestimé (illustrations d'après la référence [26]).

2.9 Exercices

Le niveau de difficulté des exercices suivants est évalué à partir du nombre d'étoiles (*) allant d'une étoile pour les exercices simples jusqu'à trois étoiles pour les exercices les plus difficiles à résoudre.

[E8] Jet d'eau de Genève *

Le jet d'eau de la ville de Genève atteint en moyenne l'altitude 140 m et est généré par un système de pompage partiellement immergé et constitué de deux pompes en parallèle délivrant chacune un débit égal à 250 l/s. Donnez un ordre de grandeur de la puissance du système de pompage.

[E9] Régulation thermique à partir d'une pompe *

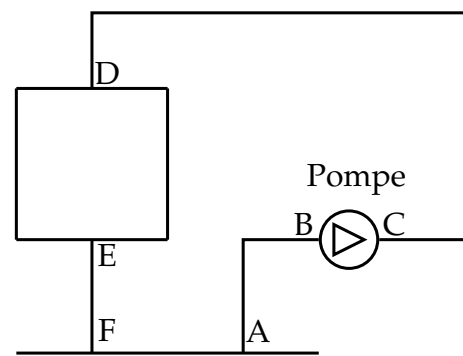
Un réseau hydraulique fermé est créé pour alimenter en débit un échangeur thermique. L'unique conduite de ce réseau a une longueur totale équivalente $L = 87$ m et pour un diamètre interne $D = 6$ cm. Le coefficient de perte de charge de ce type de conduite vaut $\lambda = 0,01$. Les points caractéristiques de la pompe sont donnés dans le tableau 2.7 pour une vitesse de rotation égale à 1450 tr/mn. Le but de l'exercice est de déterminer le point de fonctionnement de la pompe.

Tableau 2.7 Points caractéristiques des pompes des exercices [E9] et [E10].

Q (l/s)	0	5	10	15	20	25	30
H (m)	120	118	110	98	80	58	30

[E10] Une pompe alimentant un réseau présentant deux branches en parallèle *

Une pompe, dont les points caractéristiques sont rassemblés dans le tableau 2.7, alimente en débit un réseau hydraulique composé d'une conduite d'aspiration AB provenant d'un bassin d'alimentation, suivie d'une conduite de refoulement CD. Le débit est ensuite partagé en deux à travers les conduites DE_g et DE_d placées en parallèle, les indices g et d indiquant respectivement les conduites gauche et droite. Le débit est de nouveau collecté en E pour rejoindre le bassin d'alimentation via la conduite EF. Les conduites ont des longueurs équivalentes rassemblées dans le tableau 2.8, un diamètre $D = 6$ cm, et un coefficient de perte de charge $\lambda = 0,01$.



Le but de l'exercice est d'une part de déterminer le point de fonctionnement de la pompe et d'autre part les débits traversant les conduites DE_g et DE_d . On supposera les pertes de charge singulières introduites par les conduites en té en D et en E comme étant négligeables.

Tableau 2.8 Longueurs équivalentes exprimées en m des conduites de l'exercice [E10].

AB	CD	DE_g	DE_d	EF
84	120	1045	588	84

[E11] Une pompe alimentant un réseau présentant un réservoir *

On souhaite utiliser une pompe centrifuge, dont les performances sont rassemblées dans le tableau 2.9, pour alimenter un réseau hydraulique. Ce dernier est composé de deux conduites : (i) une conduite d'aspiration reliant l'entrée de la pompe à un bassin d'alimentation, et (ii) d'une conduite de refoulement alimentant un réservoir dont la surface libre est située à une altitude égale à 30 m par rapport à celle du bassin. Il règne sur les surfaces libres du bassin et du réservoir une pression atmosphérique égale à 10^5 Pa. La conduite est, quant à elle, caractérisée par un diamètre égal à 300 mm, et par un coefficient de perte de charge $\lambda = 0,024$. Sa longueur totale vaut 120 m. Le but de l'exercice est d'estimer le point de fonctionnement et le rendement de la pompe.

Tableau 2.9 Caractéristiques de la pompe pour une vitesse de rotation égale à 1500 tours par minute ($\mathcal{P}_a$ est la puissance absorbée).

Q (m^3/s)	0,075	0,150	0,200	0,250	0,300
H (m)	40	38	34	28	19
$\mathcal{P}_a$ (kW)	97	127	147	163	170

[E12] Station de pompage alimentant deux réservoirs **

On souhaite alimenter en eau deux villes à partir de réservoirs de stockage, R et R'. La surface libre du premier est située à l'altitude 70 m, tandis que celle du réservoir R' est située à l'altitude 80 m (Figure 2.57). Leur source d'approvisionnement, constituée d'un bassin, est localisée à une altitude plus basse égale à 0 m. L'écoulement sera généré par un système de pompage composé de deux pompes placées en parallèle. Leurs courbes caractéristiques (hauteur manométrique, rendement) sont rassemblées dans le tableau 2.10. Le réseau hydraulique à alimenter implique une conduite d'aspiration AB qui débouche sur le système de pompage, celui-ci refoulant ensuite le débit dans la conduite CD. Au point D, la conduite précédente partage le débit dans les conduites DE et DF, respectivement Q_{DE} et Q_{DF} , jusqu'aux deux réservoirs, cités plus haut. Les caractéristiques de ces conduites sont données dans le tableau 2.11.

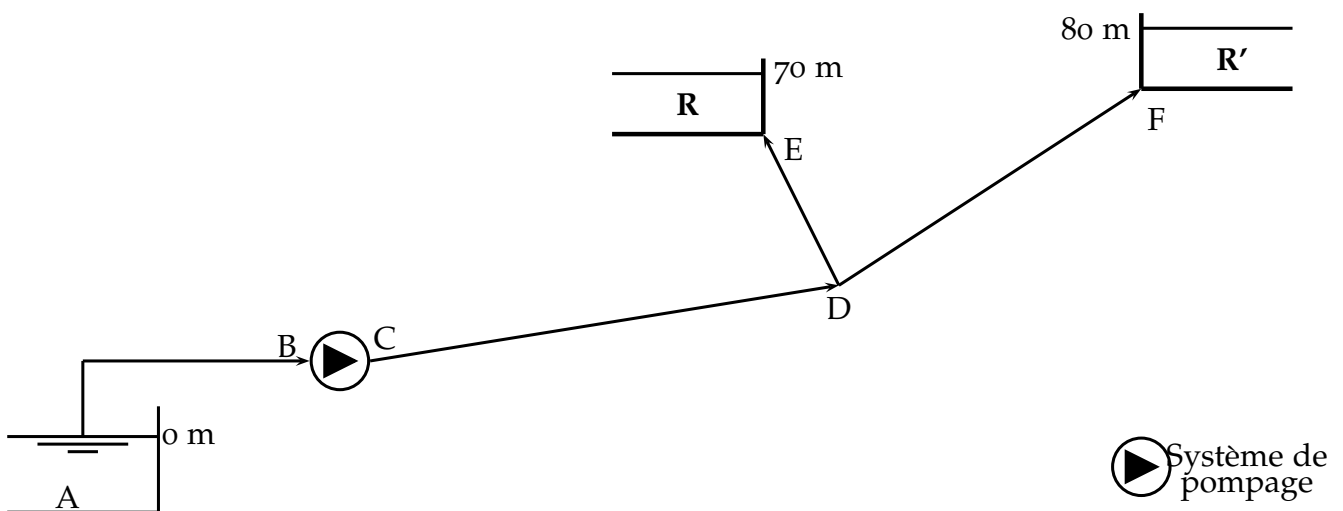
Questions : Déterminez la puissance absorbée par le système de pompage, et évaluer les débits présents dans les conduites DE et DF ?

Tableau 2.10 Points caractéristiques des pompes de l'exercice [E12].

Q (l/s)	0	100	200	300	400	500	600
H_1 (m)	160	155	140	115	80	35	
η_1		0,69	0,65	0,47			
H_2 (m)	140	138	132	122	108	90	68
η_2		0,37	0,60	0,71	0,69	0,52	

Tableau 2.11 Caractéristiques des conduites de l'exercice [E12].

Conduite	Longueur équivalente (m)	Diamètre (m)	λ
AB	350	0,350	0,020
CD	1500	0,450	0,035
DE	2500	0,450	0,045
DF	2000	0,500	0,045

**FIGURE 2.57** Schéma du réseau hydraulique de l'exercice [E12]. (Pour les besoins du dessin, les échelles et les perspectives ne sont pas respectées. De plus les villes V et V' ne sont pas représentées sur la figure).**[E13] Pompes en série ou en parallèle ****

Deux pompes, dont les caractéristiques sont données sur la figure 2.58 (p. 101), sont appelées à débiter dans une conduite de 0,8 m de diamètre, de coefficient de perte de charge $\lambda = 2,23 \times 10^{-2}$, et posée sur 9262 m de longueur, dont 100 m pour la conduite d'aspiration, débouchant dans un réservoir à 65 m au-dessus du plan de pompage. Il y a possibilité de grouper ces pompes, soit en série, soit en parallèle.

[1.] Quels seraient les points de fonctionnement de chacune de ces pompes dans les deux hypothèses de groupement ci-dessus et quelles seraient les puissances totales absorbées par le système de pompage dans ces mêmes hypothèses? On prendra la

pression de vapeur saturante comme étant égale à 2260 Pa.

[2.] Ces groupements sont-ils toujours possibles dans le cas où la hauteur d'aspiration vaut 2 m ? Qu'advierait-il de ces possibilités de groupement si la hauteur d'aspiration passait à 4 m ?

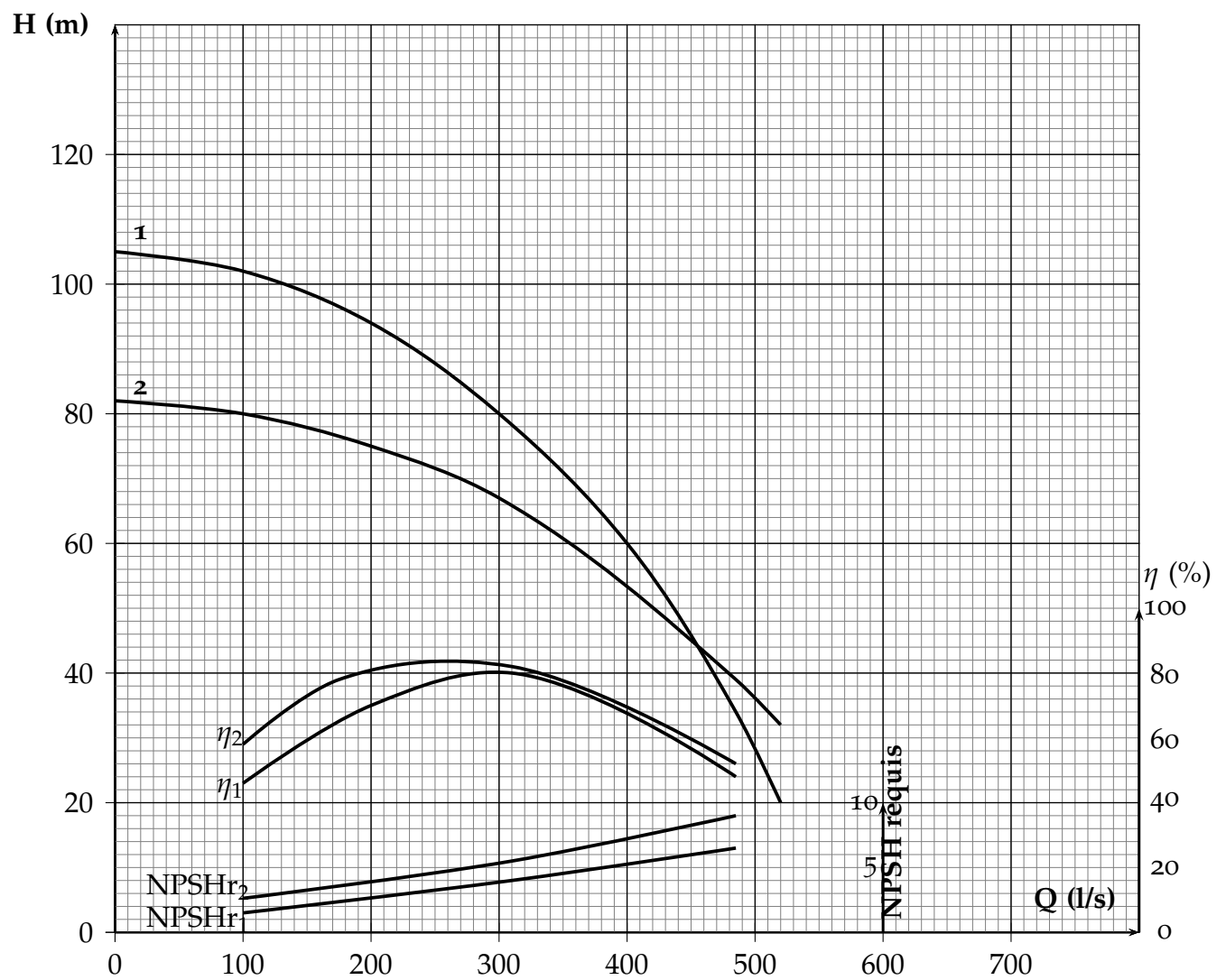
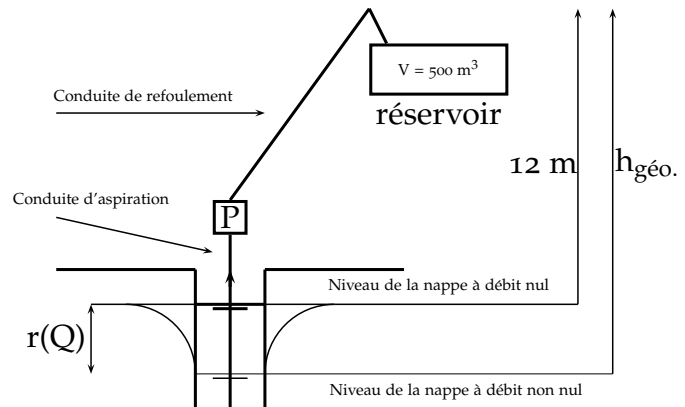


FIGURE 2.58 Courbes caractéristiques des pompes de l'exercice [E13].

[E14] Remplissage d'un réservoir par un système de pompage **

On souhaite prélever l'eau d'une nappe à partir d'un système de pompage et la transporter jusqu'à un réservoir. Le réseau hydraulique est composé d'une conduite d'aspiration et d'une conduite de refoulement. Un abaissement du niveau de l'eau dans la nappe est généralement observé lorsqu'il y a pompage. On parlera alors de rabattement, noté $r(Q)$.

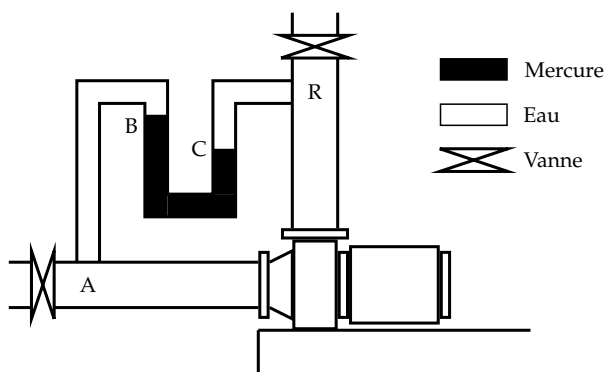
La surface libre du réservoir est localisée à une hauteur de 12 m par rapport au niveau de la nappe à débit nul. Cette étude propose d'une part de déterminer expérimentalement la charge manométrique de la pompe centrifuge (Partie 1). Celle-ci sera ensuite utilisée dans différentes configurations (Partie 2) pour remplir le réservoir. La pompe sera utilisée seule à 1450 tr/min, en parallèle avec une autre pompe identique, et enfin seule à une vitesse de rotation plus élevée.



Les conduites d'aspiration et de refoulement ont respectivement pour longueur 10 m et 80 m. Elles sont constituées toutes les deux du même type de conduite de diamètre 150 mm et de coefficient de pertes de charge $3,78 \times 10^{-2}$. Les pertes de charge singulières consécutives à la canalisation d'aspiration (clapet de pied, coude,...) seront estimées par la relation $\Delta H_s = 15 \times V^2 / 2g$.

Tableau 2.12 Rabattement constaté lors d'un essai de pompage.

Q (l/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
r (m)	0	0	0	0,30	1,10	2,00	3,15	4,50

Partie 1 : Charge manométrique de la pompe centrifuge

On désire déterminer expérimentalement la hauteur manométrique délivrée par la pompe centrifuge au fluide de notre étude pour différents débits. Pour cela, on utilise un manomètre différentiel à mercure installé comme le montre le schéma ci-contre. Les conduites d'aspiration et de refoulement ont des diamètres identiques.

Pour une vitesse de rotation de **1450 tr/min**, on relève le différentiel $h = z_B - z_C$ du manomètre différentiel, du débit nul jusqu'au débit maximum de 30 l/s. L'ensemble

des valeurs est rassemblé dans le tableau 2.13.

Tableau 2.13 Différence de hauteurs des deux surfaces libres du mercure, h .

Q (l/s)	0	8	12	20	22	24	30
h (cm)	138,9	127,0	119,0	95,2	87,3	77,0	40,5

[1.] Déterminer la relation entre le différentiel mesuré et la charge manométrique de la pompe. On rappelle que les masses volumiques de l'eau et du mercure valent respectivement $1\,000\text{ kg/m}^3$ et $13\,600\text{ kg/m}^3$. La charge manométrique de la pompe est tracée sur la figure 2.59 page 105.

Partie 2 : utilisation de la pompe dans plusieurs configurations

▷ **Configuration 1** : le système de pompage est constitué de la pompe précédente évoluant à 1450 tr/min.

[2.] Déterminer la puissance absorbée par le système de pompage.

[3.] En supposant l'écoulement comme étant permanent, et le niveau du réservoir constant, calculer le temps t_1 , nécessaire au remplissage du réservoir (Format de t_1 , h : min : s).

▷ **Configuration 2** : le système de pompage est constitué de deux pompes identiques à celles présentée plus haut, disposées en parallèle et évoluant à 1450 tr/min.

[4.] Déterminer la puissance absorbée par le système de pompage.

[5.] En supposant l'écoulement comme étant permanent, et le niveau du réservoir constant, calculer le temps nécessaire, t_2 au remplissage du réservoir.

▷ **Configuration 3** : le système de pompage est constitué de la pompe précédente évoluant à une vitesse de rotation plus élevée.

On désire remplir le réservoir en un temps plus court que celui de la configuration 2, à savoir en 6 heures, en utilisant la pompe seule fonctionnant à une vitesse de rotation plus élevée.

[6.] Quelles sont les valeurs du débit et de la charge que devra fournir la pompe ?

[7.] Quelle nouvelle vitesse de rotation de la pompe permet de satisfaire ce critère ?

(Remarque : on vérifiera que le nouveau point de fonctionnement est sur la courbe du réseau.)

[8.] À partir du nouveau point de fonctionnement, calculer la puissance absorbée par

le système dans cette nouvelle configuration. On supposera que l'augmentation de la vitesse de rotation laisse inchangé le rendement.

[E15] Étude de la cavitation dans la configuration 1 de [E14] **

On se place dans les conditions de la configuration 1 de l'exercice [E14]. La pression atmosphérique dans le plan de référence de la pompe placée à une altitude 1500 m vaut 83973 Pa. À quelle hauteur maximale peut-on installer la pompe au-dessus du niveau de la nappe pour que ne se produise pas le phénomène de cavitation (la température de fonctionnement vaut 20 °C)

[E16] Refoulement dans un réseau avec un prélèvement de débit **

Les villes V et V' sont alimentées respectivement par les réservoirs R et R'. Ces derniers sont approvisionnés par un réseau hydraulique présentant deux bassins (B₁ et B₂) situés à des altitudes identiques (Fig. 2.60) à la surface desquels règne une pression atmosphérique. La pompe P₁ est reliée au bassin B₁ par une conduite AB dont on ne pourra pas négliger les pertes de charge. La pompe P₂ est quant à elle immergée dans le bassin B₂ et fournit le débit Q₂. Les courbes caractéristiques des deux pompes (Hauteur manométrique et rendement en fonction du débit) sont rassemblées sur la figure 2.61. Les conduites de refoulement des deux pompes (C'D et CD) sont regroupées au point D (Ces conduites étant de longueur très courte, les pertes de charge y seront négligeables). Le débit Q est alors transporté dans une conduite DE jusqu'au point E. Au point E, on prélève un débit de 200 l/s pour alimenter un village (non représenté sur la figure) et l'on partage le débit restant dans les conduites EG et EF qui vont respectivement aux réservoirs R et R' à la surface desquels règne une pression atmosphérique. Les caractéristiques des conduites impliquées dans le problème sont rassemblées dans le tableau 2.14.

Tableau 2.14 Caractéristiques des conduites de l'exercice [E16].

Conduite	Longueur équivalente (m)	Diamètre (m)	λ
AB	1000	0,7	0,035
DE	2410	1,0	0,045
EG	1500	0,6	0,047
EF	3230	0,7	0,047

[1.] Déterminer les points de fonctionnement des deux pompes, et la puissance consommée par le système de pompage.

[2.] Estimer les débits traversant les conduites EF et EG. Vérifiez-vous le relation de conservation du débit, $Q_R + Q_{R'} + 200 \approx Q_1 + Q_2$?

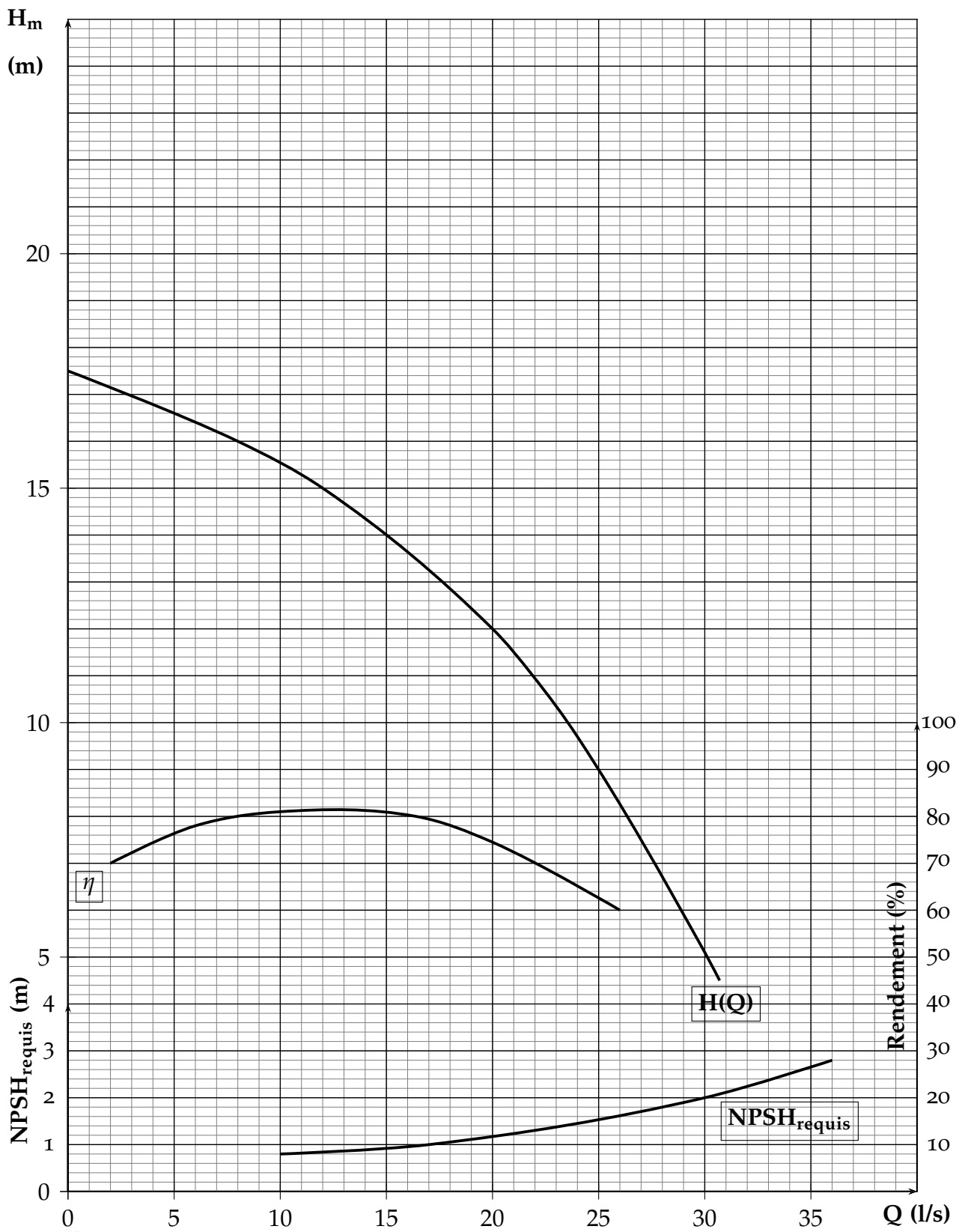


FIGURE 2.59 Courbes caractéristiques de la pompe de l'exercice [E14] à la vitesse de rotation $N = 1450$ tr/min.

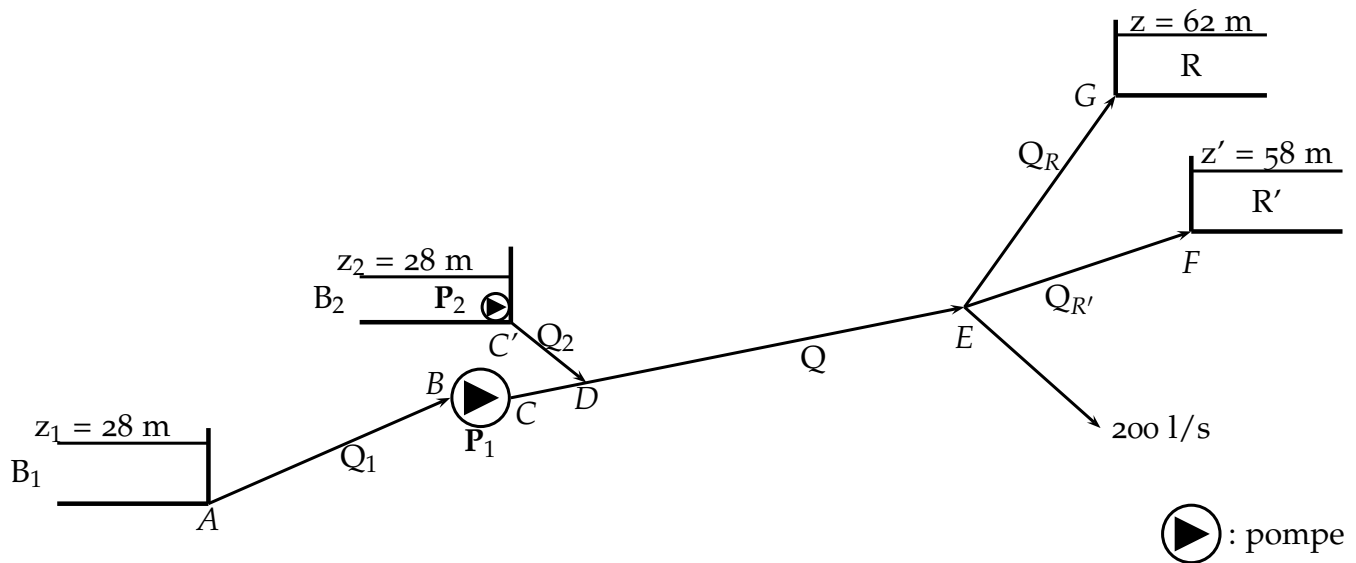


FIGURE 2.60 Schéma du réseau hydraulique de l'exercice [E16]. (Pour les besoins du dessin, les échelles et les perspectives ne sont pas respectées).

[E17] Régulation du débit de l'exercice [E16] ***

Cet exercice reprend les données de l'exercice [E16]. La conduite DE est cette fois pourvue d'une vanne permettant la régulation du débit alimentant les deux réservoirs. Il existe une relation entre la section de passage de l'eau à travers cette vanne et le coefficient de pertes de charge ξ . On ne s'intéressera pas ici à cette relation. Les pertes de charge générées par la vanne sont formulées par la relation $\Delta H_v = \xi \times V^2/2g$. La valeur de ξ est égale à 0 lorsque la vanne est totalement ouverte et tend vers une valeur infinie pour une section de passage de plus en plus faible. Le débit alimentant le réservoir R' doit être réduit à $Q_{R'} = 400 \text{ l/s}$. Estimez la valeur du coefficient de pertes de charge singulières ξ associé à l'état d'ouverture de la vanne permettant de satisfaire ce débit.

[E18] Famille de pompes *

On considère une pompe dont les aubes sont caractérisées par un diamètre extérieur égal à 190 mm, et délivrant un débit d'eau égal à $3,9 \text{ m}^3/\text{min}$ à une hauteur de 4,2 m lorsqu'elle tourne à une vitesse égale à 1800 tr/min. On souhaite utiliser une pompe de la même famille, ayant un diamètre plus important égal à 380 mm, et délivrant un débit d'eau salée égal à $54,5 \text{ m}^3/\text{min}$. La masse volumique de l'eau vaut 1000 kg/m^3 , et celle de l'eau salée 1025 kg/m^3 .

[1.] Quelle doit être la vitesse de rotation de cette nouvelle pompe ?

[2.] Quelle serait alors la pression délivrée par cette pompe ?

[E19] Adaptation d'un point de fonctionnement par variation de la vitesse de rotation ***

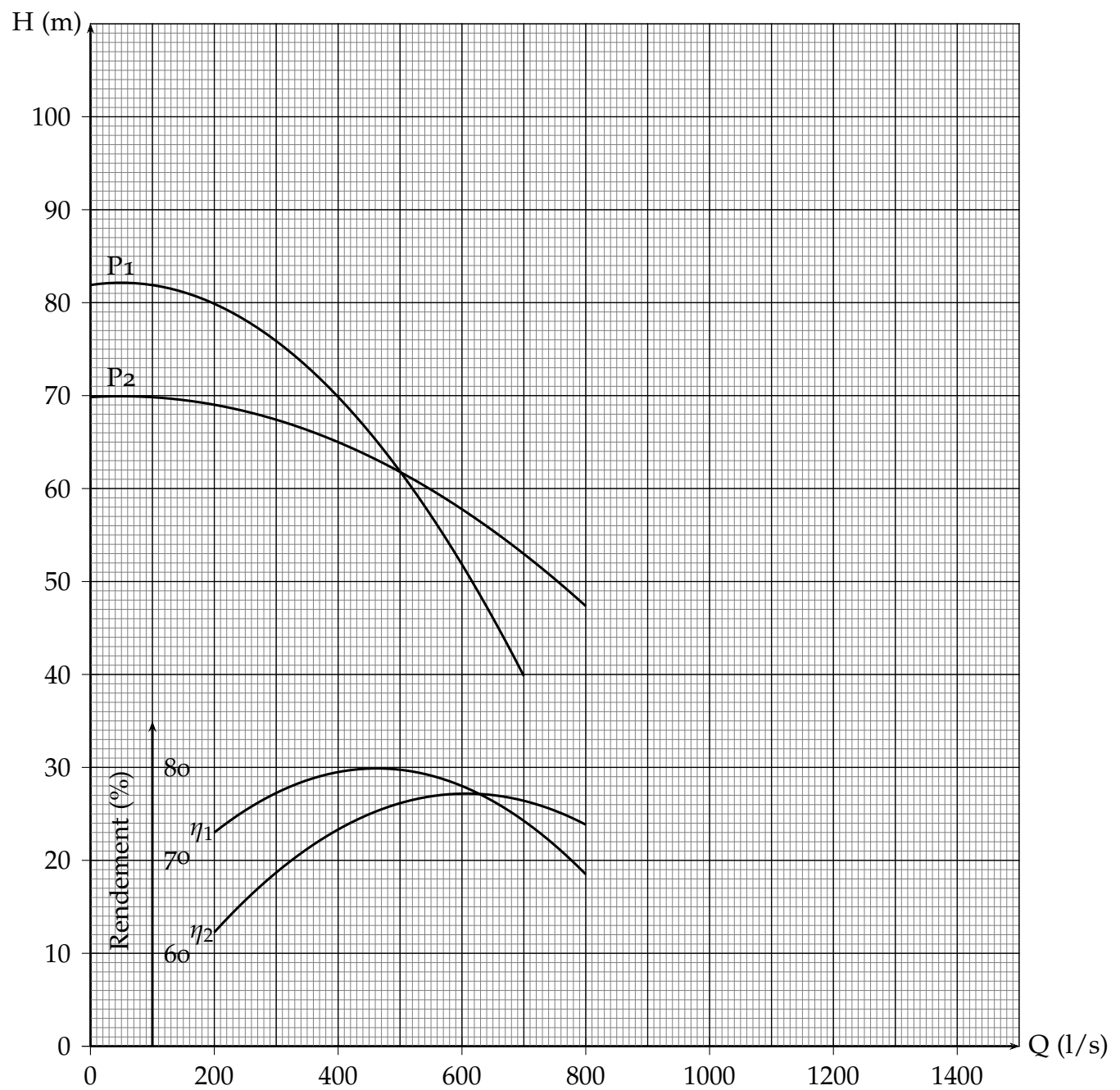


FIGURE 2.61 Courbes caractéristiques des pompes de l'exercice [E16].

Une pompe, fonctionnant à une vitesse de rotation égale à 1450 tr/min (Fig. 2.62), est utilisée pour alimenter un réservoir dont la surface libre est placée à 80 m au-dessus du plan de pompage. Le réseau hydraulique comprend une seule conduite de diamètre 169 mm, de longueur équivalente 1500 m, et de coefficient de pertes de charge $\lambda = 0,056$. À la vitesse de rotation de 1450 tr/min, le débit de fonctionnement vaut $Q_0 = 20$ l/s. Après un dysfonctionnement de la pompe, sa vitesse de rotation diminue, et le débit de fonctionnement vaut $Q_1 = 10$ l/s. Estimer la nouvelle vitesse de rotation, et tracez la nouvelle courbe de pompe pour valider cette vitesse.

H (m)



FIGURE 2.62 Courbe de la pompe de l'application de l'exercice [E19] ($N = 1450$ tr/min).

[E20] Pompe de la même famille *

Une pompe dont la roue a un diamètre $D_1 = 190$ mm fournit un débit $Q_1 = 4$ m³/min et une hauteur $H_1 = 40$ m (au rendement maximum) quand sa vitesse est $\omega_1 = 1800$ tr/min. On doit fournir, pour une autre application, un débit $Q_2 = 15$ m³/min pour

une hauteur $H_2=100$ m. Pour réaliser cela, quelle pompe de la même famille peut-on prendre : Diamètre (D_2) et vitesse (ω_2) ?

[E21] Quatre pompes de la même famille *

On dispose de 4 pompes identiques de diamètre de roue 225 mm. Lorsqu'elles sont placées en parallèle, et pour une vitesse de rotation de 1700 tr/min, cet ensemble délivre $11 \text{ m}^3/\text{min}$ pour une hauteur de 24,7 m. On désire utiliser des pompes de la même famille à 1250 tr/min, pour avoir $Q_2= 14,5 \text{ m}^3/\text{min}$ et $H_2= 248$ m. Une telle hauteur suppose une mise série. Quel est le diamètre de roue D_2 , et le nombre de pompes à mettre en série ?

[E22] Estimation du type de pompe *

On désire pomper un débit de 15 litres par seconde à une hauteur d'élévation de 20 m incluant les pertes de charge du réseau hydraulique. La vitesse de rotation du moteur de la pompe est de 1460 tours par minute. Quel type de pompe devrait-on utiliser ?

Phénomènes transitoires dans les conduites

Dans les systèmes hydrauliques en charge, les changements brusques de régime (arrêt ou démarrage d'une pompe pour les stations d'épuration par exemple) entraînent d'importantes variations de pression, appelées **coups de bélier**. Les contraintes générées sur le matériel dépassent dans la plupart des cas celles observées dans le régime statique ou permanent. Il devient dès lors très important d'analyser les différents régimes transitoires afin de mettre en place des mesures de protection adaptées. L'expérience montre que ce phénomène est très complexe, avec pour conséquence une absence de solution analytique. Nous verrons dans la suite de l'étude que dans le cas d'un écoulement dans une conduite pourvue d'une vanne, il existe deux comportements différents (élastique et incompressible). Les deux existent simultanément, mais un des deux comportement reste prépondérant selon le temps caractéristique de la variation du régime permanent. Il est très important aussi de bien noter de suite qu'il n'y a pas de déplacement de matière (ou très peu), mais plutôt un mouvement du fluide autour d'un v . Des études numériques ont été menées en ce sens pour examiner la possibilité de réduire les pressions provoquées par le phénomène de coup de bélier dans un réseau de conduites quasi-rigides en remplaçant l'une des conduites du réseau par une conduite viscoélastique en polymère [31]. Les résultats montrent l'influence de la présence de cette conduite et un amortissement des ondes est observé. leur moyenne. Afin d'exposer cette partie de façon graduelle, nous verrons les approches suivantes : (1) l'écoulement incompressible dans une conduite de section constante (**coup de bélier de masse**), (2) l'écoulement compressible dans une conduite de section constante, et (3) l'écoulement compressible dans une conduite de section variable (**coup de bélier d'ondes**).

3.1 Origine des phénomènes transitoires

Les phénomènes transitoires ont pour origine une variation de pression ou de débit en un point du réseau hydraulique. Les effets peuvent être très divers, il importe alors d'étudier la configuration du réseau hydraulique pour prédire les impacts des effets transitoires afin de proposer des solutions adéquates. Parmi toutes les origines possibles du coup de bélier, nous mentionnerons ici les configurations les plus susceptibles de générer des coups de bélier importants.

Un écoulement de liquide provenant d'un réservoir et traversant une conduite pourvue d'une vanne à son extrémité. Le débit est régulé à partir de l'obturation de cette dernière. Si la fermeture est trop rapide et n'est pas contrôlée correctement, les variations importantes de la pression ont lieu dans la partie finale de la fermeture.

Un réservoir alimentant un réseau de conduites dont chacune est pourvue d'une vanne de régulation. Ces vannes peuvent être ajustées indépendamment les unes des autres. Chaque ajustement sera à l'origine d'un coup de bélier dans le réseau entier, et leurs effets se cumulent.

Un autre exemple caractéristique est celui de la pompe alimentant un réservoir. Celle-ci est placée en amont d'une conduite pourvue d'un clapet anti-retour évitant tout retour de liquide dans la pompe quand celle-ci est arrêtée. Une fois la pompe stoppée, le liquide continue son mouvement consécutivement à son inertie. Une dépression apparaît alors au niveau du clapet susceptible de générer une cavitation. Ensuite, lors d'une deuxième étape le liquide retombe par effet de gravité sur le clapet. La surpression générée par ce retour de liquide peut être importante et détériorer la conduite. Ce phénomène est répété sur quelques périodes jusqu'à ce qu'il soit dissipé.

3.2 Conséquences des phénomènes transitoires

Si dans un circuit hydraulique, une vanne vient à être fermée instantanément, la face avant de la colonne liquide lancée à une vitesse V trouve la vanne fermée. La colonne voit alors son volume décroître, le liquide étant faiblement compressible, et sa vitesse diminuer. Le ralentissement de ce volume entraîne une augmentation de la pression près de la vanne. Cette dernière génère une dilatation de la conduite dans les limites élastiques (dans les meilleurs des cas). Une fois, cette colonne à l'arrêt, la colonne suivante est soumise à la même configuration. De ce fait, une onde de pression et de vitesse prend ainsi naissance à la vanne et s'éloigne de celle-ci. Le plus souvent elle est réfléchi le long de son parcours, lorsqu'elle atteint la base du réservoir par exemple, et donne alors naissance à une onde de dépression se dirigeant vers la vanne. Il existe alors une alternance de surpressions et de dépressions (par rapport à la pression de service) qui sont par la suite amorties par frottement. Ce phénomène est appelé *coup de Bélier*.

Il est important de noter que ces conditions d'alternance en pression peuvent endommager le matériel ce qui n'est pas visible de suite. Après une période assez longue

d'utilisation la canalisation peut se rompre ou des brides se desserrer avant d'être arrachée. L'origine du dommage est alors difficilement identifiable.

3.3 Équations générales du mouvement dans une conduite en régime transitoire

Nous avons jusqu'à présent inspecté des écoulements établis, c'est à dire des écoulements dont les paramètres ne dépendent pas du temps. Le fait de considérer cette fois des écoulements transitoires rajoute dans les équations du mouvement du fluide de nouveaux termes. Ce paragraphe se propose d'écrire les équations générales du mouvement des particules fluides dénuées de viscosité. Ces équations sont valables pour des filets de fluide, mais nous les étendrons à la conduite. Les différentes configurations étudiées par la suite nous permettront d'éliminer certains termes en vue de solutions analytiques.

Les liquides sont généralement considérés comme étant incompressibles mais ici on tiendra compte de leur légère compressibilité (la variation relative de leur masse volumique restant faible).

3.3.1 Équation de continuité

Le bilan de conservation de la masse a été présenté dans la section 1.2 et s'écrit dès lors que la section de la conduite est variable de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho S u) \quad (3.1)$$

Cette équation généralisée laisse la possibilité aux trois variables (masse volumique, section de passage et vitesse) d'évoluer au cours du temps et dans l'espace. Elle pourra néanmoins être simplifiée selon les hypothèses acceptées lors des coups de bélier de masse ou d'ondes.

3.3.2 Bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement a été présenté dans la section 1.3 et s'écrit d'après la relation (1.17) :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i$$

Nous considérerons dans la suite l'écoulement aligné selon un axe x horizontal. Les équations selon les deux autres directions seront donc ignorées dans les résolutions suivantes. D'autre part les efforts volumiques de pesanteur sont alignés selon l'axe z et orienté dans le sens négatif de ce dernier (*i.e.* $f_z = -gz$). Enfin les efforts de

viscosité étant supposés négligeables ici, la composante selon x du bilan de quantité de mouvement se résume à l'équation d'Euler :

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial}{\partial x}(gz) \\ &= -\frac{\partial p^*}{\partial x}\end{aligned}$$

avec $p^* = p + \rho gz$. Si on ne considère que des écoulements à l'horizontal, le terme de pression se simplifie et on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

Maintenant que les équations "générales" sont posées, intéressons-nous à différentes configurations pratiques. Nous procéderons dans la suite par étape en traitant en premier lieu le cas simple d'un écoulement incompressible lors de l'ouverture d'une vanne dans une conduite de section strictement constante. Ensuite, nous examinerons l'influence de la compressibilité du fluide et introduirons alors le concept d'onde. Pour terminer, la conduite sera considérée comme étant élastique et capable de se déformer sous l'influence des variations de pression.

3.4 Coup de béliet de masse

Lorsque les vitesses sont changées rapidement dans un écoulement, des variations de pression importantes sont notées et donc à éviter. Ceci n'est plus le cas si les conditions d'écoulement sont changées de façon lente. Dans cette configuration, les variations de pression sont minimales, la masse volumique du liquide reste quasiment constante, et les conduites peuvent être considérées comme étant indéformables. On parlera de coup de béliet de masse.

Nous étudierons dans un premier temps l'établissement de l'écoulement lors d'une ouverture de vanne afin d'appliquer les équations vues plus haut. Ensuite, le coup de béliet de masse sera abordé pour une fermeture de la vanne en bout de conduite. Nous verrons enfin qu'il est possible d'éviter de trop grandes variations de pression par l'utilisation de cheminée d'équilibre.

3.4.1 Ouverture d'une vanne : établissement de l'écoulement

On considère une conduite BC de longueur L précédée d'un convergent AB très court et assez prononcé, et pourvue d'une vanne en C (Fig. 3.3). Le but de ce calcul est d'estimer l'augmentation progressive de la vitesse de l'écoulement qui prend place lorsqu'on ouvre la vanne.

Dans le convergent AB, la variation de vitesse dans la direction de la conduite est très importante consécutivement à l'évolution rapide de la section de passage du liquide (i.e. $u_B \gg u_A$). De ce fait le terme instationnaire ($\partial u / \partial t$) de l'équation (3.2)

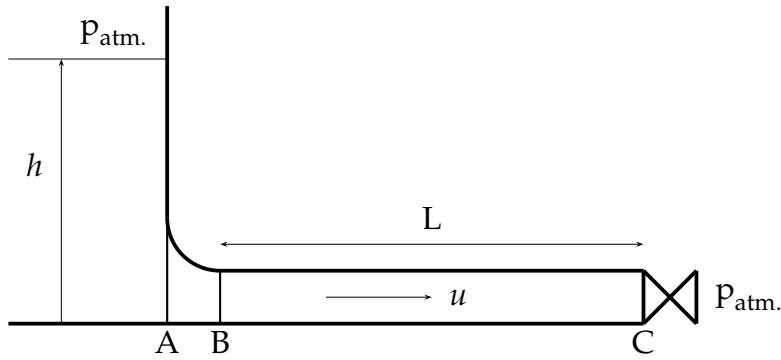


FIGURE 3.1 Installation avec une conduite à la base d'un réservoir.

devient négligeable devant le terme de convection ($\partial u / \partial x$). Cette équation devient alors :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

L'intégration spatiale le long du convergent de cette expression, en tenant compte d'une vitesse en entrée de convergent négligeable devant celle observée en sortie de convergent, donne :

$$u_B^2 = \frac{2}{\rho} (p_A - p_B) \quad (3.3)$$

La conduite BC quant à elle est caractérisée par une section constante, le bilan de masse (3.1) devient alors $\partial u / \partial x = 0$. La vitesse u ne dépend que du temps et non plus de la position dans cette conduite (on peut enlever l'indice B). L'équation d'Euler (3.2) est simplifiée à

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

intégrée le long de la conduite BC donne :

$$\rho L \frac{\partial u}{\partial t} = p_B - p_C$$

La relation (3.3) nous permet d'exprimer la pression en B en fonction de celle en A ainsi que de la vitesse au début de la conduite BC :

$$\rho L \frac{\partial u}{\partial t} = p_A - p_C - \frac{1}{2} \rho u^2$$

or $p_A = p_{\text{atm.}} + \rho gh$, et $p_C = p_{\text{atm.}}$, donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{gh}{L} - \frac{u^2}{2L}$$

que l'on peut écrire sous une autre forme, en isolant les paramètres de vitesse et de temps dans deux membres différents :

$$\frac{du}{1 - \frac{u^2}{2gh}} = \frac{gh}{L} dt$$

C'est là l'équation différentielle fondamentale de l'établissement du régime d'écoulement de l'eau dans une conduite dont la section de sortie est constante et qui est soumise à une pression h constante. En posant $v = u / \sqrt{2gh}$ et $\tau = \sqrt{2L^2/gh}$, il vient

$$\frac{dv}{1-v^2} = \frac{dt}{\tau}$$

La solution est obtenue en intégrant chacun des membres, il vient alors :

$$\operatorname{argth}(v) + \text{Cste} = \frac{t}{\tau}$$

À l'instant $t = 0$, la vitesse est nulle entraînant une valeur nulle de la constante. Finalement, on obtient la vitesse en sortie, dont l'évolution est donnée sur la figure 3.2 :

$$u(t) = \sqrt{2gh} \times \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

La constante de temps τ caractérise le temps nécessaire à l'écoulement pour atteindre quasiment une vitesse constante. On remarque d'après son expression que le régime est atteint d'autant plus rapidement que la conduite est courte et que la dénivellation est importante. On remarquera de plus, que l'expression de la vitesse du régime établi (i.e., $u = \sqrt{2gh}$, formule de Torricelli¹) pouvait être déduite de l'expression de Bernoulli stationnaire. On remarquera d'autre part que le temps caractéristique τ ne dépend pas de la masse volumique (représentant le fluide) et de la section de la conduite.

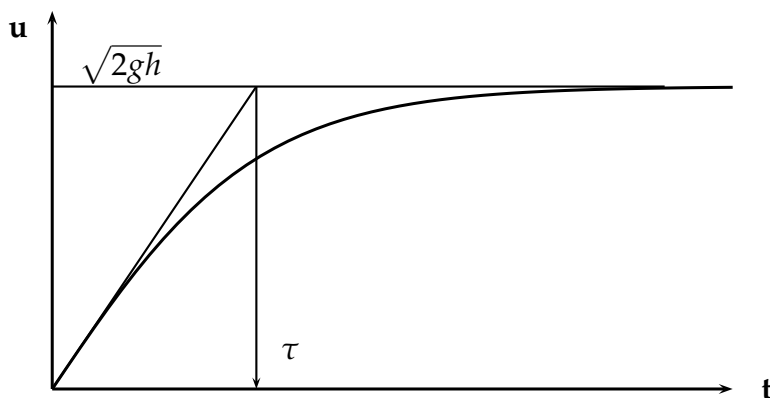


FIGURE 3.2 Évolution de la vitesse en sortie de conduite après ouverture à l'instant nul.

En réalité, l'écoulement n'atteint jamais cette vitesse pour des raisons de dissipation d'énergie par frottement : $u = K\sqrt{2gh}$, avec $K < 1$.

1. Evangelista Torricelli, physicien italien (1608-1647) fut le secrétaire et ami de Galilée durant les trois dernières années de sa vie. En étudiant le vide, il mit au point le premier baromètre à mercure en 1643-1644.

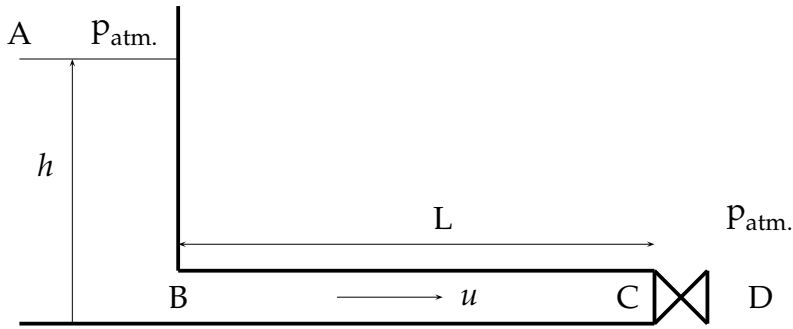


FIGURE 3.3 Installation avec une conduite à la base d'un réservoir.

3.4.2 Fermeture progressive d'une vanne

On considère une conduite d'adduction de longueur L , de diamètre D et d'épaisseur e (Fig. 3.3) constituée d'un matériau dont les propriétés mécaniques sont représentées par le module d'Young E . Les valeurs numériques de ces grandeurs sont rassemblées dans le tableau 3.1. La surface libre du bassin d'alimentation est localisée à une altitude égale à $h = 160$ m au-dessus du centre de la conduite BC. Celle-ci dispose d'une vanne en C initialement ouverte et générant des pertes de charge selon l'évolution :

$$\Delta h = 640 \times Q^2. \quad (3.4)$$

La vanne étant partiellement ouverte et n'ayant pas encore été manipulée, il existe un régime permanent. La vanne débouche à l'air libre en D, il règne donc en ce point une pression atmosphérique comme cela est le cas sur la surface libre du bassin d'alimentation (au point A). Le théorème de Bernoulli peut être appliqué, en vue d'une estimation du débit permanent, entre les points A et D :

$$\frac{p_{\text{atm.}}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_{\text{atm.}}}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g} + z_D + \Delta H$$

avec ΔH les pertes de charge générées par la vanne partiellement ouverte, estimées à partir de l'expression (3.24). La vitesse de la surface libre du réservoir est supposée nulle, de plus $h = z_A - z_D$, il vient alors :

$$h = \left(\frac{1}{2gS^2} + 640 \right) Q_o^2 \approx 640 Q^2 \quad \text{ou} \quad Q = \sqrt{\frac{h}{640}} = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

La vitesse de l'écoulement vaut donc $u_o = 2,5$ m/s. À l'instant $t = 0$ la vanne est fermée sur un temps $T = 13$ s, après quoi elle est totalement fermée et le débit devient nul. Le but de ce calcul est d'estimer la valeur de l'amplitude de variation de pression au cours de la fermeture de la vanne.

Tableau 3.1 Propriétés géométriques et mécanique de la canalisation d'adduction de la figure 3.3.

L (m)	D (cm)	e (cm)	E (MPa)
767	51	1,15	200 000

Nous le verrons plus loin (Cf. section 3.6), la manipulation est lente et on utilisera alors ici la théorie du coup de béliet de masse. On utilisera alors les équations de

conservation de la masse et l'équation d'Euler simplifiée en utilisant les hypothèses énoncées plus haut (*i.e.* $\rho = \text{Cste}$ et $S = \text{Cste}$). Elles s'écrivent respectivement pour la conduite BC :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

La première relation indique que la vitesse de l'écoulement est uniforme le long de la conduite BC. On peut intégrer la seconde relation entre les deux extrémités, il vient alors :

$$\rho L \frac{\partial u}{\partial t} = p_B - p_C$$

Le point B est placé au pied du réservoir imposant une hauteur importante, nous supposons alors que la pression en ce point ne varie donc pas dans le temps lorsque la vanne est manipulée. La variation de la pression dans la conduite BC s'écrit donc $\Delta p = p_C - p_B$, qui devient finalement

$$\Delta p = -\rho L \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.5)$$

On remarquera que le terme temporel est négatif consécutivement à la décélération de l'écoulement, générant alors une augmentation de la pression dans la conduite (*i.e.* $\Delta p > 0$). On note aussi que l'évaluation de la variation de pression est fortement liée à l'estimation de l'évolution temporelle de la vitesse. Cette dernière est généralement obtenue à l'aide de la connaissance des pertes de charge à l'origine du changement du point de fonctionnement.

Application numérique : la vitesse de l'écoulement passe donc d'une valeur numérique égale à 2,5 m/s à une valeur nulle en 13 s, on peut estimer la dérivée temporelle de cette vitesse par l'approximation $\partial u / \partial t \approx \Delta u / T$, soit $-0,20 \text{ m/s}^2$. De plus, étant données les valeurs du tableau 3.1, la surpression observée à une amplitude égale à 1,5 bar d'après la formulation (3.5). On note d'après cette formulation que la valeur numérique de la longueur de la conduite influence celle de l'amplitude de la variation de pression. Ainsi dans les conduites d'amenée des centrales hydroélectriques ces longueurs sont très élevées et peuvent donc être à l'origine d'une forte variation de pression liée au coup de bélier de masse. De ce fait, la présence de telles pressions pose d'énormes problèmes du point de vue du matériel. Il existe des systèmes limitant cette surpression. La cheminée d'équilibre, une de ces possibilités, est décrite dans la section suivante.

3.4.3 Atténuation du coup de bélier : la cheminée d'équilibre

Afin d'atténuer cet effet, il est possible d'introduire dans le système un réservoir capable soit d'accepter de l'eau en présence d'une surpression du fluide, soit capable d'en restituer à l'écoulement lors d'une dépression du fluide dans la conduite. Un système existant est la cheminée d'équilibre, schématisée sur la figure 3.4 et représentée page 121. La cheminée est localisée ici entre le bassin d'accumulation et la vanne à une distance L_c du pied du bassin d'alimentation.

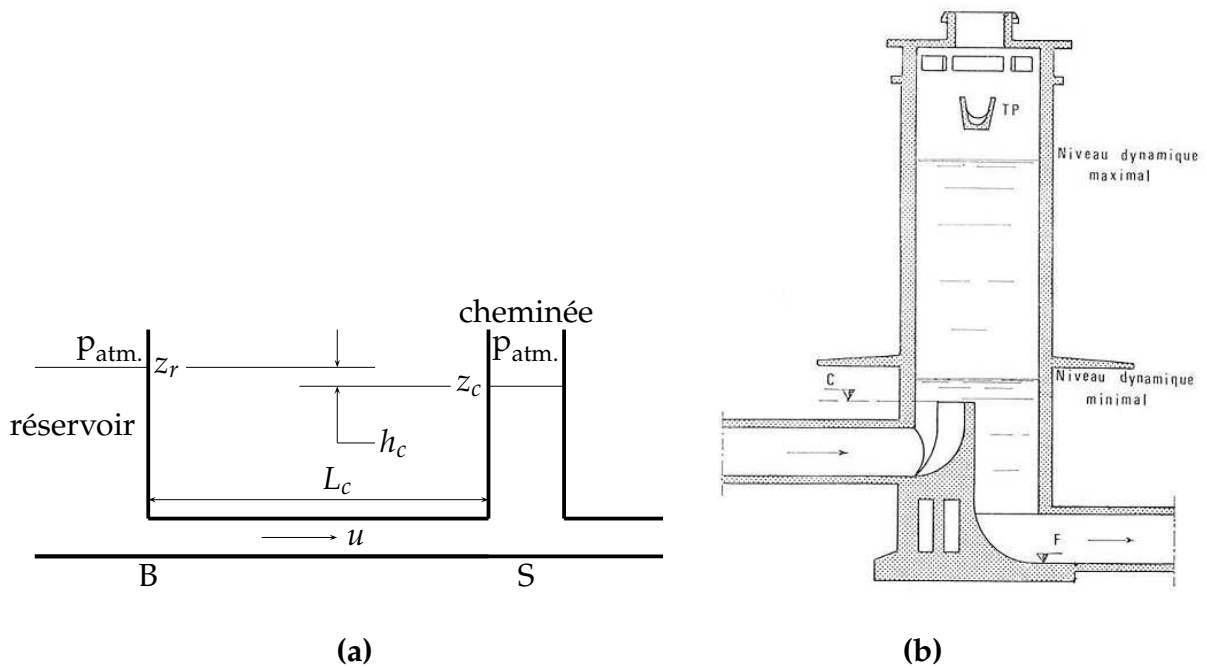


FIGURE 3.4 Cheminée d'équilibre. a, installation dans un réseau hydraulique ; b, vue en coupe (d'après Dupont [20]).

Lorsque la pression a tendance à baisser au pied de la cheminée par exemple, celle-ci fournit du liquide et permet d'ajuster la pression en fonction du niveau dans la cheminée ; en cas de surpression la cheminée est aussi capable d'accepter du liquide. Les variations de pression sont donc associées à des variations de volume. Jetons un oil sur les équations qui gouvernent ce problème.

On considère la cheminée de la figure précédente, de section S_c (alors que la conduite principale est caractérisée par une section S), dans lequel le niveau d'eau est repéré par la cote z_c (le niveau du réservoir z_r est supposé constant et sera le niveau de référence). On notera $h_c = z_c - z_r$, la différence de hauteur entre le niveau dans la cheminée et le réservoir. Notons qu'avant de fermer la vanne, les niveaux dans le réservoir et dans la cheminée sont sensiblement égaux.

L'équation d'Euler simplifiée et intégrée sur la longueur de la conduite BS donne :

$$\rho L_c \frac{\partial u}{\partial t} = p_B - p_S = -\rho g h_c \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{L_c} h_c \quad (3.6)$$

On note que l'évolution de la vitesse et la variation de hauteur sont de signes opposés. Une décroissance de la vitesse est caractérisée par une augmentation de la hauteur dans la cheminée. Celle-ci gnrera une pression $\rho g h$ d'autant plus importante, qui aura pour rôle de s'opposer au mouvement du fluide. Le débit sera dès lors graduellement réduit. Le rôle d'une cheminée d'équilibre vient d'être mis en évidence.

Rappelons que la surpression cree par la fermeture de la vanne est caractérisée par un soulèvement de la surface libre dans la cheminée, et ensuite des oscillations de

celle-ci. On cherche alors à mettre en place une équation différentielle de cette hauteur, ayant pour solution un terme sinusoïdal. La relation (3.6) correspond presque à ce que l'on recherche, mis à part le fait que la vitesse intervienne. Afin de faire apparaître le terme h , utilisons la conservation du débit massique de la conduite vers la cheminée :

$$\rho S u = \rho S_c \frac{\partial z_c}{\partial t} = \rho S_c \frac{\partial h_c}{\partial t}$$

que l'on peut dériver par rapport au temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{S_c}{S} \frac{\partial^2 h_c}{\partial t^2}$$

À partir de la relation (3.6), on a :

$\frac{\partial^2 h_c}{\partial t^2} + \frac{S g}{S_c L_c} h_c = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 h_c}{\partial t^2} + \Omega^2 h_c(t) = 0 \quad (3.7)$

le niveau de l'eau dans la cheminée laisse donc apparaître des oscillations de pulsation $\Omega = \sqrt{S g / S_c L_c}$. La solution de cette équation est de la forme $h_c(t) = A \times \sin(\Omega t + \Phi)$. Les paramètres A et Φ sont déterminés à l'aide de conditions à l'instant initial :

- les niveaux des deux réservoirs sont égaux ($h_c(0) = 0$), d'où $\Phi = 0$.
- le débit est transmis à la cheminée, soit $su_0 = S \left. \frac{\partial h_c}{\partial t} \right|_{t=0}$, entraînant ainsi $A = Su_0 / S\Omega = u_0 \sqrt{SL / S_c g}$.

Ainsi, la solution devient $h_c(t) = u_0 \sqrt{SL / S_c g} \times \sin(\Omega t)$ et le maximum de surpression est alors associé à un maximum de dénivelé, soit :

$$\Delta p_{\text{Max}} \equiv \rho g h_{c,\text{Max}} = \rho g \sqrt{\frac{SL_c}{S_c g}} u_0.$$

Application numérique : si l'on reste dans le cas de la conduite précédente, avec en plus une cheminée de diamètre trois fois plus grand que celui de la conduite (*i.e.* $S_c = 9S$), il vient $\Delta p_{\text{Max}} = 1000 \times 9,81 \times 2,5 \times \sqrt{767 / (9 \times 9,81)} = 0,7$ bar, au lieu des 1,5 bar dans le cas de la conduite sans cheminée. Ce système est largement utilisé dans le cas d'alimentation de turbine afin d'amortir les brusques variations dans la manœuvre du distributeur de la turbine.

Ainsi, la cheminée d'équilibre transforme le coup de bélier, consécutif à l'augmentation subite de la pression de l'eau provoquée par la fermeture rapide des vannes, en un phénomène d'oscillations de masse. L'eau monte dans la cheminée et la pression se trouve ainsi équilibrée. La section doit être assez importante pour ne pas entraîner de vidange totale en présence d'une forte dépression et une hauteur suffisante pour éviter tout débordement au passage d'une surpression. La jonction d'une cheminée avec la conduite principale doit être judicieuse afin d'éviter de grandes pertes de charge.



Les 7 chutes, St Ferreol des Neiges, QUEBEC.

Ces résultats ne sont valables que pour des temps de fermeture ou d'ouverture lents. L'application de ces lois dans le cas d'ouverture plus courte indiquerait des surpressions beaucoup plus grandes que celles observées. En effet, si les variations de pression sont suffisamment rapides et importantes, l'eau devient un fluide compressible susceptible de propager des ondes à grande vitesse. Le reste du chapitre s'intéresse aux effets de cette compressibilité.

3.5 Coup de bélier d'ondes

L'introduction de la compressibilité du fluide impose irrémédiablement le concept d'ondes dans notre démarche. Après avoir présenté de façon plus précise le concept de compressibilité, nous essayerons donc ici de mettre en place l'équation de propagation des ondes dans le milieu à partir des deux équations habituelles : l'équation de continuité et le bilan de quantité de mouvement.

En premier lieu, la conduite sera supposée comme étant indéformable, ses propriétés mécaniques et géométriques n'apparaîtront donc pas dans le problème. La célérité sera alors définie à partir des propriétés du fluide. Tout se passe donc comme si les ondes se propageaient de façon anisotrope dans un milieu non borné.

Lors d'une deuxième étape, la conduite sera supposée comme étant déformable consécutivement à des variations de pressions. Dès lors, nous essayerons d'introduire les paramètres mécaniques et géométriques dans la célérité des ondes.

3.5.1 Compressibilité et célérité des liquides

La compressibilité est une caractéristique d'un corps (solide ou fluide), définissant sa variation relative de volume sous l'effet d'une pression appliquée. Elle peut être

définie au moyen de son coefficient de compressibilité χ , tel que :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (3.8)$$

représentant la variation de volume dV associée à un accroissement de pression dp et possède les dimensions de l'inverse d'une pression [m^2/N]. Étant donnée l'expression du volume massique $V = \rho^{-1}$, on a

$$\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (3.9)$$

On donne dans le tableau 3.2 la compressibilité de l'air, de l'eau et de l'acier. On remarque que l'eau est 15000 fois moins compressible que l'air, mais l'est 100 fois plus que l'acier.

Tableau 3.2 Propriétés physiques de trois milieux différents.

	χ (m^2/N)	ρ (kg/m^3)	c (m/s)
Air	$7,14 \times 10^{-6}$	1,21	343
Eau	$0,5 \times 10^{-9}$	998	1481
Acier	$5,0 \times 10^{-12}$	7700	5000

La possible compressibilité d'un fluide est à l'origine d'ondes (de surpression ou de dépression) dans le milieu considéré. La valeur de cette célérité dans le matériau dépend de la valeur de la compressibilité par la relation :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho \chi} \quad (3.10)$$

Cette expression met en évidence des célérités différentes dans l'air, l'eau ou l'acier (Tableau 3.2).

Le prochain paragraphe se propose d'inspecter la propagation d'une onde issue d'une perturbation locale, mais toujours en considérant la conduite pourvue d'une section constante (n'allons pas trop vite).

3.5.2 Propagation d'une onde plane dans une conduite circulaire indéformable

L'objectif de cette partie est d'atteindre les solutions d'onde de pression se propageant dans la conduite suite à une variation subite des conditions de fonctionnement. Le passage de l'onde agite le fluide à une certaine vitesse, u , qui sera supposée être négligeable devant la célérité de l'onde.

Lorsqu'on ferme une vanne, la compressibilité du fluide entraîne un écrasement de la première tranche contre cette dernière : (ABCD) devient (A'B'CD) sur la figure 3.5. La pression de la première tranche augmente avec la diminution de son volume.

Une fois celle-ci arrêtée, la deuxième tranche subit la même décélération, et la même compression. Cette compression est véhiculée de proche en proche et ne s'apparente plus alors à un mouvement en bloc mais plutôt à la propagation d'une onde dont on va estimer la célérité².

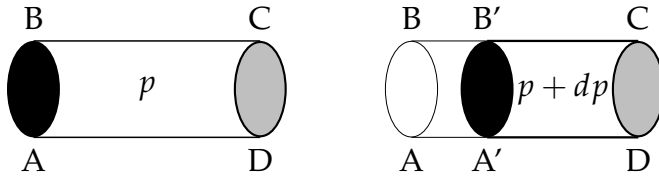


FIGURE 3.5 Écrasement d'un volume de fluide lors de la fermeture d'une vanne.

Le paragraphe 3.3 nous a permis de mettre en place les équations générales qui gouvernent le mouvement des particules. Dans le cas de fluide compressible, les équations de continuité et d'Euler deviennent respectivement (en tenant compte du fait que la section reste constante) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

On supposera que les termes de convection sont négligeables devant les autres termes :

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} \ll \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \quad \quad u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ceci est légitime à partir de l'instant où la vanne est fermée, le déplacement des particules est très inférieur à la variation des paramètres au passage de l'onde. Il reste alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

Les équations (3.11) et (3.12) font apparaître trois paramètres, ρ , u et p . On peut en éliminer un à l'aide de la relation (3.10) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \times \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

La relation (3.11) devient alors :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

Intéressons-nous maintenant à la différence $\partial(3.12)/\partial x - \partial(3.13)/\partial t$, on trouve la relation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.14)$$

2. Dans ce cas, on parlera de la célérité au lieu de la vitesse de l'onde, la dénomination de vitesse étant associée à un déplacement de matière.

On remarquera que la dérivée de la masse volumique a été négligée, en effet cette étude s'intéresse à des fluides faiblement compressibles. On pourra aussi vérifier que u satisfait à la même équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.15)$$

Nous reconnaissons ici l'équation de propagation d'une onde. Cette relation intervient aussi dans les études concernant les cordes vibrantes, les ondes acoustiques, le rayonnement électromagnétique, etc. Il s'agit dans tous les cas d'une équation différentielle du second ordre du paramètre étudié ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

La solution contient deux termes, $F(t - x/c)$ et $f(t + x/c)$. Le premier terme caractérise une onde qui se propage vers les x positifs, c'est à dire dans le sens de l'écoulement permanent (onde progressive); le deuxième une onde se propageant dans le sens inverse à l'écoulement (onde régressive).

La vitesse d'agitation des particules fluides u et la pression p ont donc des solutions équivalentes :

$$p - p_o = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (3.16)$$

$$u - u_o = \frac{1}{\rho c} \left[F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] \quad (3.17)$$

où les indices indiquent des conditions initiales. Les fonctions F et f doivent être homogènes à une pression. Ces expressions, appelée dans la littérature **Formules d'Allievi**³, peuvent être vérifiées par la satisfaction des équations (3.12) et (3.13). C'est à partir de ces équations que la méthode graphique de Bergeron a été introduite (§ 3.8).

Les fonctions F et f représentant des ondes de pression se propageant sans déformation respectivement dans les sens positif et négatif, à une abscisse x dans la conduite, la pression $p - p_o$ est la superposition de ces deux ondes.

Les variations de pression et de vitesse vont donc se propager dans la conduite à la vitesse c , il faut bien comprendre qu'il ne s'agit pas d'un mouvement de matière mais du déplacement d'une information. L'exemple même est celui d'une vague (l'information) qui se déplace et la bouée (matière) à la surface de la mer qui oscille en hauteur sans se déplacer.

3. Lorenzo Allievi (1856-1941), ingénieur italien ayant travaillé sur les problèmes transitoires dans les centrales hydroélectriques.

3.5.3 Propagation d'une onde plane dans une conduite cylindrique élastique

La conduite est cette fois assimilée à un cylindre déformable de faible épaisseur e devant son diamètre interne D . On supposera néanmoins que la section du tube reste circulaire au cours de sa déformation. Celle-ci n'empêche pas la propagation d'ondes de surpression et de dépression toujours régies par une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

avec a la célérité des ondes telles que :

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \left(\chi + \frac{D}{eE} \right)}} \quad (3.18)$$

Prenons le temps d'examiner les expressions (3.10) et (3.18), expressions des célérités d'une onde dans une conduite de section strictement constante et dans une conduite élastique. Tout se passe comme si le coefficient de compressibilité était augmenté dans le deuxième cas par D/eE , de ce fait la célérité de l'onde dans la conduite est inférieure à celle de cette même onde dans le même milieu libre. De plus, l'influence de la déformation de la conduite n'est appréciable que pour les fluides pratiquement incompressibles, pour lesquels χ et D/eE sont à peu près du même ordre de grandeur. Elle est négligeable pour les gaz.

Application numérique : $\chi = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $e=2 \text{ mm}$, $D=200 \text{ mm}$, $E = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$:

célérité (m/s)	
Section constante	Section variable
1414	1000

Lorsque la tuyauterie devient très déformable, le module d'Young diminue, et le terme D/eE devient prépondérant. C'est le cas des artères où la célérité de l'onde sanguine, c'est à dire de la surpression provoquée par le cœur, est seulement de l'ordre de 10 m/s.

3.5.4 Évolution de la pression dans une conduite lors d'une fermeture instantanée d'une vanne.

On considère de nouveau la conduite d'adduction utilisée lors du coup de bélier en masse, de longueur $L = 767 \text{ m}$, représentée sur la figure 3.3. Les propriétés de la conduite ont été données dans le tableau 3.1. Le point C est localisé en amont de la vanne et le point B à l'embouchure du réservoir dont la surface libre est située 160 m au-dessus de la conduite BC (cette différence d'altitude est notée h sur le schéma).

Comme précédemment, en régime permanent, la vanne est ouverte selon la loi de perte de charge $\Delta h = 640 \times Q^2$ assurant un écoulement de vitesse égale à $u = 2,5$ m/s (Cf. paragraphe 3.4.2). Le phénomène du coup de bélier d'onde fait apparaître des états de vitesse et de pression différents dans le temps selon l'endroit dans la conduite. De ce fait nous utiliserons ici un indice "o" caractérisant des valeurs initiales, c'est à dire avant la modification de la vanne dans notre cas. De ce fait, initialement, la vitesse de l'écoulement vaut $u_o = 2,5$ m/s et la pression $p_o = 15,7$ bar (ou $h_o = 160$ m lorsqu'elle est exprimée en mètre de colonne d'eau). L'onde mettra un temps L/a pour aller d'une extrémité de la conduite à l'autre.

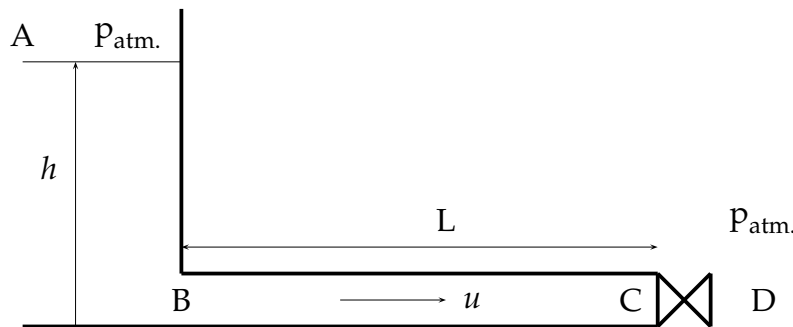


FIGURE 3.3 Installation avec une conduite à la base d'un réservoir.

↪ À $t = 0$, on ferme brusquement la vanne sur laquelle s'écrase la première tranche. La diminution de vitesse de cette première tranche provoque une augmentation de la pression et ainsi une dilatation de l'élément de conduite en contact avec celle-ci. Une fois la déformation élastique de la première tranche terminée, la deuxième tranche est arrêtée à son tour. Son énergie de vitesse est à son tour absorbée par le travail de compression de l'eau et de dilatation des parois. L'onde créée est une onde régressive, f dont la célérité vaut a . Les solutions d'Allievi s'écrivent :

$$p - p_o = f \left(t + \frac{x}{a} \right) = \Delta p \quad \text{et} \quad 0 - u_o = \frac{1}{\rho a} \left[-f \left(t + \frac{x}{a} \right) \right]$$

L'onde régressive est donc une onde de surpression $f = \rho a u_o$ remontant le long de la conduite (Fig. 3.6.a). La pression dans la conduite en amont de l'onde vaut $p = p_o + \rho a u_o$.

↪ À $t = \tau$, l'onde arrive en A et arrête sa progression et tout le liquide contenu dans la conduite est arrêté (Fig. 3.6.b). Il n'y a pas équilibre car le fluide est en surpression comparativement au réservoir. Il y a alors naissance d'une onde progressive. D'après l'expression des solutions d'Allievi

$$p_o - (p_o + \rho a u_o) = F \left(t - \frac{x}{a} \right) \quad \text{et} \quad u - 0 = \frac{1}{\rho a} \left[F \left(t - \frac{x}{a} \right) \right]$$

cette onde progressive est une onde de dépression ($F = -\rho a u_o$). D'autre part, l'eau (en trop) dans la conduite repart dans le réservoir ($u = -u_o$). L'onde de surpression vient d'être réfléchiée en une onde de dépression qui se propage alors vers la vanne avec toujours la vitesse a (Fig. 3.6.c) : **l'onde de pression change de signe lors de**

sa réflexion sur le plan d'eau. L'écoulement généré, quant à lui, se produit vers le bassin (le fluide "en trop" retourne dans le bassin). De proche en proche, les tranches de liquide et le tuyau retrouvent leur état d'origine.

↷ À $t = 2\tau$, l'onde de dépression arrive sur la vanne (Fig. 3.6.d). La pression du fluide est en équilibre avec celle du bassin, la conduite n'est pas dilatée. Cependant l'eau a un mouvement vers le bassin avec une vanne fermée. Il y a alors création d'une onde f sur la vanne :

$$0 - (-u_o) = \frac{1}{\rho a}(-f) \Rightarrow f = -\rho a u_o$$

$$p - p_o = f \Rightarrow p = p_o - \rho a u_o$$

L'onde réfléchie, reste une onde de dépression se propageant à la célérité a vers le bassin (Fig. 3.6.e) **l'onde de pression conserve son signe lors d'une réflexion sur la vanne.**

↷ À $t = 3\tau$, l'onde régressive atteint le réservoir (Fig. 3.6.f). Toute la conduite est en dépression, et l'écoulement s'arrête. Une dépression régnant dans la conduite, l'eau du bassin rentre dans la conduite. Il y a naissance d'une onde progressive au niveau du bassin :

$$p_o - (p_o - \rho a u_o) = F \Rightarrow F = \rho a u_o$$

$$u - 0 = \frac{1}{\rho a} F \left(t - \frac{x}{a} \right) \Rightarrow u = u_o$$

Il s'agit d'une onde progressive de surpression, associée à un mouvement du fluide vers la vanne (Fig. 3.6.g).

↷ À $t = 4\tau$, le cycle est fini, l'onde progressive atteint la vanne. Un nouveau cycle prend place.

Le phénomène est donc périodique, il se produit à l'identique avec la période :

$$\boxed{T = \frac{4L}{a}} \quad (3.19)$$

L'ensemble de ce qui vient d'être dit est résumé sur la figure 3.7. Pour connaître les conditions de pression et de vitesse dans la canalisation au point P d'abscisse x à l'instant t , il faut se souvenir que celles-ci correspondent à la superposition d'ondes progressive et régressive. La première est partie du réservoir à l'instant $t - x/a$ avec une vitesse $+a$, et la deuxième de la vanne à l'instant $t + (L - x)/a$ avec une vitesse $-a$. La résolution de ce problème passe par l'écriture des deux équations d'onde et de leur condition limite respective. On pourra pour cela utiliser la méthode de Bergeron, introduite au paragraphe 3.8 (p. 135).

Application numérique : on note dans cette application des suppressions et des dépressions

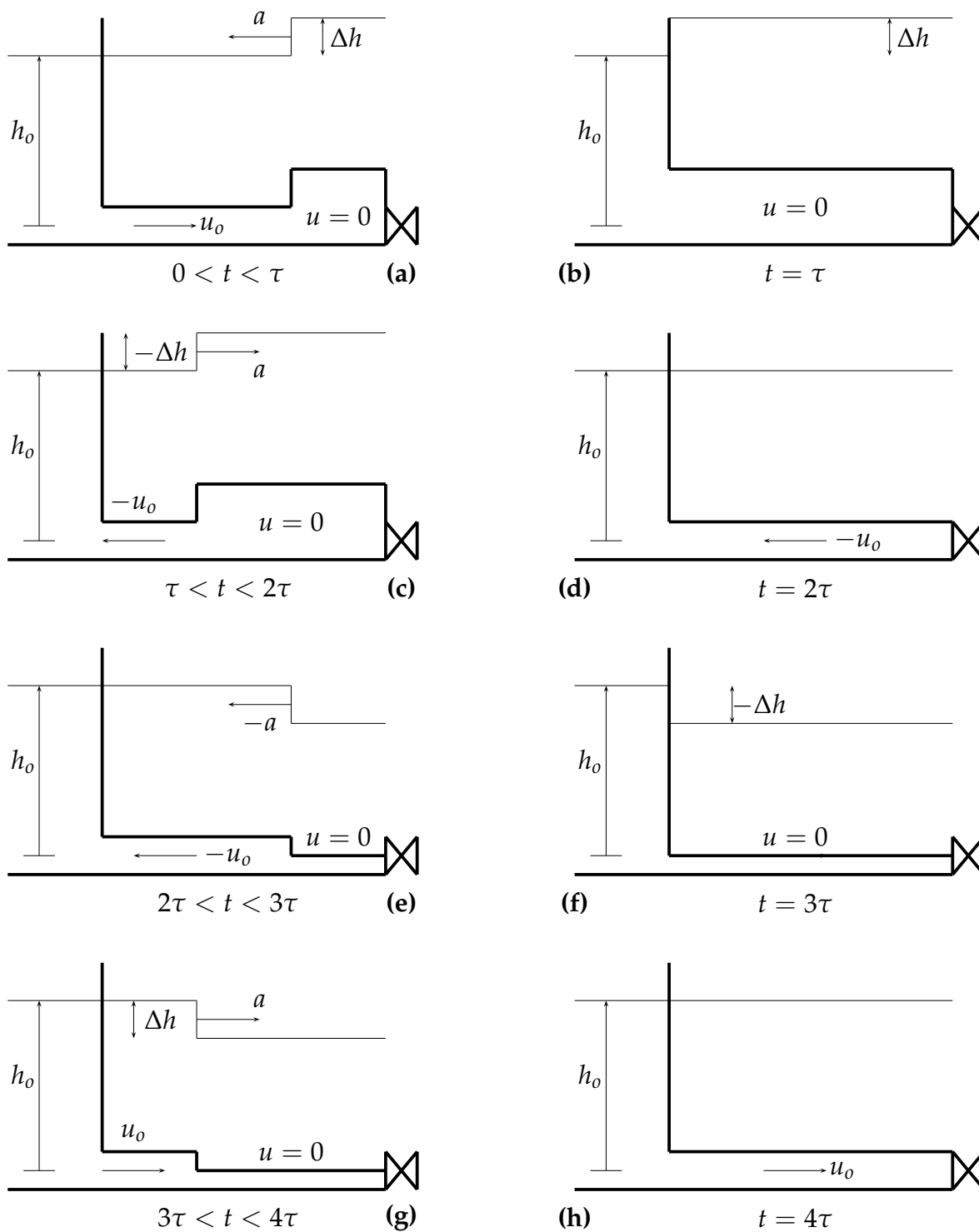


FIGURE 3.6 Coup de bélier lors d'une fermeture instantanée de la vanne située à l'extrémité de la conduite.

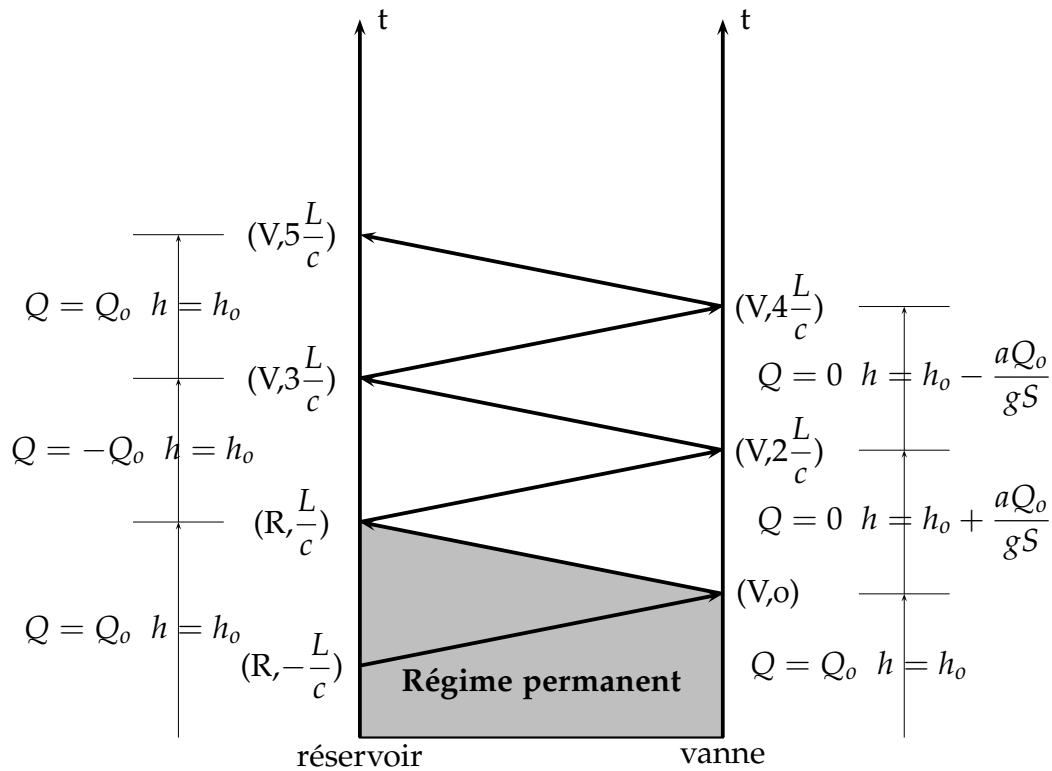


FIGURE 3.7 Descriptif du comportement des ondes au cours du coup de bélier (notation : $h = p/(\rho g)$.)

ayant des valeurs $\pm \rho a u_0 = 29,4$ bar. Cette valeur numérique très élevée est liée à la production d'une seule onde produite par fermeture instantanée, ce qui n'est jamais observé dans les installations réelles. D'autre part, on observe généralement une atténuation de ce phénomène consécutivement aux pertes de charge et aux imperfections de l'élasticité de la conduite (figure 3.8). Néanmoins cette décroissance est lente car la transformation d'énergie en chaleur de frottement suite aux phénomènes précédents est peu importante, et les variations de pression sont alors persistantes.

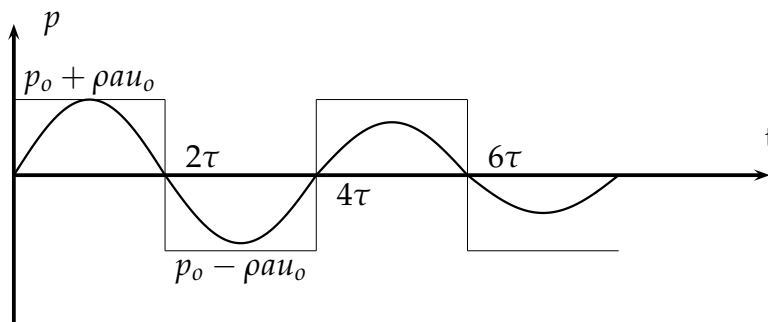


FIGURE 3.8 Comportement de la pression au cours du coup de bélier.

Rappelons les différentes hypothèses :

- Nous avons considéré des réflexions d'ondes uniquement en bout de conduite, en réalité on observe des réflexions en présence d'une singularité dans l'écoulement (changement de section,...);
- La conduite a été considérée comme un empilement d'anneaux qui se dilataient au fur et à mesure des passages de l'onde de pression. En fait, l'inertie et l'élasticité de la conduite entraînent des oscillations de celle-ci. Néanmoins la théorie élémentaire du coup de bélier correspond assez bien à ce qui est observé expérimentalement ;
- La fermeture n'est pas réellement instantanée et la pression ne varie pas brusquement mais progressivement. En particulier, si le temps de fermeture vaut $t_f > 2\tau$, le coup de bélier est diminué car pour $t > 2\tau$ il y a superposition de l'onde de pression et de dépression ;
- L'expression précédente peut de même être utilisée en cas de fermeture d'une vanne : si le débit passe de Q_0 à Q_1 , il vient alors :

$$\Delta p = \rho a \frac{Q_0 - Q_1}{S} \quad (3.20)$$

3.6 Considérations pratiques

Depuis le début de ce chapitre, la notion, plus que floue, de fermetures et d'ouvertures rapides ou lentes est utilisée. On est en droit dans ce cas de se demander à partir de quel instant, l'ouverture est considérée comme lente ou rapide. Nous allons essayer de répondre à cette question.

Considérons toujours notre conduite AB de longueur L orientée de A vers B . À l'instant initial $t = 0$, la vanne en B est fermée. Alors à l'instant $t = 2\tau$, l'onde régressive de retour F arrive en B . Si à cet instant, la manœuvre de fermeture de la vanne est terminée (n'oublions pas que c'est elle qui est génératrice de l'onde f), la manœuvre est dite *rapide*. Si cette manœuvre n'est pas finie, l'onde de retour F se superpose à l'onde régressive f qui continue de prendre naissance en B (manœuvre *lente*).

Cette estimation nous guide dans le choix de la théorie à choisir : le coup de bélier d'onde ou le coup de bélier en masse. Récapitulons :

- si $t_f < 2\tau$: la manœuvre est rapide, on adopte la théorie du coup de bélier d'onde. La surpression maximum est donnée par $\Delta p = \rho a u_0$;
- si $t_f \gg 2\tau$: la manœuvre est lente, et le coup de Bélier est moins important. On adopte la théorie du coup de bélier en masse. La surpression maximum est donnée par $\Delta p = -\rho L \frac{\partial u}{\partial t}$.

3.7 Moyens de protection des conduites

Au moment de la conception, l'ingénieur peut choisir des solutions techniques, qui atténuent le coup de bélier : (1) le **diamètre de la conduite** : le choix d'un diamètre plus élevé réduit les pertes charges, mais aussi le coup de bélier puisque la vitesse de l'écoulement est plus faible (rappelons que la surpression est proportionnelle à la vitesse) ; (2) le **matériau de la conduite** : la valeur de la surpression dépend de la célérité de l'onde dans la conduite. Cette dernière est relative à la rigidité de la conduite *via* la valeur du module d'Young. Des études ont été menées en ce sens pour examiner la possibilité de réduire l'amplitude des variations de pression provoquées par le phénomène de coup de bélier en plaçant une conduite viscoélastique en polymère dans le réseau hydraulique constitué par ailleurs de conduites en matériau classique. Ceci a été réalisé dans une réseau constitué d'un seul tronçon [28] ou constitué de plusieurs ramifications de conduites quasi-rigides en remplaçant l'une de ces conduites par une conduite en polymère [31]. Dans tous les cas, les résultats montrent l'influence de la présence de cette conduite et un amortissement des ondes est observé. Ceci reste vrai pour des fermetures rapides de la vanne. En effet, le coup de bélier en masse ne fait pas intervenir le matériau de la conduite.

Il existe d'autre part des moyens de protections dont le rôle est de limiter la dépression et la surpression, le but n'étant pas de supprimer le coup de bélier car ceci est impossible. Les moyens les plus régulièrement utilisés sont le volant d'inertie, la soupape de décharge, les réservoirs d'air et les cheminées d'équilibre (étudiées précédemment).

3.7.1 Les volants d'inertie

Les volants d'inertie permettent de prolonger l'alimentation en débit d'une conduite malgré la disjonction d'une pompe par l'augmentation des moments d'inertie des masses tournantes (Fig. 3.9). Ceux-ci sont calés sur l'arbre du groupe, et restituent après cette disjonction l'énergie accumulée pendant la marche normale, augmentant ainsi le temps d'arrêt de l'ensemble. L'intensité du coup de bélier se trouve donc diminuée. Ce moyen, très efficace, reste limité car il nécessite un surdimensionnement d'entraînement pour vaincre le couple au démarrage de la pompe. Il sera donc intéressant exclusivement pour des conduites courtes.

L'amortissement généré par ces volants dépend fortement de leurs dimensions, sachant qu'elles sont restreintes par la place dont dispose le système de pompage. Dans le cas du volant illustré sur la figure 3.10, le moment d'inertie de ce volume de révolution par rapport à l'axe de rotation $O\vec{z}$ vaut

$$I = m \frac{R_2^2 + R_1^2}{2}$$

De ce fait, au moment de l'arrêt brusque du moteur, le volant d'inertie a accumulé une énergie cinétique égale à $1/2 \times I\omega^2$. D'après le théorème de l'énergie cinétique, la variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des efforts extérieurs,

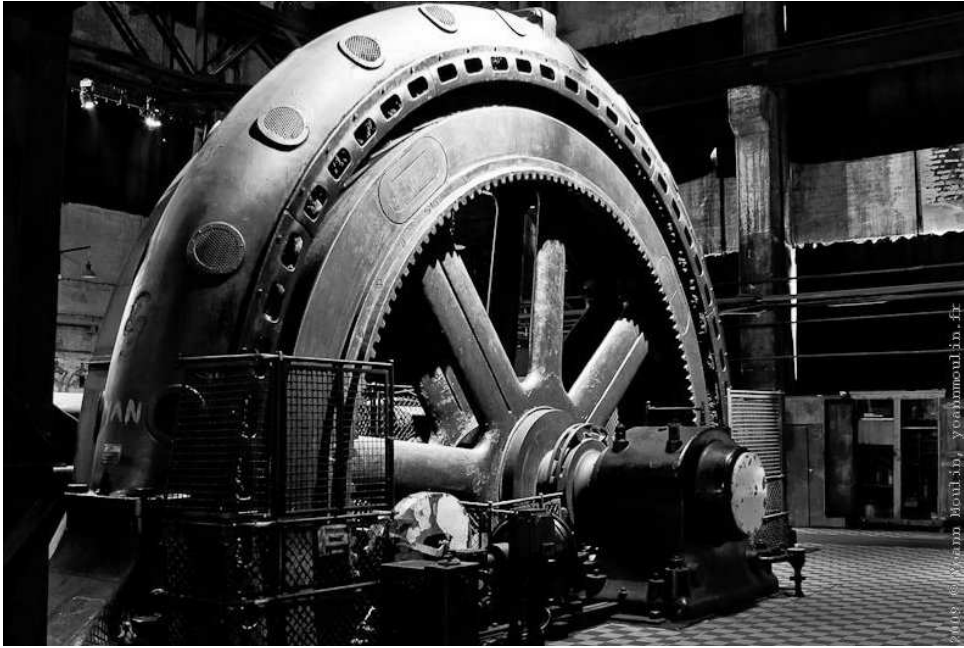


FIGURE 3.9 Volant d'inertie (d'après Yoann Moulin [39]).

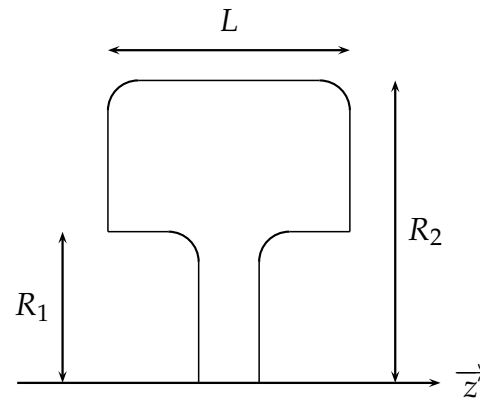


FIGURE 3.10 Section d'un volant d'inertie.

soit ici $C\omega dt$ pendant le temps dt . Par conséquence, d'après ce théorème :

$$d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = C\omega dt$$

En développant, et en passant aux différences finies, cette relation s'écrit finalement :

$$\Delta\omega = \frac{C}{I}\Delta t \quad (3.21)$$

Ainsi, à partir de la vitesse angulaire au moment de la disjonction, il est possible d'estimer les vitesses successives ($\omega - \Delta\omega$) à des temps consécutifs ($t + \Delta t$), et les nouvelles caractéristiques de la pompe en fonction de ces nouvelles vitesses de rotation. On choisit généralement la valeur de Δt égale au temps d'un aller-retour de l'onde entre la pompe et le réservoir, soit $\Delta t = 2L/a$.

L'exercice [E28] propose une résolution détaillée de cette application. Il est néanmoins nécessaire de maîtriser la technique de résolution basée sur les relayeurs de Bergeron, détaillée au paragraphe 3.8, pour résoudre cette application.

3.7.2 Les soupapes de décharge

Les soupapes de décharges sont des organes capables d'évacuer instantanément un débit très important. Elles font intervenir un élément mécanique, généralement un ressort, qui en exploitation normale par sa compression, obture un orifice placé à un point du circuit dont on souhaite une protection face à des surpressions trop importantes (Fig. 3.11.a). Lorsqu'une surpression assez grande est créée, lors d'une variation du régime de l'écoulement, un débit est possible par la soupape. Généralement, le système est dimensionné de telle sorte que la pression nécessaire pour ouvrir le système correspond à une valeur 5% plus élevée que la pression normale de fonctionnement. Ce système doit être très réactif, et l'ouverture la plus rapide possible.

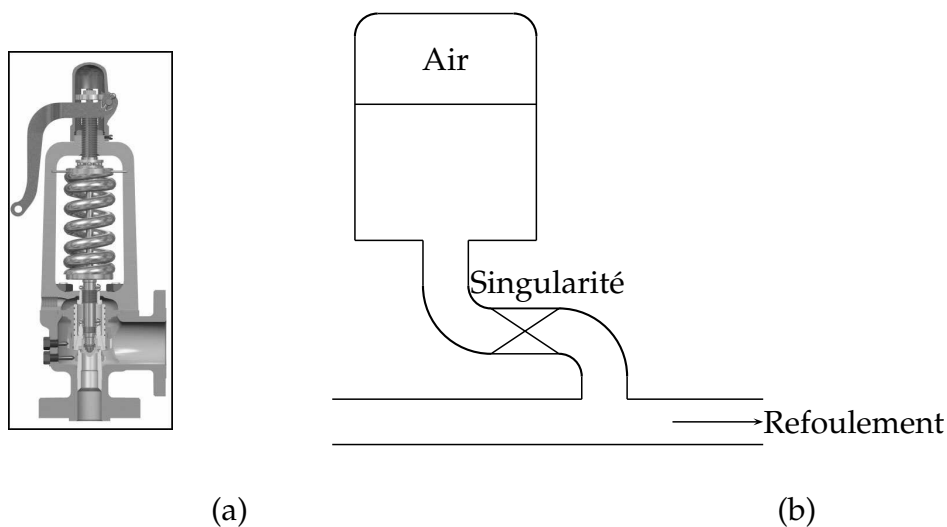


FIGURE 3.11 a, soupape de sureté anti-bélier (produit *Dresser Consolidated*) ; b, Principe de la disposition d'un réservoir d'air.

3.7.3 La cheminée d'équilibre

Une cheminée d'équilibre, comme il a été dit dans la section 3.4.3, est adaptée au coup de bélier de masse. Elle est généralement réalisée en béton et placée sur le parcours du liquide dans la conduite d'amenée (Fig. 3.12). Lors de l'apparition d'une surpression, le trop plein d'eau dans la conduite peut être déplacé dans la cheminée. Au contraire, si une dépression apparaît dans la conduite au pied de la cheminée, cette dernière a la possibilité de donner de l'eau à la canalisation et éviter ainsi les dépressions trop importantes.

3.7.4 Les réservoirs d'air

Le principe des réservoirs d'air est identique à celui des cheminées d'équilibre vues plus haut. Ce dispositif est néanmoins placé dans une région proche du système de pompage ce qui n'était pas le cas des cheminées. Dans ce cas, l'alimentation continue de la conduite après la disjonction peut être effectuée à l'aide d'une réserve d'eau



FIGURE 3.12 Cheminée d'équilibre en béton de la centrale hydroélectrique de la Trinité (Hautes-Alpes).
(d'après Swann ALLEC, Promotion 2017).

sous pression accumulée dans une capacité raccordée au refoulement. Cette dernière contient à la fois de l'eau et de l'air et, en marche normale, la pression de l'air équilibre la pression au point de branchement (Fig. 3.11.b).

À la disjonction du groupe moteur, le déficit en eau est comblée par l'eau du réservoir. Après diminution et annulation de la vitesse de l'eau chassée, l'eau de la conduite revient en arrière et remonte dans la cloche, augmentant la pression dans la conduite de refoulement. La dissipation de l'énergie de l'eau est créée par passage dans une singularité placée à la base de réservoir, sans quoi on observerait des oscillations très peu amorties du niveau de la surface libre. Pour des raisons pratiques, on montre qu'il est préférable d'avoir plus de pertes de charge au retour de l'eau que lors de son aller. La singularité peut être un diaphragme, une tuyère, ou un clapet à battant percé.

3.7.5 Les accumulateurs hydrauliques

Un accumulateur hydraulique est un réservoir capable d'emmagasiner une grande quantité d'énergie sous un faible volume. Il est composé de deux chambre, une chambre pour le fluide soumis au coup de bélier et une chambre pour un fluide dont la pression est contrôlée. La séparation des deux fluides est réalisée par la présence d'une vessie, un piston ou une membrane. Généralement le gaz à l'intérieur de la vessie est de l'azote dont la pression est réglée à une pression P_0 en absence d'écoulement (Fig. 3.13.a). Cette pression est réglée de telle sorte qu'en service cette fois, *i.e.* lorsque l'écoulement est présent, $P_0 = 0,9P_1$ avec P_1 la pression dans la région de l'accumulateur. La vessie est donc comprimée dans ce cas (Fig. 3.13.b). Lorsque le coup de bélier prend place, la pression maximum de service, P_2 , comprime de façon plus importante la vessie (Fig. 3.13.c) permettant donc au dispositif d'accumuler l'énergie *en trop* liée au coup de bélier. La figure 3.14 présente des mesures de variations de pression en présence ou non d'un accumulateur hydraulique (complété dans un des exemples par un amortisseur de pulsations).

3.8 Méthode graphique de Bergeron

La complexité des phénomènes mis en jeu ici nous empêche d'aboutir à une solution analytique. Il existe alors d'autres méthodes, graphiques pour les plus anciennes et numériques pour les plus récentes.

Nous abordons dans ce paragraphe, la méthode graphique de Bergeron-Schnyder mise en place indépendamment l'une de l'autre. Cette méthode a tendance à disparaître depuis la suprématie du numérique, elle reste néanmoins intéressante et permet de comprendre la physique du phénomène.

3.8.1 Principe de la méthode

Les pressions telles qu'elles interviennent dans les expressions d'Allievi sont des pressions statiques (*paragraphe 3.3.2*). Pour élargir le champ des méthodes que nous

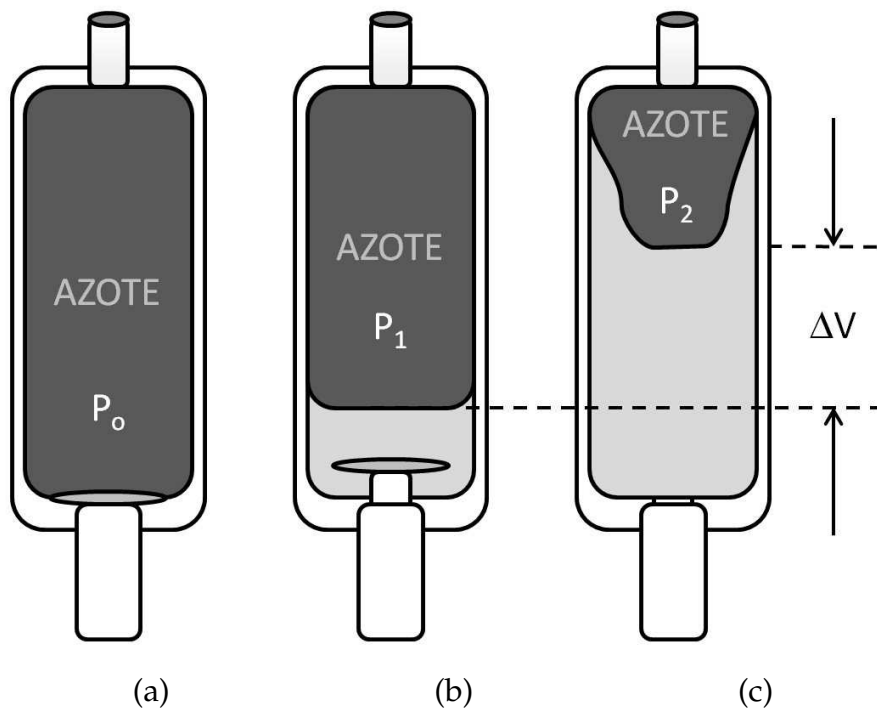


FIGURE 3.13 Principe de fonctionnement d'un accumulateur hydraulique.

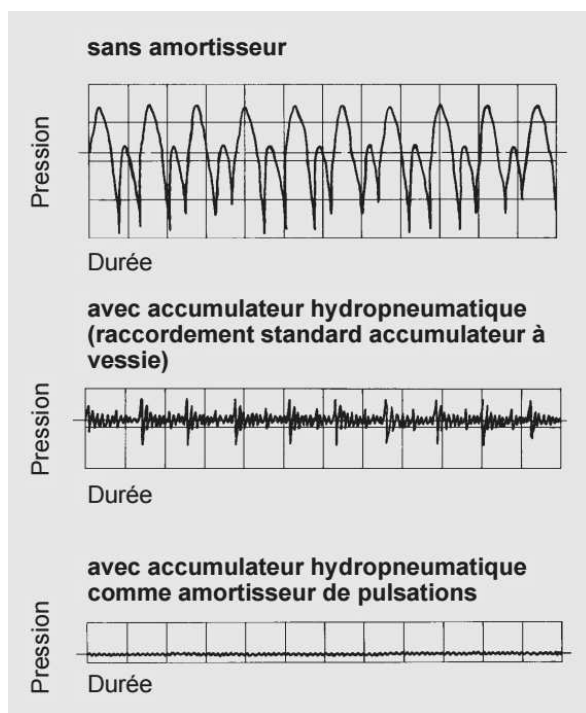


FIGURE 3.14 Évolution de la pression lors d'un coup de bélier (haut), en présence d'un accumulateur hydraulique (milieu) et utilisé comme amortisseur de pulsation (d'après Hydac [1]).

étudierons dans la suite, on traitera des pressions motrices. Cette utilisation nous permet entre autre de traiter des parois inclinées ou non à partir des mêmes équations. D'autre part, la contribution de la pression atmosphérique sera éliminée en considérant des pressions effectives. On pose finalement :

$$h = \frac{p^* - p_{\text{atm.}}}{\rho g} \quad \text{ou} \quad \frac{p^*}{\rho g} = h + \frac{p_{\text{atm.}}}{\rho g}$$

De même, le débit est plus utilisé en hydraulique en lieu et place de la vitesse dans les conduites. Les formules d'Allievi deviennent alors :

$$h - h_0 = \frac{1}{\rho g} \left[F \left(t - \frac{x}{a} \right) + f \left(t + \frac{x}{a} \right) \right] \quad \text{et} \quad Q - Q_0 = \frac{S}{\rho a} \left[F \left(t - \frac{x}{a} \right) - f \left(t + \frac{x}{a} \right) \right]$$

On peut désormais s'intéresser aux expressions $h + aQ/gS$ et $h - aQ/gS$, il vient respectivement :

$$\begin{aligned} h + \frac{a}{gS} Q &= \frac{2F \left(t - \frac{x}{a} \right)}{\rho g} + \text{Cste} \\ h - \frac{a}{gS} Q &= \frac{2f \left(t + \frac{x}{a} \right)}{\rho g} + \text{Cste} \end{aligned}$$

Si notre imagination est assez vaste pour pouvoir considérer un observateur se déplaçant dans le sens des x positifs à la vitesse a (Fig. 3.15), son déplacement vaut :

$$x = at + \text{Cste} \quad \text{ou} \quad t - \frac{x}{a} = \text{Cste}$$

Dans ce cas, $F \left(t - \frac{x}{a} \right) = \text{Cste}$, entraînant donc la relation importante

$$h + \frac{a}{gS} Q = \text{Cste} \quad (3.22)$$

Ici la constante représente les conditions de départ du coureur et peut s'exprimer sous la forme $h_{\text{init.}} + aQ_{\text{init.}}/gS$, avec $h_{\text{init.}}$ et $Q_{\text{init.}}$ les conditions de hauteur et de débit au moment du départ du relayeur considéré. Si notre imagination a résisté jusqu'ici, il nous sera facile de considérer cette fois-ci un autre observateur se déplaçant en sens inverse (Fig. 3.15), mais toujours à la vitesse a , son déplacement vaut :

$$x = -at + \text{Cste} \quad \text{ou} \quad t + \frac{x}{a} = \text{Cste}$$

Dans ce cas, $f \left(t + \frac{x}{a} \right) = \text{Cste}$, entraînant donc une deuxième relation tout aussi importante

$$h - \frac{a}{gS} Q = \text{Cste} \quad (3.23)$$

Nous voyons donc que pour un observateur se déplaçant à une vitesse a (quel que soit le sens), la charge et le débit volumique sont reliés linéairement.

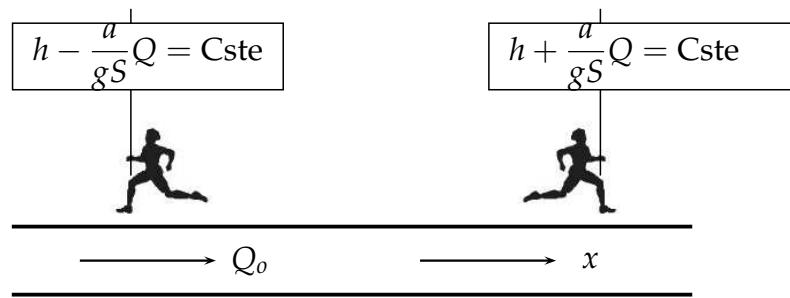


FIGURE 3.15 Représentation et orientation des relayeurs de Bergeron.

D'où la loi de Bergeron :

“Pour un observateur qui se déplace à la célérité a , le long d'une conduite de caractéristique constante, le point figuratif du régime (h, Q) , au lieu où il se trouve, est sur une droite qui passe par le point figuratif du régime qui existait au temps et au lieu de son départ, et dont le coefficient angulaire est $\pm a/gS$ suivant qu'il se déplace au sens contraire (+) ou dans le même sens (–) que le débit Q_0 du régime permanent choisi comme sens positif.”

Notons qu'il est assez amusant et surprenant de pouvoir déterminer les fluctuations de pression et de vitesse en faisant partir un observateur de tel endroit ou tel autre à une date que l'on choisit. Néanmoins, avant de commencer le tracé du graphe, il faut connaître : (1) le sens de l'écoulement permanent établi, ceci permettant d'orienter selon ce sens l'axe des x sur lequel vont courir les relayeurs (Cf. figure 3.15); (2) le point M_0 et la date du départ de l'observateur; (3) le sens de parcours de l'observateur dans la tuyauterie afin de tracer la droite issue de M_0 ; (4) les caractéristiques de l'extrémité de la conduite que rencontrera l'observateur lorsqu'il y arrive à un temps L/a plus tard. Une fois toutes ces informations retenues, l'observateur se déplace dans un système d'axes (h, Q) alternativement sur des droites de pentes $\pm a/gS$ qui ne dépendent que de F et f (Fig. 3.16). Le point de fonctionnement M est donc parfaitement défini à l'instant t en un point déterminé par la conduite.

La résolution par la méthode graphique de Bergeron est largement facilitée par le tracé de l'épure en même temps que la détermination et la résolution des équations des relayeurs. En effet, le tracé doit aussi faire apparaître des conditions limites sur lesquelles les droites des relayeurs s'interrompent. Les exemples traités plus loin seront basés sur cette démarche.

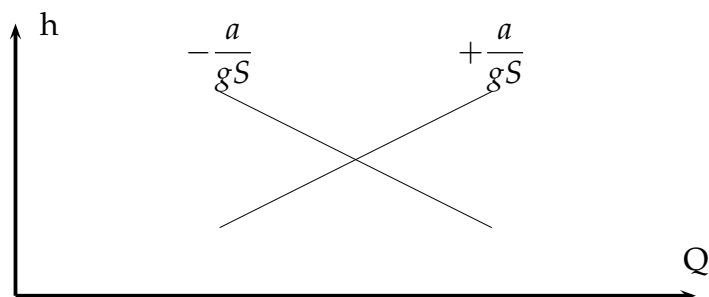


FIGURE 3.16 Principe de construction des droites des observateur de Bergeron.

Remarquons que le relayeur transportant la quantité $h + aQ/(gS) = Cste$ se déplace sur un segment de pente négative. En effet l'équation de la droite accueillant ce segment s'écrit $h = -aQ/(gS) + Cste$ et a donc une pente négative. De même le relayeur transportant la quantité $h - aQ/(gS) = Cste$ se déplace sur un segment de pente positive.

3.8.2 Conditions aux extrémités

D'après ce qui vient d'être dit, la connaissance des conditions imposées par les extrémités de la conduite considérée est primordiale pour une résolution correcte du problème. Ces conditions sont principalement de deux types, constant ou variable. Pour le premier type de condition, un réservoir d'eau impose par exemple à sa base une hauteur constante. Un état d'ouverture d'une vanne impose aussi une condition constante : une évolution des pertes de charge avec le débit si elle est partiellement fermée, et un débit nul si elle est totalement fermée. Concernant ce dernier point, ceci reste vrai tant qu'il n'y a pas de cavitation observée. En effet, si une cavitation est présente en ce point, celle-ci imposera une hauteur de cavitation (Cf. paragraphe 3.8.7). Enfin, dans le cas d'une pompe ayant une vitesse décroissante, consécutivement à l'utilisation d'un volant d'inertie, celle-ci impose une hauteur et un débit dont les valeurs sont évaluées par la caractéristique de la pompe à la vitesse de rotation observée par le relayeur à son arrivée.

Tous ces cas sont traités par la suite. L'application du paragraphe 3.8.4 traite du cas d'un réservoir et d'une vanne totalement fermée en absence de cavitation. Le paragraphe 3.8.5 propose de résoudre graphiquement ce même cas avec cette fois une vanne dont la fermeture est progressive (le type est donc variable ici pour une des deux extrémités). Concernant ce type de condition, l'arrêt progressif d'une pompe par l'intermédiaire d'un volant d'inertie cette fois est appliqué dans l'exercice [E28].

3.8.3 Notation spécifique

Finalement la résolution graphique de Bergeron ne s'intéresse qu'aux conditions observées aux extrémités, d'une part, et en certains temps d'autre part. Ceux-ci étant des multiples du temps nécessaire à une onde pour parcourir la distance d'une extrémité à l'autre. Pour soulager l'écriture dans les résolutions suivantes, le temps d'un aller qui est égal à L/a , L étant la distance à parcourir et a la célérité de l'onde, sera noté τ . On parlera ainsi des temps 2τ , 3τ , etc.

3.8.4 Application : fermeture de vanne instantanée

Nous allons appliquer la méthode graphique de Bergeron dans le cas d'une fermeture instantanée de vanne située à l'extrémité de la conduite précédemment utilisée pour illustrer le coup de bélier en masse ou les solutions d'Allievi (Fig. 3.3). Les caractéristiques de la conduite sont rassemblées dans le tableau 3.1 (page 117). La célérité des ondes dans cette conduite a déjà été estimée à l'aide des caractéristiques

de la conduite et à l'aide de la relation 3.18 (page 125). Pour rappel, celle-ci vaut $a = 1177$ m/s. Le temps que mettrait une onde pour faire un aller-retour vaut donc $L/a = 1,3$ s et est très grand évidemment par rapport au temps de fermeture de la vanne qui est nul. Ceci justifie donc l'utilisation de la théorie du coup d'ondes et l'application de la méthode graphique de Bergeron, les relations de relayeurs ayant été obtenues à l'aide des solutions d'Allievi. Comme dans les autres applications, la vanne génère initialement des pertes de charge selon l'évolution $\Delta h = 640 \times Q^2$. Le débit permanent avant modification de l'état de la vanne vaut donc $Q = 0,5$ m³/s (Cf. paragraphe 3.4.2). Les relayeurs auront des pentes

$$\frac{a}{gS} = \frac{1177}{9,81 \times 0,20} \approx 600 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s}) = 60 \text{ m}/(0,1 \text{ m}^3/\text{s})$$

Dans cet exemple, nous traiterons de façon simultanée le problème de façon analytique en utilisant les relations portées par les relayeurs et de façon graphique en traçant l'épure de Bergeron basée sur des segments.

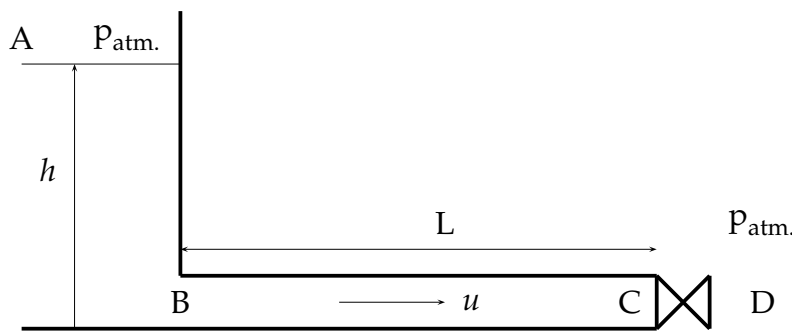


FIGURE 3.3 Installation avec une conduite à la base d'un réservoir.

⇨ À l'instant $t = 0$, on ferme la vanne, le débit passe alors d'une valeur stabilisée égale à $0,5$ m³/s à une valeur nulle. Il apparaît une onde de surpression qui remonte la conduite correspondant à une charge de 160 m augmentée de la valeur Δh , que nous allons calculer plus loin. À un instant infiniment petit avant la fermeture, un premier relayeur quitte la vanne en direction du réservoir, il court à une vitesse a sur une droite d'équation $h - aQ/(gs) = \text{Cste}$ (il s'agit du relayeur à gauche portant la relation 3.23). Lorsqu'il quitte la vanne, ses conditions initiales ($Q_{\text{init.}}, h_{\text{init.}}$) étaient ($0,5$ m³/s, 160 m), d'où l'équation qu'emprunte le relayeur 1 : $h - aQ/(gs) = -140$.

⇨ À l'instant $t = L/a$, le relayeur 1 arrive à l'embouchure du réservoir qui impose sa pression, $h = 160$ m. D'après l'équation précédente, le débit vaut alors $Q = 0,5$ m³/s, débit qu'il observe à son arrivée. Ceci ne devrait pas nous étonner car ce sont les conditions avant la fermeture de la vanne et le relayeur devance l'onde qui va changer ces conditions. Ainsi le segment du relayeur 1 part du point ($0,5$ m³/s, 160 m) correspondant à ses conditions de départ jusqu'au point ayant les mêmes coordonnées d'après les conditions observées par ce relayeur une fois arrivé au réservoir. Le segment du relayeur 1 est donc un point uniquement. Intéressons-nous maintenant au deuxième relayeur parti du réservoir aussitôt que le premier ait atteint son but. Ce nouveau relayeur (il s'agit maintenant du relayeur courant dans

le sens des x) se dirige du réservoir vers la vanne avec une vitesse a , et descend une droite d'équation $h + aQ/(gs) = h_{\text{init.}} + aQ_{\text{init.}}/(gs)$. Les conditions initiales de ce relayeurs, $(Q_{\text{init.}}, h_{\text{init.}})$, valent aussi $(0,5 \text{ m}^3/\text{s}, 160 \text{ m})$ et correspondent alors à la première extrémité du segment du relayeur 2 dont l'équation s'écrit $h + aQ/(gs) = 460$.

⇨ À l'instant $t = 2L/a$, le relayeur 2 atteint la vanne. En ce point le débit est nul, la pression vaut, d'après la relation portée par le relayeur 2, $h = 460 \text{ m}$. On peut retrouver cette valeur en traçant le segment du relayeur 2 qui a une pente négative, démarre du point $(0,5 \text{ m}^3/\text{s}, 160 \text{ m})$ (*i.e.* les conditions initiales du relayeur 2) et doit se diriger vers une condition imposée par la vanne, donc un débit nul. On trouve alors graphiquement qu'à son arrivée, le relayeur trouve sur la vanne une surpression d'une valeur $\Delta h = 460 - 160 = 300 \text{ m}$ par rapport à la condition nominale (ou 29,4 bar comme cela avait été prévu d'après l'application des solutions d'Allievi). Un troisième relayeur de Bergeron part à son tour, de la vanne avec pour objectif le réservoir et transportant la relation $h - aQ/(gs) = h_{\text{init.}} - aQ_{\text{init.}}/(gs)$. Ses conditions initiales, $(Q_{\text{init.}}, h_{\text{init.}})$, valent $(0 \text{ m}^3/\text{s}, 460 \text{ m})$, d'où la relation transportée par ce relayeur : $h - aQ/(gs) = 460$. Le segment de ce relayeur démarre donc au point $(0 \text{ m}^3/\text{s}, 460 \text{ m})$, a une pente positive et se dirige vers une condition imposée par le réservoir, *i.e.* $h = 160 \text{ m}$.

⇨ À l'instant $t = 3L/a$, le relayeur 3 arrive à l'embouchure du réservoir imposant $h = 160 \text{ m}$ d'où $Q = -0,5 \text{ m}^3$ d'après l'équation transportée par le relayeur et d'après le tracé du segment. Nous obtenons ainsi le point $(-0,5 \text{ m}^3, 160 \text{ m})$. À cet instant, un quatrième relayeur part du réservoir pour la vanne et son segment démarre à ce point, et il transporte l'équation $h + aQ/(gs) = -140$, étant données ses conditions initiales. La pente du segment est donc négative et se dirige vers une condition imposée par la vanne.

⇨ À l'instant $t = 4L/a$, le relayeur 4 arrive sur la vanne pour laquelle le débit est nul. La pression alors $h = -140 \text{ m}$ d'après le tracé ou l'équation du relayeur. Nous obtenons ainsi le point $(0 \text{ m}^3/\text{s}, -140 \text{ m})$. À partir de cet instant, le quatrième va s'empresse d'inverser la surpression, on retrouve alors les conditions du premier relayeur. Un cycle complet a été effectué sur la vanne. Le dernier relayeur quant à lui, partant de la vanne pour se diriger vers le réservoir lui permettra d'observer la condition $(0,5 \text{ m}^3, 160)$. Lorsqu'il inversera la tendance, un cycle complet sera alors effectué à l'embouchure du réservoir. Le relai est fini.

Notons que nous retrouvons une période de $4L/a$ que ce soit au niveau de la vanne mais aussi à l'embouchure du réservoir. Nous retrouvons d'autre part, comme il a été dit plus haut, les mêmes estimations de surpression que celle prédite par les formulations d'Allievi. Les résultats obtenus à partir des relayeurs de Bergeron sont rassemblés sur la figure 3.17.

Notons tout de même que tracer les droites caractéristiques des relayeurs est une première étape, et non une fin en soi. En effet, il est plus important dans une deuxième

étape de fournir les renseignements de débits et de hauteurs aux extrémités pour des temps caractéristiques du problème. C'est là le but de la méthode de Bergeron. Pour cela, on simplifie en plus généralement l'écriture temporelle, c'est à dire qu'un temps noté $t = 1$ équivaut au temps $t = L/a$. De même, on renseigne sur l'épure de Bergeron les extrémités considérées. Ainsi la notation $] - \infty, 1]R$ signifie que pour des instants antérieurs à $t = L/a$, le débit vaut $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ et la surpression à l'embouchure du réservoir est nulle d'après la figure 3.17.

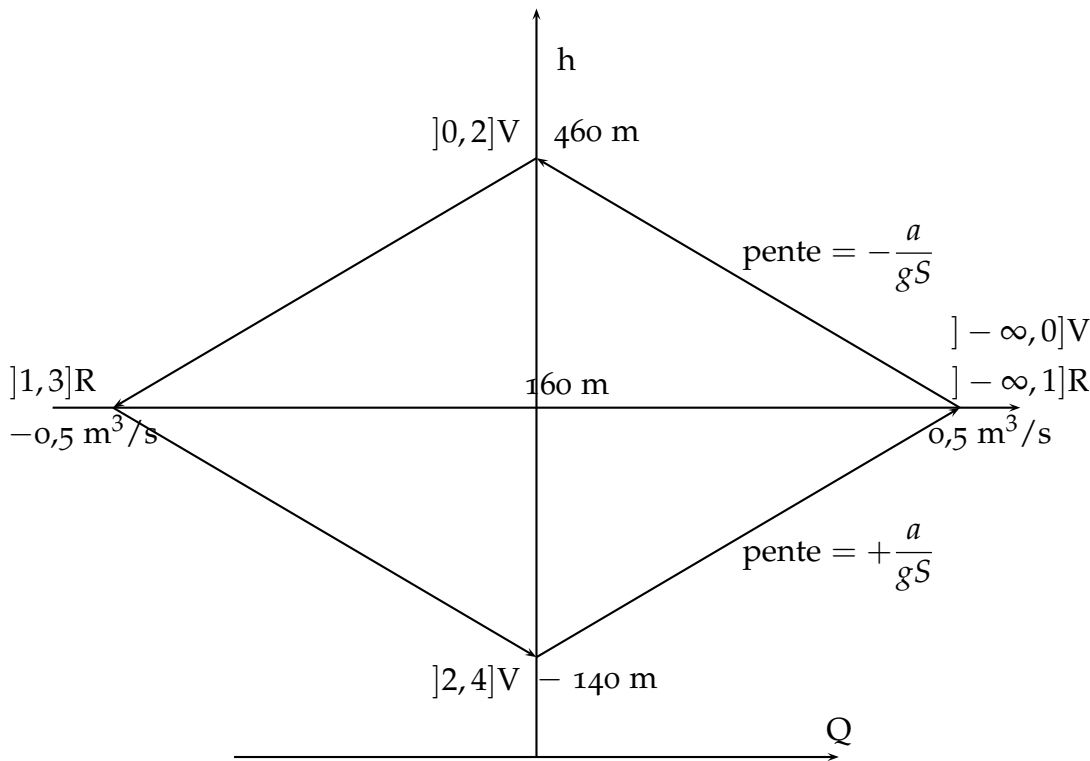


FIGURE 3.17 Représentation des surpressions et dépressions au niveau de la vanne, et des débits au niveau du réservoir dans le cas d'une fermeture instantanée d'une vanne placée à l'extrémité d'une conduite d'adduction.

On note donc une surpression égale à aQ_o/gS sur la vanne entre les temps 0 et L/a , comme il est indiqué sur la figure 3.6 obtenue à partir des solutions d'Allievi.

Insistons sur le fait que tout ce qui vient d'être dit dans ce chapitre est basé sur les hypothèses de réversibilité complète du phénomène : absence de perte de charge, élasticité parfaite de la conduite, et écoulement monophasique⁴. Dans le cas réel, les dissipations atténuent cet effet dans la durée. D'autre part, les canalisations présentent la plupart du temps des changements de direction à l'origine de réflexions d'ondes. En tout point de la canalisation la pression est ainsi la superposition de deux ondes, ce qui diminue généralement l'amplitude de la pression.

4. Si la dépression devient importante, la pression absolue atteinte pour certaines abscisses pourrait descendre en-dessous de la pression de vapeur saturante. Dans ce cas, l'écoulement devient multiphasique, et une poche gazeuse se dilate en premier lieu pour se résorber lors du passage d'une surpression.

3.8.5 Application : fermeture progressive d'une vanne

L'exercice [E24] propose de résoudre ce problème en détaillant les étapes.

On considère de nouveau la configuration de la figure 3.3 utilisée précédemment dans le paragraphe 3.8.4 dans lequel la fermeture de la vanne était instantanée. Cette fois-ci la fermeture sera prise comme étant progressive et la formulation des pertes de charge générées par vanne au cours du temps sera la suivante :

$$\Delta h = 640 \left(\frac{Q}{1 - \frac{t}{T}} \right)^2 \quad (3.24)$$

avec g l'accélération de pesanteur, t le temps en seconde, T le temps de fermeture de la vanne égal à 4,1 s. Les chutes de pression pour des temps négatifs sont identiques à celle pour $t = 0$, la vanne étant pour ces temps-là partiellement fermée. Ainsi, on peut représenter pour un instant t , la courbe caractéristique de la vanne par une parabole.

Dès le début de fermeture de la vanne, l'écoulement permanent est perturbé et des **ondes de pression** partent alors de façon continue de la vanne (avec pour célérité $a = 1177$ m/s). On utilisera alors la théorie de coup de bélier d'ondes.

On se propose d'estimer, **graphiquement** par la méthode de Bergeron, les débits et pressions sur la vanne au cours de sa fermeture. Afin de simplifier l'étude, on ne s'intéressera qu'à des instants particuliers correspondant à des temps multiples d'un aller-retour d'une onde dans la conduite.

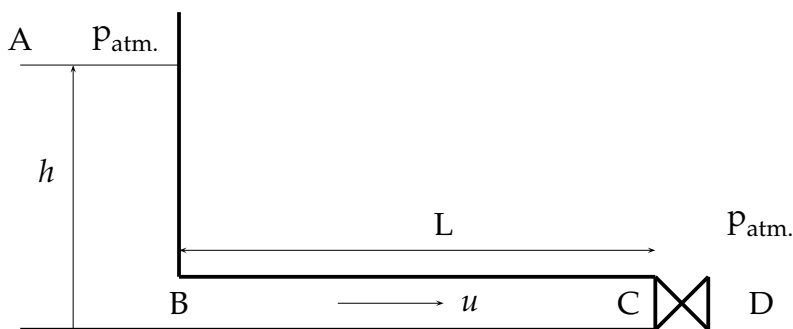


FIGURE 3.3 Installation avec une conduite à la base d'un réservoir.

Le réservoir est de grande taille, on peut donc considérer son niveau comme étant constant, les pertes de charge seront négligées dans la conduite BC. Comme il a été montré précédemment, le débit permanent vaut $Q_0 = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$.

Détermination des caractéristiques de la vanne pour des temps particuliers

On ne s'intéresse qu'aux caractéristiques de la vanne aux instants $0, 2\tau, 4\tau, 6\tau$, etc. correspondant à des multiples de l'aller-retour de la première onde générée, avec $2\tau = 2L/a = 1,3$ s. Les caractéristiques de la vanne sont rassemblées dans le tableau 3.3 et les courbes sont tracées sur la figure 3.18 sur laquelle la condition du réservoir a été rajoutée ($h = 160$ m).

Tableau 3.3 Courbes caractéristiques de la vanne pour des temps multiples d'un aller-retour de la première onde générée.

Instant	Caractéristique
0	$\Delta H = 640 \times Q^2$
2τ	$\Delta H = 1372 \times Q^2$
4τ	$\Delta H = 4782 \times Q^2$
6τ	$\Delta H = 268\,960 \times Q^2$
Au-delà	$Q = 0$

Application de la méthode graphique de Bergeron

La méthode graphique de Bergeron consiste à faire partir des relayeurs des extrémités de la conduite BD. L'orientation de l'axe des droites est de B vers C étant donnée l'orientation de l'écoulement permanent. La constante des relations portées par les relayeurs sera déterminée par les conditions de l'extrémité de départ. Les conditions imposées par l'extrémité d'arrivée seront soit une hauteur (pour le réservoir), soit une valeur de perte de charge et de débit (pour la vanne).

La résolution de ce problème peut être totalement graphique ici et consiste alors à tracer les différents segments de droite de chacun des relayeurs. Une fois l'épure finie, l'utilisateur estime finalement les valeurs de variation de pression. Ici, on traitera volontairement la résolution basée sur les équations des relayeurs d'une part et sur le graphe d'autre part en parallèle pour des raisons pédagogiques.

La pente des relations des relayeurs vaut (Cf. paragraphe 3.8.4) $600 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})$, les relayeurs courent sur des droites de pente égale à $\pm 60 \text{ m}$ par $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$.

Relayeur 1 : À l'instant $t = 0$, le relayeur R_1^5 quitte la vanne et se dirige vers le réservoir. D'après son orientation, il porte la relation :

$$h - \frac{a}{gS}Q = -140$$

Le membre de droite correspond à la valeur numérique de la constante $h_{\text{in.}} - aQ_{\text{in.}}/gS$, soit $h_0 - aQ_0/gS$. À l'instant τ , il arrive au pied du réservoir imposant une hauteur

5. En fait, il part un temps infiniment petit avant $t = 0$. Nous adopterons ici ce vocabulaire pour ne pas surcharger le texte.

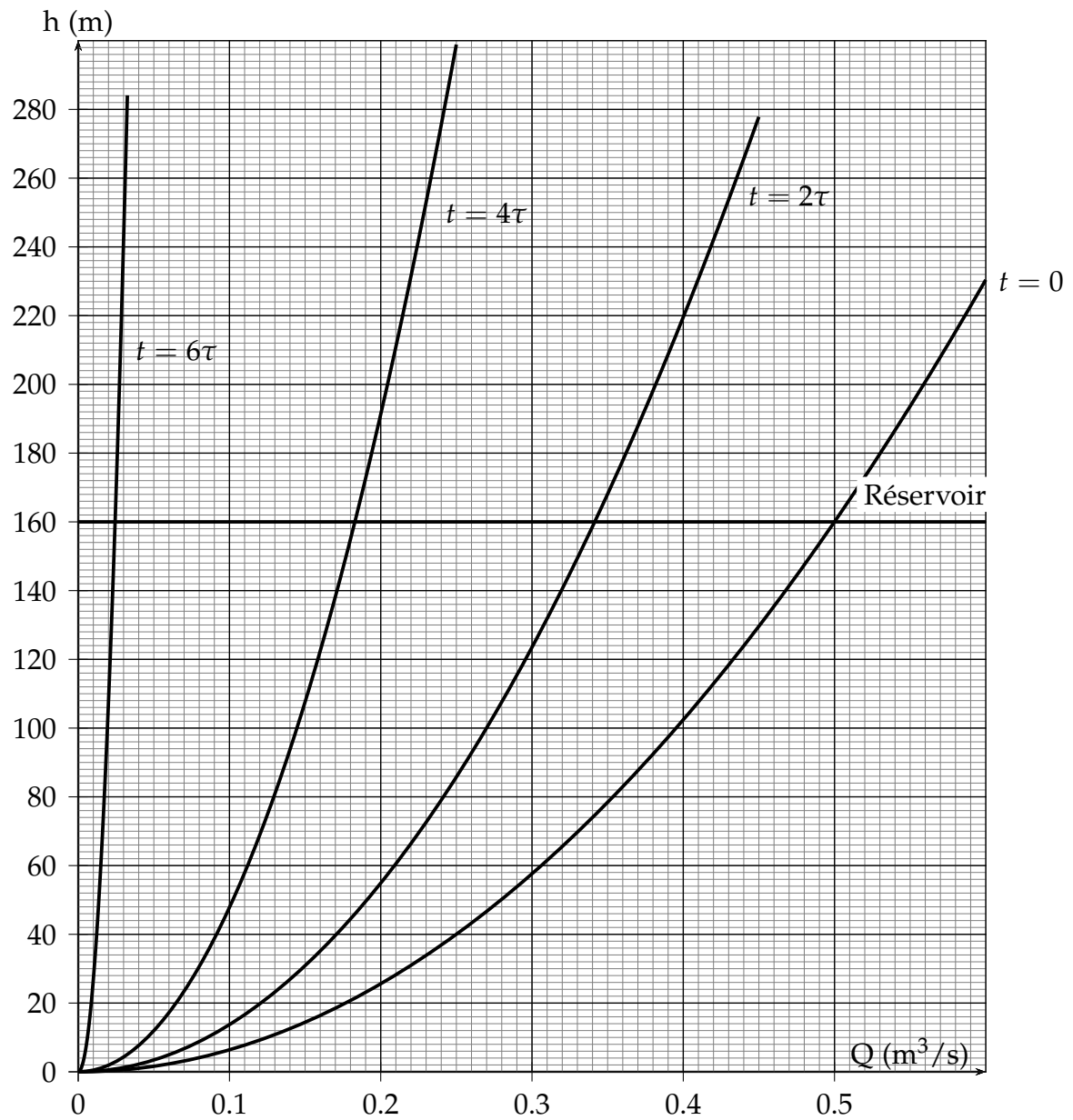


FIGURE 3.18 Évolution de la caractéristique de la vanne en fonction de temps particuliers, et tracé de la condition imposée par le réservoir.

égale à 160 m. D'après la relation de R1, le débit vaut alors :

$$Q = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ce relayeur trouve naturellement les conditions de l'écoulement permanent, l'onde étant derrière lui.

Relayeur 2 : À l'instant τ , le relayeur R2 quitte le réservoir et se dirige vers la vanne, portant la relation :

$$h + \frac{a}{gS}Q = 460$$

On trace cette demi-droite à partir du point correspondant à l'écoulement permanent jusqu'à rencontrer la condition de la vanne, $Q = 0,4 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 220 \text{ m}$ (Cf. figure 3.19). Il s'agit donc des conditions que trouve le relayeur R2. On note ainsi une surpression égale à

$$\Delta p = \rho g(h - h_0) = 1000 \times 9,81 \times (220 - 160) = 6 \text{ bar}$$

Relayeur 3 : À l'instant 2τ , le relayeur R3 quitte la vanne et se dirige vers le réservoir, portant la relation :

$$h - \frac{a}{gS}Q = -20$$

On trace cette demi-droite à partir du point correspondant aux conditions de la vanne (conditions de départ de ce relayeur) jusqu'à rencontrer les conditions imposées par le réservoir, $h = 160$. On note $h = 160 \text{ m}$ et $Q = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$.

Relayeur 4 : À l'instant 3τ , le relayeur R4 quitte le réservoir et se dirige vers la vanne, portant la relation :

$$h + \frac{a}{gS}Q = 340$$

D'après la caractéristique de la vanne à l'instant 4τ , ce relayeur trouve les conditions $Q = 0,21 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 212 \text{ m}$, soit une surpression égale à 5,2 bar.

Relayeur 5 : À l'instant 4τ , le relayeur R5 quitte la vanne et se dirige vers le réservoir, portant la relation :

$$h - \frac{a}{gS}Q = 86$$

Les conditions imposées par le réservoir entraîne $Q = 0,12 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 160 \text{ m}$, que l'on retrouve graphiquement.

Relayeur 6 : À l'instant 5τ , le relayeur R6 quitte le réservoir et se dirige vers la vanne, portant la relation :

$$h + \frac{a}{gS}Q = 232$$

D'après la caractéristique de la vanne à l'instant 6τ , ce relayeur trouve les conditions $Q = 0,03 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 216 \text{ m}$, soit une surpression égale à 5,6 bar.

Relayeur 7 : À l'instant 6τ , le relayeur R7 quitte la vanne et se dirige vers le réservoir, portant la relation :

$$h - \frac{a}{gS}Q = 198$$

Les conditions imposées par le réservoir entraîne $Q = -0,06 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 160 \text{ m}$.

Relayeur 8 : À l'instant 7τ , le relayeur R8 quitte le réservoir et se dirige vers la vanne, portant la relation :

$$h + \frac{a}{gS}Q = 124$$

D'après la caractéristique de la vanne fermée, ce relayeur trouve les conditions $Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ et $h = 124 \text{ m}$, soit une dépression égale à $-3,6 \text{ bar}$.

La suite du tracé correspond à celui obtenu lors d'une fermeture instantanée d'une vanne (Cf. exemple précédent), à savoir une courbe fermée. L'épure de Bergeron est entièrement tracée sur la figure 3.19, sur laquelle les notions d'espace et de temps ont été rajoutées pour les deux extrémités. R et V correspondent respectivement au réservoir et à la vanne, et le chiffre devant la lettre correspond au temps considéré (i.e., $2V \rightarrow t = 2L/a$ sur la vanne). L'évolution du débit et de la pression au niveau de la vanne est donnée dans le tableau ci-dessous.

Tableau 3.4 Évolution du débit et de la pression au niveau de la vanne.

Instant	0	2τ	4τ	6τ	8τ	10τ	12τ
$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	0,5	0,4	0,21	0,03	0	0	0
$\Delta p \text{ (bar)}$	0	6,0	5,2	5,6	-3,6	3,6	-3,6

3.8.6 Application : utilisation d'un volant d'inertie

L'exercice [E28] propose de résoudre ce problème en détaillant les étapes.

Une pompe est utilisée pour alimenter un réservoir dont la surface libre est à une altitude égale à 80 m par rapport au plan de référence à partir d'une conduite dont les propriétés sont données dans le tableau 3.5. La pompe fonctionne à une vitesse de rotation égale à 1450 tr/min avant la disjonction du moteur (Fig. 3.20). Afin de limiter les effets des coups de bélier après la disjonction du moteur, un volant d'inertie en acier est fixé sur l'arbre mobile de la pompe. Ses caractéristiques sont les suivantes : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $R_1 = 0,18 \text{ m}$, $R_2 = 0,25 \text{ m}$, $L = 0,2 \text{ m}$.

Tableau 3.5 Propriétés de la conduite de l'exemple du paragraphe 3.8.6.

Longueur (m)	Diamètre (m)	célérité (m/s)
750	0,154	1100

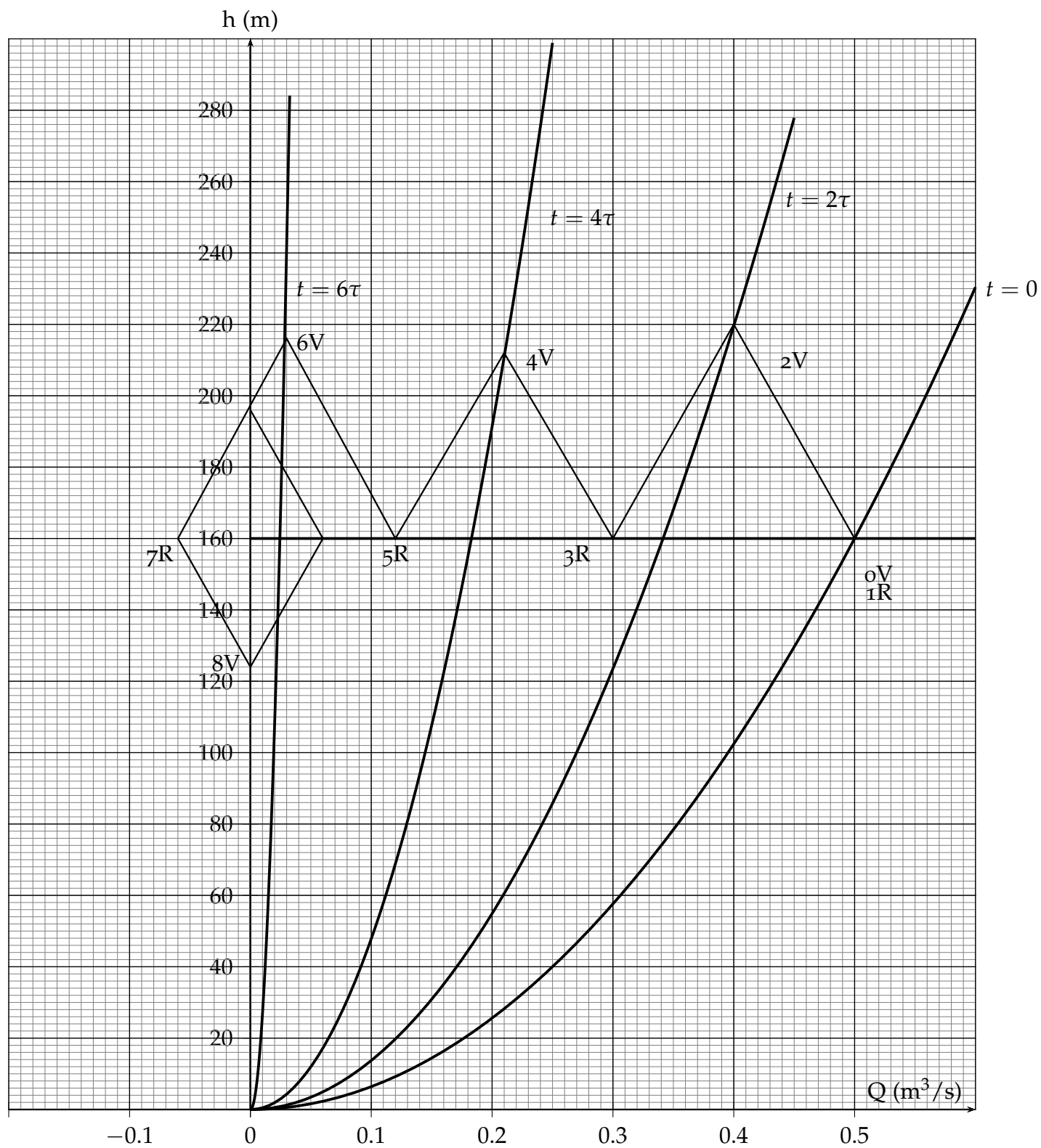


FIGURE 3.19 État de la pression et du débit lors d'une fermeture progressive d'une vanne.

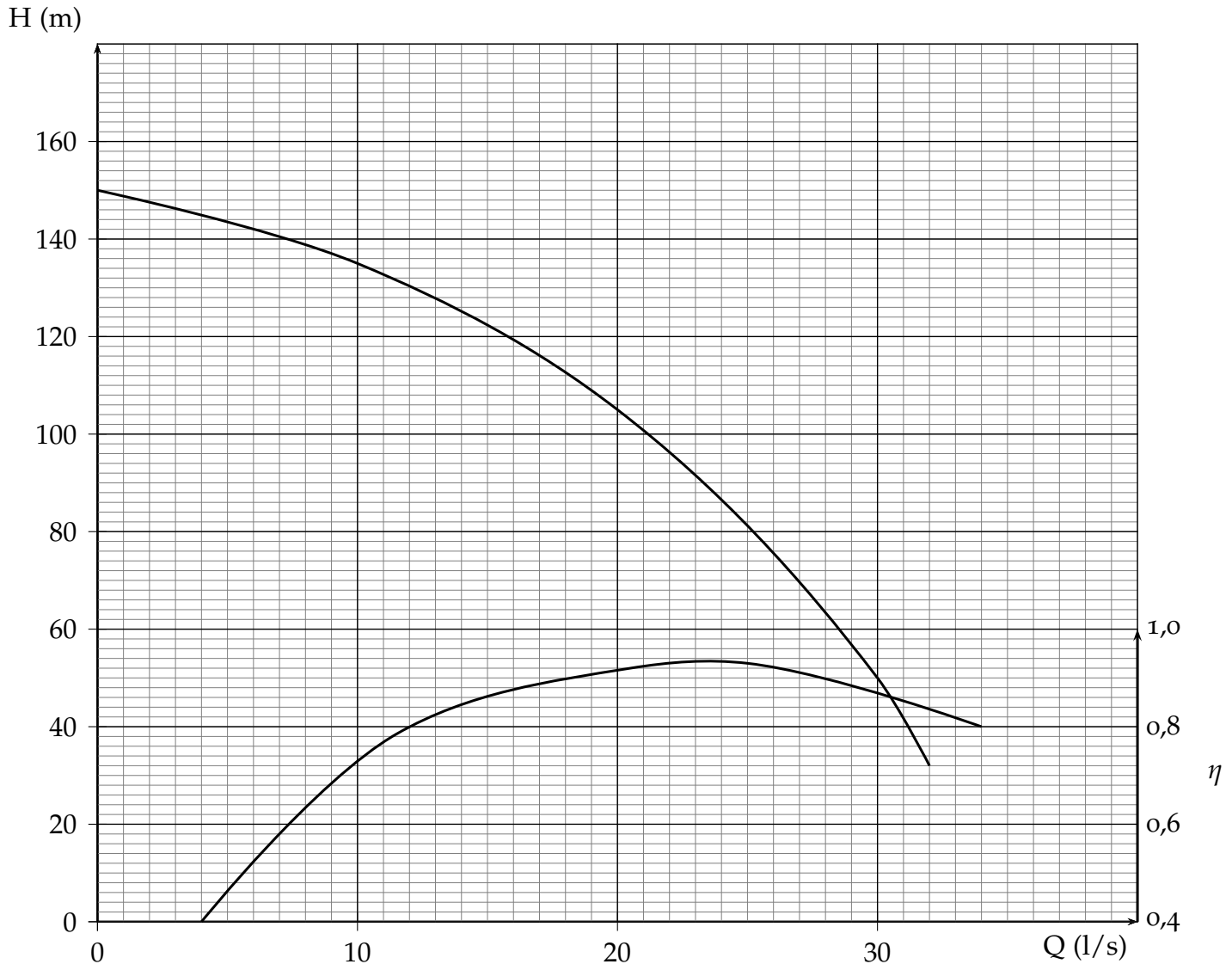


FIGURE 3.20 Courbes de la pompe de l'application du paragraphe 3.8.6.

La solution de cette application est résumée dans le tableau 3.6. Toutes les lignes de ce tableau ont pour but d'estimer la décroissance de la vitesse de rotation de l'arbre-moteur, $\Delta\omega$. On recommence ensuite une nouvelle ligne à partir d'une nouvelle valeur $\omega - \Delta\omega$. On effectue un calcul tous les deux fois Δt (en prenant pour unité de temps L/a). L'application de la relation (3.21), et des données numériques du problème, permet d'écrire la décroissance de la vitesse de rotation de l'arbre-moteur :

$$\Delta\omega = 0,194 \times C$$

Ainsi, pendant le régime établi (i.e. $\omega_0 = 151,8$ rad/s), le point de fonctionnement entraîne une valeur de couple $C_0 = 137,5$ N.m de l'arbre-moteur. Étant donnée l'inertie du volant, après un aller-retour de l'onde, et donc du relayeur de Bergeron, la décroissance de la vitesse de rotation du moteur vaut $\Delta\omega = 26,8$ rad/s. La nouvelle vitesse de rotation, $\omega_2 = 125,1$ rad/s, permet de tracer la nouvelle courbe caractéristique du moteur.

Le relayeur quittant le réservoir se déplace sur une droite de pente positive égale à $a/gS = 6 \times 10^3 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s}) = 60 \text{ m}/(10 \text{ l/s})$. Une fois arrivé au niveau de la pompe, il observe les conditions qu'elle lui impose ($Q_2 = 20,5 \text{ l/s}$; $H_2 = 53 \text{ m}$; $\eta_2 = 0,93$). Pour ce rendement, le couple de l'arbre-moteur vaut $C_2 = 91,6 \text{ N.m}$. Pendant ce temps, un autre relayeur a quitté la pompe pour se diriger vers le réservoir imposant sa hauteur d'eau, il note alors les conditions ($Q = 16,0 \text{ l/s}$; $H = 80 \text{ m}$). La suite de la résolution consiste à faire partir les relayeurs des différentes extrémités imposant leur condition (hauteur et débit pour la pompe, et hauteur pour le réservoir). Celle-ci est donnée sur la figure 3.21. On observe pendant la décélération de l'arbre-moteur plusieurs dépressions (Tab. 3.7), mais néanmoins plus faibles que dans le cas d'un clapet anti-retour placé juste en aval de la pompe et se fermant de façon instantanée. La valeur de cette dépression peut être estimée par intersection de la droite du premier relayeur (1R) se dirigeant cette fois vers la caractéristique du clapet fermé (i.e. $Q = 0$).

Tableau 3.6 Calculs de l'application d'un volant d'inertie.

t (L/a)	$\omega_t = \omega_{t-2} - \Delta\omega$ (rad/s)	Pt d'intersection (l/s; m)	η	Couple (N.m)	$\Delta\omega$ (rad/s)
0	151,8	25,0 ; 80	0,94	137,5	26,8
2	125,1	20,5 ; 53	0,93	91,6	17,8
4	107,3	11,5 ; 57	0,79	75,9	14,8
6	92,4	4,0 ; 52	0,40	55,2	10,7

Tableau 3.7 Calculs de l'application d'un volant d'inertie.

Temps	2P	4P	6P	10P
ΔH (m)	27	23	28	4
Δp (Bar)	2,7	2,3	2,8	0,4

3.8.7 Coup de bélier et cavitation

La cavitation correspond au changement de phase liquide-vapeur lorsqu'un liquide voit sa pression absolue passer en dessous de sa pression de vapeur saturante à la température considérée. Ce phénomène n'est pas souhaitable car il est susceptible de causer les dommages suivants : (1) écaillage du revêtement intérieur en mortier de ciment, (2) pénétration d'eau souillée dans les canalisations d'eau potable [4]. Nous avons vu au paragraphe 3.8.4 que la fermeture d'une vanne en un temps très court génère des dépressions importantes. Si celles-ci entraînent le liquide jusqu'à sa pression de vapeur saturante, une cavitation apparaît. Si nous observons le graphe de la figure 3.22.a, lorsque la dépression arrive sur la vanne, la droite du relayeur crociera en premier la condition de cavitation (en C). La condition de cavitation est alors conditionnée par la relation suivante :

$$h_0 - \frac{a}{gS} Q_0 < \frac{p_v(T)}{\rho g} - 10,33 \quad (3.25)$$

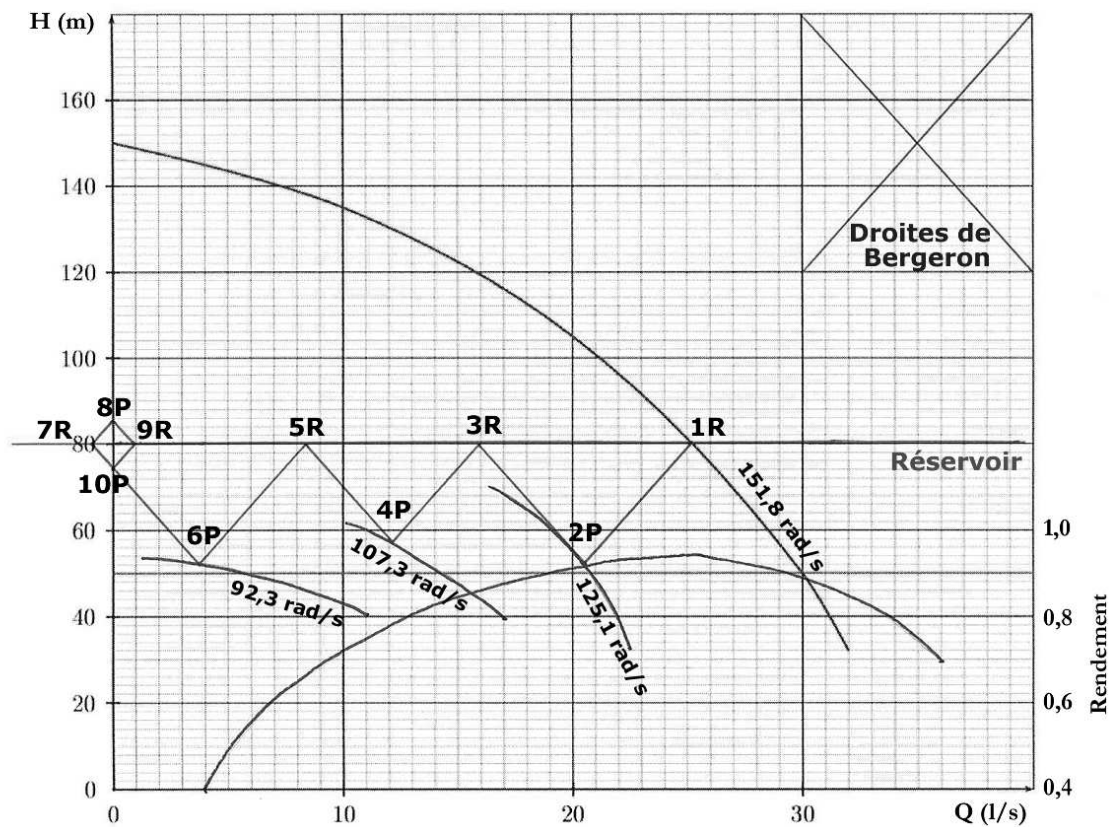


FIGURE 3.21 Résolution graphique de l'application utilisant un volant d'inertie sur un système de pompage.

où la valeur 10,33 correspond à la pression atmosphérique exprimée en mètre de colonne d'eau. Pour des conditions de température modérée (i.e. 20 °C), la pression de vapeur saturante est proche de 2340 Pa entraînant alors $p_V(T)/\rho g - 10,33 \approx -10$ m. Il s'agit là d'un ordre de grandeur pour la quantité $h_0 - aQ_0/gS$ à ne pas atteindre.

On note que le débit au point de cavitation est négatif durant la période [2,4]. Le signe négatif provient de l'orientation de l'axe des relayers orienté du réservoir vers la vanne. Ce signe devient positif si on considère le cas d'une alimentation d'un réservoir par une pompe pour lequel l'axe des relayers est alors orienté de la pompe vers le réservoir. Dans les deux cas de figure, le volume de la poche gazeuse croît du point de changement de régime et remonte vers le réservoir.

À la fin de cette période (i.e. $t = 4\tau$), le débit augmente et le volume de la poche gazeuse diminue jusqu'à se résorber. Ceci est atteint à un temps τ_0 (Fig. 3.22.b) qui peut être estimé à partir de l'évolution de volume de la poche en fonction du temps. Celle-ci montre une croissance du volume, puis une décroissance jusqu'à une valeur nulle au temps τ_0 . À cet instant, une surpression apparaît au niveau de la vanne. Un nouveau cycle est né sans que de cavitation apparaisse cette fois.

Après simplification, on peut écrire la valeur de la surpression, $\Delta h = h - h_o = \frac{2LQ_o}{gSt_f}$.

On obtient alors la formule de Michaud :

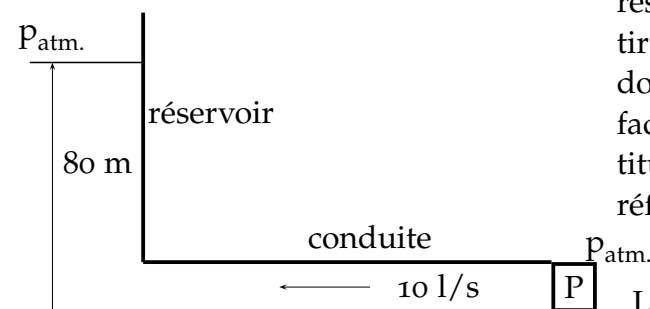
$$\Delta p = \frac{2\rho Lu_o}{t_f}$$

Rappelons-nous cependant que cette formule est basée sur une fermeture linéaire de la vanne, ce qui n'est pas le cas dans la pratique. La formule de Michaud conserve uniquement un intérêt théorique.

3.9 Exercices

Le niveau de difficulté des exercices suivants est évalué à partir du nombre d'étoiles () allant d'une étoile pour les exercices simples jusqu'à trois étoiles pour les exercices les plus difficiles à résoudre.*

[E23] Disjonction du moteur d'une pompe *



Une pompe est utilisée pour alimenter un réservoir à un débit égal à 10 l/s à partir d'une conduite dont les propriétés sont données dans le tableau ci-dessous. La surface libre du réservoir est placée à une altitude égale à 80 m par rapport au plan de référence.

Longueur (m)	Diamètre (m)	Célérité (m/s)
750	0,154	1100

À l'instant $t = 0$, le moteur de la pompe disjoncte, ce qui entraîne la fermeture d'un clapet anti-retour, placé dans cette même région, sur une durée totale $t_f = 0,5$ s. Le **but de cet exercice** est d'estimer les valeurs des amplitudes de variations de pression susceptibles d'apparaître.

[1.] Quel type de variation de pression (i.e. surpression ou dépression) apparaît au niveau de la vanne (côté conduite) lorsque le moteur de la pompe disjoncte ?

[2.] Estimer la variation de pression générée sur le clapet lors de sa fermeture.

[3.] Estimer cette même variation de pression dans le cas d'une fermeture du clapet sur une durée $t_f = 3,0$ s.

[E24] Fermeture progressive d'une vanne **

On considère un écoulement d'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,001 \text{ Pa.s}$) dans une conduite

d'adduction gravitaire dont l'extrémité est une vanne débitant à pression atmosphérique (Fig. 3.23). L'écoulement au passage de cette vanne subit une variation de pression, Δp (i.e., pertes de charges). Nous supposons qu'à partir de l'instant $t = 0$, la vanne se ferme suivant la loi de fermeture suivante :

$$\Delta p = 640 \rho g \left(\frac{Q}{1 - \frac{t}{T}} \right)^2 \quad (3.27)$$

avec g l'accélération de pesanteur, t le temps en seconde, T le temps de fermeture de la vanne égal à 4,1 s. Les chutes de pression pour des temps négatifs sont identiques à celle pour $t = 0$, la vanne étant pour ces temps-là partiellement fermée. Ainsi, on peut représenter pour un instant t la courbe caractéristique de la vanne par une parabole.

Dès le début de fermeture de la vanne, l'écoulement permanent est perturbé et des **ondes de pression** partent alors de façon continue de la vanne (avec pour célérité $a = 1177$ m/s). On utilisera alors la théorie de coup de bélier d'ondes.

But de l'étude : on se propose d'estimer, **graphiquement** par la méthode de Bergeron, les débits et pressions sur la vanne au cours de sa fermeture. Afin de simplifier l'étude, on ne s'intéressera qu'à des instants particuliers correspondant à des temps multiples d'un aller-retour d'une onde dans la conduite.

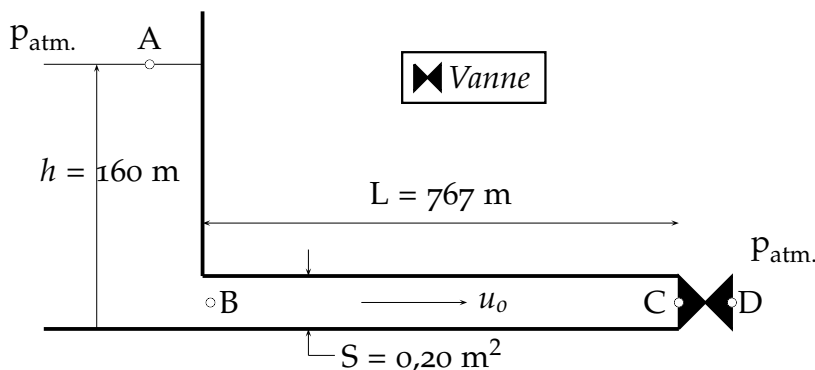


FIGURE 3.23 Données géométrique et numérique de la conduite d'adduction gravitaire de l'exercice 1 (A, point de la surface libre; B, point localisé au début de la conduite; C, point amont à la vanne; D, point aval à la vanne).

Le réservoir est de grande taille, on peut donc considérer son niveau comme étant constant, les pertes de charge seront négligées dans la conduite BC. L'accélération de pesanteur et la pression atmosphérique valent respectivement $g = 9,81$ m/s² et $p_{\text{atm.}} = 101\,000$ Pa.

[1.] Déterminer analytiquement le débit de l'écoulement **permanent**.

[2.] On notera τ le temps nécessaire à une onde pour faire un aller-retour dans la conduite BC. Déterminer et tracer sur le graphe de la page 156 les courbes caractéristiques de la vanne aux temps consécutifs $t = [0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, \dots]$.

[3.] Déterminer **graphiquement** les évolutions de la pression et du débit au niveau de la vanne (Vous ajouterez à votre rédaction un tableau récapitulatif identique au tableau 3.8). Vous argumenterez pour cela votre démarche à partir des allers-retours

des relayeurs de Bergeron dans la conduite, en donnant leurs équations complètes (i.e. en précisant la valeur de la constante).

Tableau 3.8 Évolution du débit et de la pression au niveau de la vanne

Instant	0	τ	2τ	3τ	4τ	...
$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$						
$\Delta p \text{ (bar)}$						

[4.] Entre les instants 0 et τ le débit passe de Q_0 à Q_τ au niveau de la vanne générant alors une surpression, $\Delta p_{0 \rightarrow \tau}$. Proposez, à partir des solutions de l'équation d'onde (cf. rappel 2), une formulation de cette surpression en fonction des débits Q_0 et Q_τ , ainsi que d'autres paramètres du problème. Vérifiez-vous cette formulation de la surpression ?

[E25] Fermeture partielle d'une vanne **

On se propose d'estimer la valeur maximale de la surpression dans une conduite d'adduction gravitaire (Figure 4.2) résultant de la fermeture **partielle** d'une vanne située à l'extrémité aval et débitant à pression atmosphérique. Le fluide considéré est de l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,001 \text{ Pa.s}$, $\chi = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$). Le réservoir étant de grande taille, on peut donc considérer son niveau comme étant constant, ainsi $h_0 = z_2 - z_1 = 100 \text{ m}$. La conduite BC de longueur $L = 3\,030 \text{ m}$ est de section circulaire de diamètre et d'épaisseur valant respectivement $D = 1 \text{ m}$ et $e = 10 \text{ mm}$. Le matériau constituant la conduite est caractérisé par un module d'Young $E = 20\,000 \text{ daN/mm}^2$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

Les pertes de charge générées par la vanne (placée entre les points C et D sur le schéma de la figure 4.2) sont formulées de la façon suivante :

$$\Delta H_v = \xi \frac{V^2}{2g}$$

où le coefficient ξ est relié à la section de passage de l'eau à travers cette vanne. Ainsi on peut représenter les courbes caractéristiques successives de la vanne, qui sont fonctions de son ouverture, par des paraboles. La valeur de ξ est égale à 0 lorsque la vanne est totalement ouverte et tend vers une valeur infinie pour une section de passage de plus en plus faible. Dans le cas d'une marche normale, ce coefficient ξ vaut 1209.

On négligera les pertes de charge dans la conduite BC ; l'accélération de pesanteur et la pression atmosphérique valent respectivement $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $p_{\text{atm.}} = 101\,000 \text{ Pa}$.

[1.] Déterminez le point de fonctionnement (Q_0, h_0) dans le cas d'une marche normale.

Après une fermeture partielle de la vanne d'une durée de 4 secondes, le débit de l'écoulement établi vaut $Q_1 = 0,6 \text{ m}^3/\text{s}$.

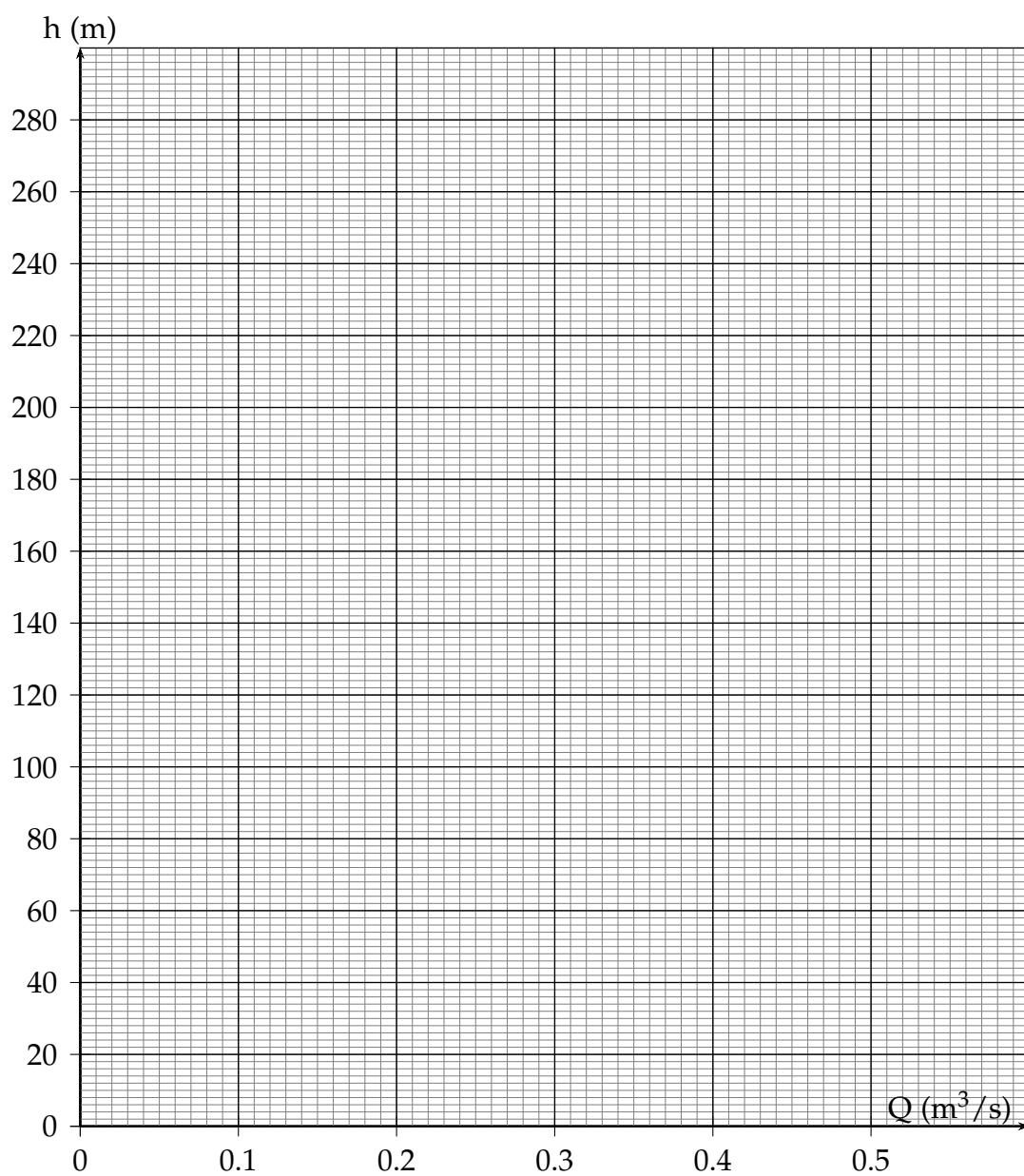


FIGURE 3.24 Graphe de l'exercice [24].

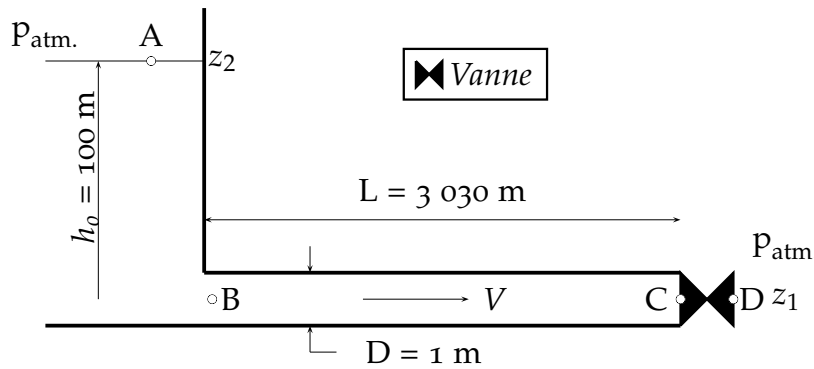


FIGURE 3.25 Données géométrique et numérique de la conduite d'adduction gravitaire de l'exercice 1 (A, point de la surface libre; B, point localisé au début de la conduite; C, point amont à la vanne; D, point aval à la vanne).

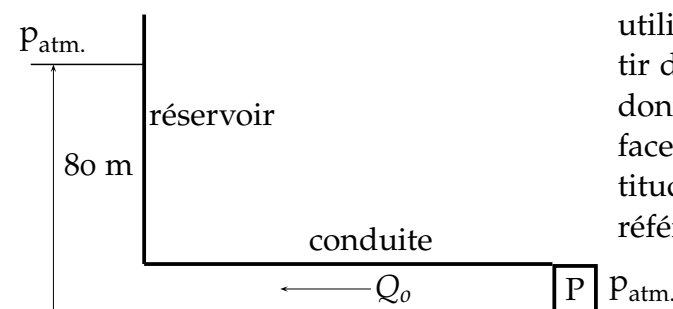
[2.] Montrer que la compressibilité de l'eau doit être prise en compte dans le problème.

[3.] Tracer l'épure de Bergeron, et déterminer les maximums de surpression et de dépression au niveau de la vanne. Vous argumenterez pour cela votre démarche à partir des allers-retours des trois premiers relayeurs de Bergeron dans la conduite, en donnant leurs équations complètes (i.e. en précisant la **valeur numérique** de la constante), et en stipulant les valeurs de débit et de hauteur observées à chacune de leur arrivée.

[4.] Estimer le temps d'établissement du régime permanent du débit égal à $0,6 \text{ m}^3/\text{s}$.

[5.] Proposez un moyen de protection adapté en expliquant son principe d'utilisation.

[E26] Coup de bélier dans le cas d'une variation de vitesse d'une pompe ***



Une pompe, fonctionnant à une vitesse de rotation égale à 1450 tr/min (Fig. 3.29), est utilisée pour alimenter un réservoir à partir d'une conduite dont les propriétés sont données dans le tableau ci-dessous. La surface libre du réservoir est placée à une altitude égale à 80 m par rapport au plan de référence.

Longueur (m)	Diamètre (m)	Célérité (m/s)
750	0,169	1100

Les pertes de charge générées par la conduite principale sont négligées pour des raisons de simplification.

Description du problème à traiter

Au temps t_0 le moteur de la pompe est sujet à un dysfonctionnement entraînant une variation de la vitesse de rotation de la pompe. On note alors des variations de pression et de débit au niveau de la pompe et du réservoir. Après un temps d'établissement, le débit observé dans la conduite vaut 10 l/s. Quelques instants après cet établissement, au temps t_1 , le moteur de la pompe dysfonctionne de nouveau et la pompe voit sa vitesse de rotation varier pour atteindre sa valeur initiale 1450 tr/min. De nouveau, des variations de débit et de pression sont observées.

Partie 1 : dysfonctionnement 1

[1.] Déterminez le point de fonctionnement de la pompe avant le dysfonctionnement de la pompe.

[2.] Déterminez la vitesse de rotation atteinte par la pompe après le premier dysfonctionnement, et tracez la courbe caractéristique de la pompe à cette vitesse.

[3.] Déterminez graphiquement le temps d'établissement nécessaire pour atteindre le nouveau régime. *On considèrera le nouveau régime comme étant établi dès lors que la charge atteint une valeur proche de 3% de la valeur finale.*

[4.] Quelle est l'amplitude maximale de variation de pression au niveau de la pompe après ce dysfonctionnement ?

Partie 2 : dysfonctionnement 2

[5.] Déterminez graphiquement le temps d'établissement nécessaire pour atteindre le régime après le deuxième dysfonctionnement.

[6.] Quelle est l'amplitude maximale de variation de pression au niveau de la pompe après ce deuxième dysfonctionnement ?

[E27] Application de la méthode graphique de Bergeron au cas d'un démarrage d'une pompe**

On considère une conduite d'épaisseur e , de diamètre de section de passage D , de longueur L et constituée d'un matériau de module d'Young E dont les valeurs sont rassemblées dans le tableau 3.9, ayant à ses extrémités un réservoir et une pompe (Fig. 3.26). La courbe caractéristique de cette dernière est tracée sur la figure 3.27. La pompe est initialement arrêtée, et à l'instant $t = 0$, elle est mise en route. Un écoulement est alors créé de la pompe vers le réservoir à alimenter.

Tableau 3.9 Caractéristiques de la conduite de l'application et propriétés physiques de l'eau.

e (mm)	D (mm)	L (m)	E (Pa)	ρ (kg/m ³)	χ (Pa ⁻¹)
10	100	4700	$3,6 \times 10^{10}$	1000	$0,5 \times 10^{-9}$

But de l'application : il est de prédire à partir de la méthode graphique de Bergeron, et en négligeant les pertes de charge dans la conduite, d'une part le temps approximatif d'établissement de l'écoulement généré par la mise en route de la pompe, et

d'autre part la valeur maximale de la pression dans la conduite d'alimentation. On tracera sur la figure 3.27 l'évolution des pressions et débits sur les extrémités de la conduite d'alimentation.

Hypothèse : on supposera que la courbe caractéristique de la pompe correspond, dès sa mise en marche, à celle tracée sur la figure 3.27. On fera ainsi abstraction des effets d'inertie de masses tournantes qui entraîneraient une vitesse de rotation progressive (et non plus instantanée comme c'est le cas ici) et ainsi un accroissement progressif de la courbe caractéristique de la pompe.

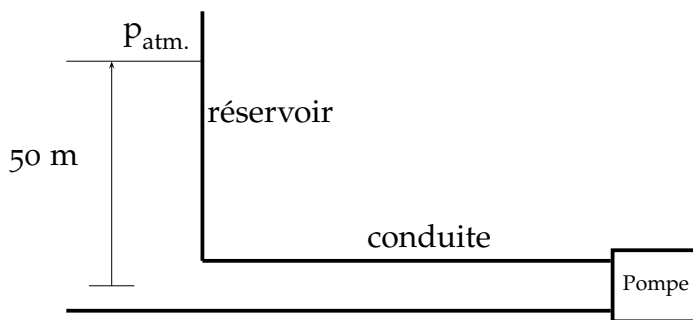
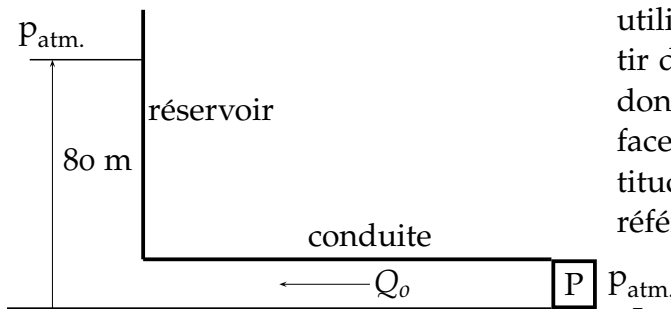


FIGURE 3.26 Schéma pour l'étude du démarrage de la pompe (Exercice [E27]).

[E28] Influence d'un volant d'inertie sur les variations de pression observées lors de la disjonction d'un moteur de pompe ***



Une pompe, fonctionnant à une vitesse de rotation égale à 1450 tr/min (Fig. 28), est utilisée pour alimenter un réservoir à partir d'une conduite dont les propriétés sont données dans le tableau ci-dessous. La surface libre du réservoir est placée à une altitude égale à 80 m par rapport au plan de référence.

Longueur (m)	Diamètre (m)	Célérité (m/s)
750	0,154	1100

À l'instant $t = 0$, le moteur de la pompe disjoncte, ce qui est susceptible d'entraîner des variations importantes de la pression dans la région de la pompe. Le **but de cet exercice** est d'une part d'estimer les valeurs des amplitudes de variations de pression en absence de tout moyen de protection. On étudiera dans une deuxième partie l'influence d'un volant d'inertie ajouté au système sur ces surpressions et dépressions.

Partie 1 : étude du régime permanent

[1.] Dans le cas où les pertes de charge générées par la conduite principale sont négligées, estimer le point de fonctionnement de la pompe lors du régime permanent. Quel est dans ce régime le couple moteur fourni par le moteur, C_o , entraînant en rotation la pompe ?

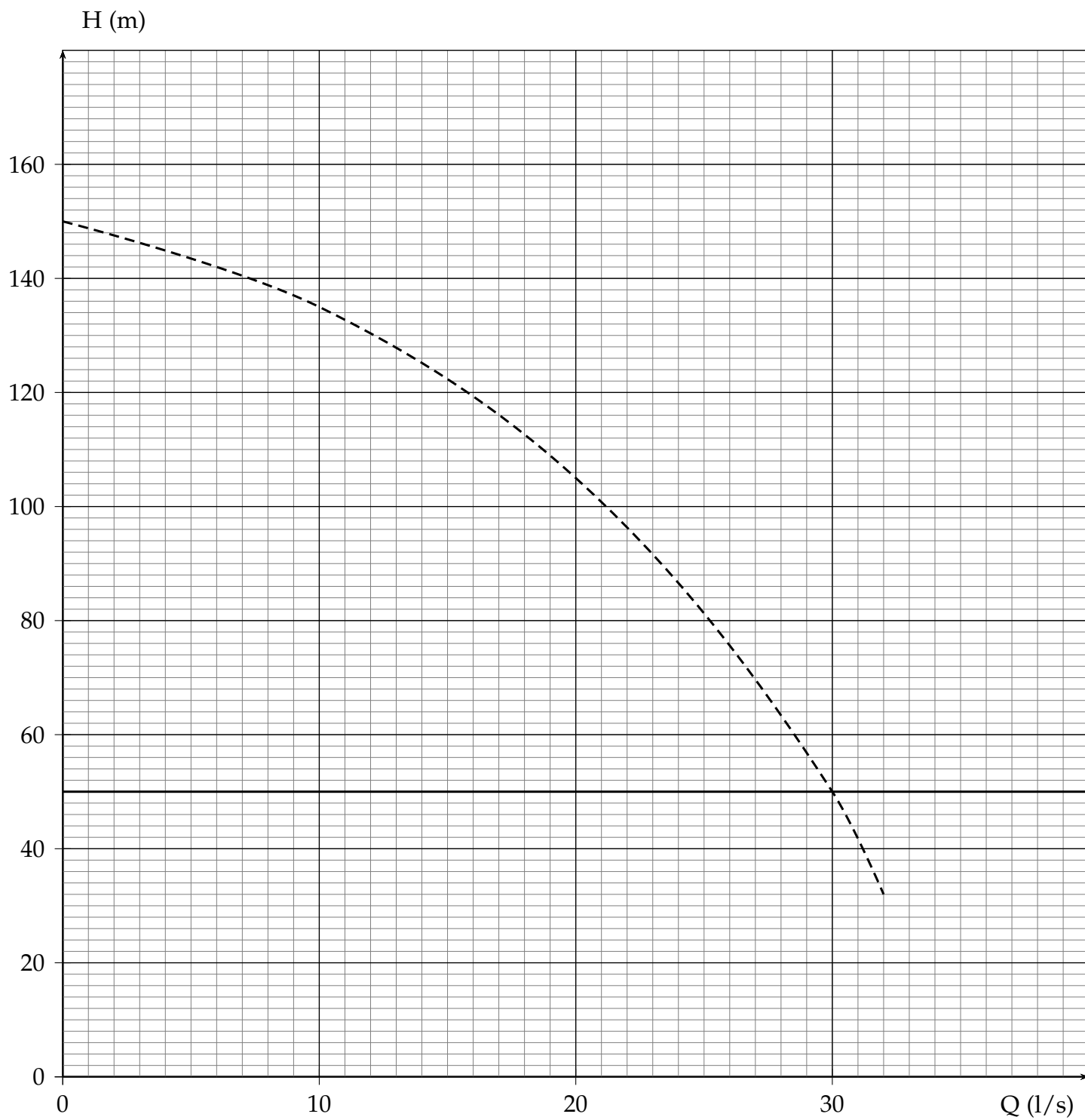


FIGURE 3.27 Courbes de réseau et de la pompe de l'exercice [E27].

Partie 2 : absence d'un moyen de protection

On considérera dans cette première partie le système moteur comme étant dépourvu de tout moyen de protection. On supposera alors la fermeture instantanée d'un clapet anti-retour placé en aval de la pompe à la disjonction du moteur d'entraînement.

[2.] À partir des deux premiers relayeurs de Bergeron, estimez sur le clapet la première variation de pression par rapport à celle du régime permanent lors de la première demi-période. On basera cette résolution sur l'utilisation des relations portées par les relayeurs, et non pas sur une méthode graphique.

Partie 3 : utilisation du volant d'inertie

Dans le but de diminuer les valeurs des surpressions et des dépressions observées lors de la deuxième partie, un volant d'inertie en acier (Fig. 3.28), de masse m , est installé sur l'arbre moteur avec pour caractéristiques $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $R_1 = 0,18 \text{ m}$, $R_2 = 0,25 \text{ m}$, $L = 0,2 \text{ m}$. Celui-ci restitue lors de la disjonction du moteur l'énergie accumulée pendant la marche normale, augmentant ainsi le temps d'arrêt de l'ensemble (Cf. paragraphe 3.7.1 page 131). L'intensité du coup de Belier se trouve donc diminuée.

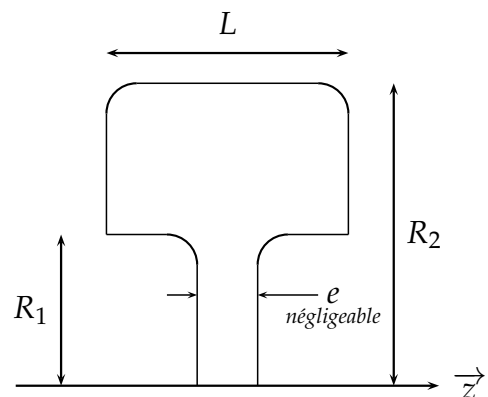


FIGURE 3.28 Section du volant d'inertie de l'exercice [E28].

Pour la résolution des questions ci-dessous, il n'est pas obligatoire d'écrire les relations de chaque relayeur. On pourra utiliser une approche purement graphique.

[3.] Peu de temps avant la disjonction du moteur, le relayeur R_1 quitte la pompe, et se dirige vers le réservoir. Quelles sont les conditions observées par ce relayeur à son arrivée ?

[4.] À l'arrivée du relayeur R_1 au réservoir, le relayeur R_2 quitte le réservoir et se dirige vers la pompe. Quelle est la nouvelle vitesse de rotation de la pompe, ω_1 , à son arrivée ? Tracez alors la nouvelle caractéristique de la pompe, et estimez les conditions de débit et de hauteur observées par R_2 . On supposera ici que la courbe de rendement demeure inchangée avec la vitesse de rotation.

[5.] À l'arrivée du relayeur R_2 sur la pompe, le relayeur R_3 quitte la pompe et se dirige

vers le réservoir. Quelles sont les conditions observées par ce relayeur à son arrivée ?

[6.] À l'arrivée du relayeur R_3 au réservoir, le relayeur R_4 quitte le réservoir et se dirige vers la pompe. Quelle est la nouvelle vitesse de rotation de la pompe, ω_2 , à son arrivée ? Tracez alors la nouvelle caractéristique de la pompe, et estimez les conditions de débit et de hauteur observées par R_4 .

[7.] Continuez la démarche proposée plus haut, et estimez les conditions observées par les relayeurs suivants aux extrémités de la conduite, sachant que la pompe est totalement arrêtée après un temps égal à 4,7 s.

[8.] Estimez les amplitudes des variations de pression par rapport à celle du régime permanent observées tant que la pompe est en rotation.



FIGURE 3.29 Courbes de la pompe de l'application de l'exercice [E28] ($N = 1450$ tr/min).

Analyse Dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est fondée sur le principe fondamental très simple selon lequel une relation entre grandeurs physiques doit être dimensionnellement homogène, c'est à dire indépendante du système d'unités. Tout particulièrement en mécanique des fluides, l'analyse dimensionnelle est une étape importante car elle permet d'exprimer des lois entre plusieurs grandeurs physiques. Son utilité se fait sentir dès lors que l'on veut simplifier les termes d'une équation afin d'en alléger l'écriture. Elle permet aussi d'aboutir à une réduction du nombre de variables limitant ainsi l'étude paramétrique associée. Nous verrons d'autre part que l'analyse dimensionnelle guide l'ingénieur dans l'élaboration de tests sur maquettes en lui indiquant les produits adimensionnels à respecter.

4.1 Équations de Navier-Stokes sans dimension

Les équations de mouvement d'un écoulement incompressible s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$
$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

On considère le problème comme étant caractérisé par différents paramètres (i) une longueur L , (ii) une vitesse U , (iii) une accélération g , et (iv) une pression ρU^2 . La vitesse mentionnée ici peut par exemple correspondre à celle observée dans une région très amont d'un obstacle à étudier. La longueur doit quant à elle caractériser

cet obstacle (diamètre d'une conduite, longueur d'une plaque, etc.). Les variables de l'écoulement peuvent ainsi être exprimées à partir de ces paramètres de référence et de variables sans dimension (notées ici avec le symbole $^+$) : $x_i^+ = x_i/L$, $u_i^+ = u_i/U$, $t^+ = tU/L$, $g^+ = g/g$, et $p^+ = p/\rho U^2$. Les deux équations précédentes peuvent donc être manipulées pour faire apparaître ces variables sans dimension :

$$\frac{U}{L} \times \frac{\partial u_i^+}{\partial x_i^+} = 0$$

$$\rho \frac{U^2}{L} \times \frac{\partial u_i^+}{\partial t^+} + \rho \frac{U^2}{L} \times u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} = \rho g \times g_i^+ - \rho \frac{U^2}{L} \times \frac{\partial p^+}{\partial x_i^+} + \mu \frac{U}{L^2} \times \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+ \partial x_j^+}$$

On définit les produits sans dimension suivant $\text{Fr}^2 = U^2/gL$ et $\text{Re} = \rho UL/\mu$. Ces groupes sans dimension sont développés plus bas. Les équations de mouvement adimensionnées s'écrivent finalement :

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial x_i^+} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^+} + u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} = \frac{1}{\text{Fr}^2} g_i^+ - \frac{\partial p^+}{\partial x_i^+} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} \quad (4.2)$$

La modification des équations de Navier-Stokes en équations basées sur des variables adimensionnelles montre d'une part que lorsqu'une solution pour un écoulement particulier est connue et est exprimée sous une forme adimensionnelle, celle-ci sera identique pour tout écoulement ayant des conditions limites et initiales (exprimées sous forme adimensionnelle aussi) respectivement identiques, et pour lequel toute variation des paramètres laisse Fr et Re inchangés. On parlera ici d'écoulements *similaires*. Comprenons donc que si ces nombres gardent la même valeur sur la maquette et dans le cas réel, les équations du mouvement seront parfaitement identiques dans les deux cas, ainsi que la forme de leurs solutions. Dans le cas d'écoulements instationnaires d'un fluide compressible, le cheminement est identique et fait apparaître des équations plus complexes. Il faut dans ce cas transformer en plus une équation de bilan d'énergie.

4.2 Produits sans dimension déterminant des écoulements similaires

La section précédente a permis de comprendre les conditions nécessaires à l'obtention d'écoulements similaires, et a mis en évidence d'autre part pour les écoulements incompressibles deux produits sans dimension, les nombres de Reynolds et de Froude (respectivement Re et Fr). Il existe d'autres produits sans dimension rencontrés régulièrement dans les problèmes de mécanique des fluides. Comme les nombres de Reynolds et de Froude, ils correspondent généralement au rapport de deux efforts particuliers ce qui leur donne alors un sens physique alors qu'ils sont dépourvu pourtant de

dimension. D'autre part les particularités qui affectent un écoulement donné, localement ou globalement, ne sont pas définies par la valeur de grandeurs mesurables considérées isolément, vitesse, longueur. . Ces grandeurs n'ont d'intérêt que dans la mesure où on considère leurs valeurs dans leur ensemble par l'utilisation des produits sans dimension. On se propose ici d'énumérer quelques produits sans dimension observés régulièrement.

4.2.1 Le nombre de Reynolds

Dans le cas des écoulements pour lesquels la compressibilité peut être négligée, et en absence de surface libre, seuls les efforts de viscosité et d'inertie dominant. Le rapport de ces deux efforts définit le nombre de Reynolds :

$$\frac{\rho U^2 / L}{\mu U / L^2} = \frac{\rho U L}{\mu} = \text{Re} \quad (4.3)$$

Ainsi lorsque les efforts d'inertie dominant très fortement les efforts visqueux, le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement aura une valeur très importante ($\text{Re} \gg 1$), et l'écoulement sera dans ce cas caractérisé par des mouvements très désordonnés. On parlera de régime turbulent. Au contraire les écoulements à nombre de Reynolds très faibles auront des trajectoires déterministes et seront dit laminaires.

4.2.2 Le nombre de Froude

Lorsque la résistance à l'avancement consécutive à la présence de vagues générées ou non par un bateau est étudiée, le rapport des efforts d'inertie et de gravité devient important :

$$\frac{\rho U^2 / L}{\rho g} = \frac{U^2}{gL}$$

On souhaite généralement faire apparaître le terme de vitesse non élevée au carré comme cela est le cas dans le nombre de Reynolds. Cette nouvelle expression est appelée nombre de Froude :

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (4.4)$$

On peut trouver toutefois une écriture légèrement différente du nombre de Froude, à savoir $\text{Fr} = U^2 / gL$. Le nombre de Froude, utilisé donc dans des problèmes impliquant une surface libre, définit le type d'écoulement dans les canaux fluviaux qui peut être torrentiel ($\text{Fr} > 1$), critique ($\text{Fr} = 1$), ou fluvial ($\text{Fr} < 1$).

4.2.3 Le nombre de Strouhal

Lorsqu'un écoulement fait apparaître des phénomènes transitoires définis par un temps caractéristique T , celui-ci peut être comparé au temps caractérisant l'écoulement dans la région amont absente du phénomène transitoire, $(L/U)/T$. On préfère généralement manipuler la fréquence de présence du phénomène transitoire $f = 1/T$ (par

exemple la fréquence des lâchers de tourbillons d'un cylindre totalement immergé dans un écoulement permanent), et le nombre de Strouhal s'écrit finalement :

$$St = \frac{fL}{U} \quad (4.5)$$

Le temps caractéristique d'un écoulement permanent est une valeur très élevée et tendant mathématiquement vers l'infini. La fréquence devient donc nulle, entraînant une valeur nulle du nombre de Strouhal. Le concept de nombre de Strouhal est repris plus loin, page 200, dans le chapitre concernant l'aérodynamique.

4.2.4 Le nombre de Mach

Lorsque les écoulements font apparaître des efforts de compressibilité non négligeables le rapport des efforts de pression sur les efforts d'inertie est important :

$$\frac{p/L}{\rho U^2/L} = \frac{p}{\rho U^2} \quad (4.6)$$

Les efforts de pression sont généralement importants dans le cas d'écoulements d'air à grande vitesse, la relation des gaz parfaits (i.e. $p/\rho = rT = c^2$) permet alors de transformer la relation précédente :

$$\frac{\text{Efforts de pression}}{\text{Efforts d'inertie}} = \gamma M^2 \quad (4.7)$$

avec $M = U/c$ le nombre de Mach. Il est couramment admis que lorsque sa valeur devient plus élevée que 0,2 – 0,3 les effets de compressibilité deviennent importants. On note au passage que le fait d'introduire la célérité de l'air dans le problème entraîne irrémédiablement la nécessité d'une équation de l'énergie pour l'estimation du champ de température dont dépend la célérité.

4.3 Théorème de Vaschy-Buckingham ou Théorème PI

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent quelques produits sans dimension que l'on rencontre régulièrement dans les problèmes de mécanique des fluides. Tous ont été obtenus à partir des équations de mouvement du fluide. Il en existe d'autres et certains sont spécifiques aux problèmes impliquant des transferts de chaleur (nombres de Nusselt et de Prandtl par exemple). Nous allons voir ici une méthode mathématique, appelé **Théorème de Vaschy-Buckingham** utile à mettre en évidence les nombres sans dimension caractéristiques du problème traité. Notons dès à présent que cette méthode, systématique, doit être manipulée avec un certain *sens physique* (sans quoi les nombres sans dimension obtenus n'auront aucune réalité physique), et n'est pas une fin en soi. Un traitement est ensuite nécessaire pour relier ces nombres entre eux.

4.3.1 Principe

La mise en forme adimensionnelle fait appel au théorème π mis en place par Vaschy [52] et Buckingham [15]. Considérons un phénomène physique décrit par une relation de la forme

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4.8)$$

où x_1 est la grandeur caractérisant le phénomène physique et $(x_2, \dots, x_n)$ $n - 1$ paramètres indépendants. Si k désigne le nombre minimal d'unités fondamentales nécessaires pour définir les dimensions des n paramètres, alors le théorème π indique qu'il est possible de grouper ces n paramètres en $n - k$ produits sans dimension à travers une fonctionnelle φ :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0 \quad (4.9)$$

En mécanique des fluides, k vaut généralement 3 (M, L, T) ou 4 si l'on rajoute la température (Θ) dans les cas où les transferts thermiques ne sont pas négligeables.

La détermination des nombres sans dimension peut se faire dans tous les cas selon la méthode suivante. On choisit k paramètres parmi les n de la liste de telle sorte que toutes les unités fondamentales soient représentées. D'autre part, ces paramètres sont choisis afin de faire apparaître ensuite des produits sans dimension connus (Re, Fr, M,...) et surtout dont on appréhende le sens physique. Prenons les paramètres $x_1, x_2, \dots, x_k$ qui satisfont tous ces critères. On forme ensuite les $n - k$ groupes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \pi_1 & = & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} x_{k+1} \\ \pi_2 & = & x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_k^{\beta_k} x_{k+2} \\ \vdots & & \\ \pi_{n-k} & = & x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \dots x_k^{\eta_k} x_n \end{array} \right.$$

Il reste finalement à déterminer les combinaisons d'exposants qui transforment ces produits en groupes sans dimension. Pour cela, on exprime chaque quantité en fonction des unités fondamentales et on résoud un système linéaire pour chaque ensemble d'exposants $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \dots, (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$. Une fois ces produits sans dimension déterminés, la nullité de la variationnelle stipule les relations suivantes, en fonction du nombre de produits sans dimension : (1) s'il existe un unique produit sans dimension π_1 , on obtient l'expression $\varphi(\pi_1) = 0$ d'après la relation (4.9), entraînant $\pi_1 = \text{constante}$. La constante sera déterminée à partir d'essais réalisés. (2) s'il existe plusieurs produits sans dimension $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, avec π_1 comprenant le paramètre principal, on peut dès lors écrire $\pi_1 = f(\pi_2, \dots, \pi_n)$. La fonction f est *a priori* inconnue, il faut dans ce cas effectuer une étude paramétrique afin de proposer une formulation.

- Le théorème π suppose que l'on est capable de lister toutes les grandeurs physiques qui interviennent dans le phénomène physique ;
- Les paramètres x_i ne sont pas obligatoirement une entité seule mais peuvent être un groupement de paramètres (par exemple $g\Delta\rho$ pour mettre en évidence la poussée d'Archimède dans un fluide) ;
- Le théorème π nous indique le nombre de produits sans dimension que l'on peut construire, il n'y a pas en général unicité de la solution. L'utilisateur fait le choix des paramètres $x_i^{\alpha_j}$ en cherchant si possible à faire apparaître des produits sans dimension habituels ($Re, Fr, Nu, Pr, M, \dots$) ;
- Il faut aussi comprendre que le théorème π ne donne pas la forme de la relation qui lie les différents π_i , la recherche de cette relation fait l'objet du dépouillement des résultats expérimentaux.

4.3.2 Application — traînée d'une sphère

On considère une sphère de diamètre d totalement plongée dans un écoulement uniforme de vitesse U . Le fluide exerce alors un effort aérodynamique sur la sphère appelé traînée et le but ici est d'exprimer cet effort en fonction des autres paramètres importants du problème. La sphère étant considérée comme lisse, les rugosités surfaciques n'interviennent donc pas. L'expérience montre d'autre part que la vitesse de l'écoulement, le diamètre de la sphère, la masse volumique et la viscosité du fluide ont une influence sur l'effort. La traînée T dépend donc de tous ces paramètres, $T \equiv T(d, U, \rho, \mu)$. La relation (4.8) permet donc d'écrire $f(T, d, U, \rho, \mu) = 0$, avec 5 variables indépendantes exprimées à partir de 3 unités fondamentales. Le théorème π indique donc que le phénomène physique peut être décrit par $5 - 3 = 2$ nombres sans dimension, π_1 et π_2 . Parmi les trois variables de notre choix, d , ρ et U sont choisis de telle sorte que les dimensions de longueur, de temps et, de masse apparaissent. Les deux produits sans dimension

$$\begin{aligned}\pi_1 &= d^{\alpha_1} \rho^{\alpha_2} U^{\alpha_3} T = L^{\alpha_1} (ML^{-3})^{\alpha_2} (LT^{-1})^{\alpha_3} (MLT^{-2}) \\ \pi_2 &= d^{\beta_1} \rho^{\beta_2} U^{\beta_3} \mu = L^{\beta_1} (ML^{-3})^{\beta_2} (LT^{-1})^{\beta_3} (ML^{-1}T^{-1})\end{aligned}$$

étant sans dimension, il vient :

$$\pi_1 \begin{cases} \alpha_2 + 1 & = 0 & \text{: exposants de M;} \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 + 1 & = 0 & \text{: exposants de L;} \\ -\alpha_3 - 2 & = 0 & \text{: exposants de T.} \end{cases}$$

Il vient donc $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-2, -1, -2)$. D'où le premier nombre sans dimension, $\pi_1 = T/(\rho d^2 U^2)$. On fait de même pour le deuxième nombre sans dimension :

$$\pi_2 \begin{cases} \beta_2 + 1 & = 0 & \text{: exposants de M;} \\ \beta_1 - 3\beta_2 + \beta_3 - 1 & = 0 & \text{: exposants de L;} \\ -\beta_3 - 1 & = 0 & \text{: exposants de T.} \end{cases}$$

d'où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-1, -1, -1)$ entraînant $\pi_2 = \mu/(\rho d U)$. Il s'agit là (de l'inverse) du nombre de Reynolds. Le théorème π indique donc que le produit sans dimension impliquant la traînée est lié au nombre de Reynolds :

$$\frac{T}{\rho d^2 U^2} = f(\text{Re})$$

On fait généralement apparaître ici la pression dynamique (i.e. $1/2\rho U^2$) et une surface de référence A dans ce produit correspondant alors l'écriture du coefficient de traînée, $C_D = T/(1/2\rho U^2 A)$. Dans le cas d'une sphère la surface de référence est le maître-couple $A = \pi d^2/4$ c'est à dire la surface projetée de la sphère sur un plan perpendiculaire à l'écoulement. *A posteriori* l'expérience montre que l'évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds est similaire pour des sphères de diamètres différents (Fig. 4.1). Nous notons qu'au-delà d'un nombre de Reynolds égal à 1000, celui-ci n'a quasiment plus aucune influence sur le coefficient de traînée. On observe tout de même une chute de ce dernier pour des nombres de Reynolds proches de 2×10^5 pour redevenir stable. Cette chute est consécutive à la présence d'une couche limite turbulente autour de la sphère.

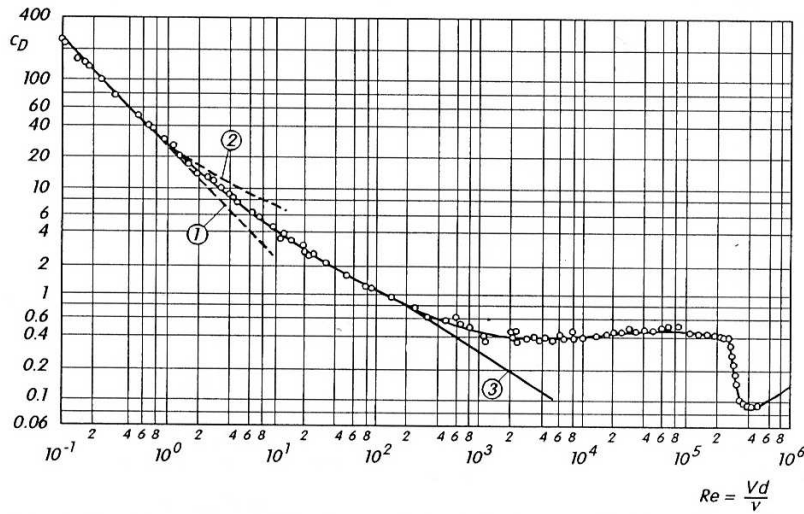


FIGURE 4.1 Évolution du coefficient de traînée d'une sphère.

On a fait l'hypothèse dans l'exemple précédent d'une surface lisse, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet la rugosité peut avoir une influence de l'écoulement dans la région proche de la paroi et de ce fait influencer l'évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds. Ceci est illustré sur la figure 5.19.

4.4 Similitude

Un champ d'application de l'analyse dimensionnelle est celui des problèmes de similitude entre un modèle (i.e., maquette à échelle réduite) et un prototype. Cette tech-

nique est couramment utilisée lorsque les essais réels sont très complexes et lorsque les simulations numériques deviennent trop coûteuses en temps de calcul.

L'analyse dimensionnelle est là essentiellement pour donner des informations sur les conditions de similitude pour lesquelles les mesures effectuées à échelle réduite sont représentatives du système réel. En effet, il serait trivial de penser que tous les phénomènes mesurés sur maquette sont proportionnels à ceux observés en réalité. De plus, il peut y avoir des différences notables du fait que les essais sont effectués à échelle réduite, cet effet est appelé effet d'échelle.

Malgré cela, il existe des domaines pour lesquels les essais sur modèles sont nécessaires : l'hydraulique (études de barrages, de canaux, d'aménagements côtiers), l'hydrodynamique (effet de la houle sur les structures marines), l'aérospatial (conception de maquettes d'avions, de fusées).

Voyons maintenant ce qui caractérise les études de similitudes.

4.4.1 Géométrie des maquettes

Si les formes de la maquette et du prototype sont homothétiques, on dit que les deux systèmes sont géométriquement semblables. Ceci est majoritairement le cas. Cependant il peut exister des modèles pour lesquels il existe des similitudes différentes selon les axes. C'est par exemple le cas lors d'études concernant les aménagements côtiers ou les systèmes hydrauliques. Une similitude complète conduirait à des hauteurs d'eau de l'ordre du centimètre. Dans ces conditions, l'écoulement serait fortement perturbé par les tensions surfaciques. Pour éviter cela, il existe une distorsion des échelles.

4.4.2 Conditions de similitude

Ces conditions sont déduites du théorème π . Celui-ci indique qu'un phénomène physique dépendant d'un ensemble de variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ peut être caractérisé par une relation entre une série de produits sans dimension $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}$:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0$$

La similitude sera donc respectée si tous les nombres sans dimension sont identiques pour la maquette et pour le prototype.

4.4.3 Application – disque en rotation

On souhaite estimer le couple de frottement exercé par de l'huile ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 1,84 \times 10^{-2} \text{ Pa.s}$) sur un disque de rayon 120 mm en rotation autour de son axe de révolution. On dispose pour cela de prédictions numériques de couple de frottement dans le cas d'un disque de rayon 150 mm (Tab. 4.1) et en rotation dans de l'air ($\rho = 1,185 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 1,831 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$). L'épaisseur du disque est considérée comme étant négligeable devant le diamètre.

Le couple de frottement C dépend *a priori* des propriétés physiques du fluide (ρ et μ), du rayon du disque (R), et de la vitesse de rotation (ω), ainsi $C = C(\rho, \mu, R, \omega)$.

Tableau 4.1 Prédiction numérique du couple de frottement d'un disque de diamètre 300 mm en rotation autour de son axe de révolution dans l'air.

ω (rad/s)	300	500	700
C (N.m)	$4,67 \times 10^{-2}$	$1,20 \times 10^{-1}$	$2,21 \times 10^{-1}$

Tableau 4.2 Coefficient de couple de frottement d'un disque de rayon 150 mm en rotation autour de son axe de révolution dans l'air.

ω (rad/s)	300	500	700
$Re = \rho R^2 \omega / \mu$	$4,37 \times 10^5$	$7,28 \times 10^5$	$1,02 \times 10^6$
$C_m = C / (1/2 \rho R^5 \omega^2)$	$1,15 \times 10^{-2}$	$1,01 \times 10^{-1}$	$0,95 \times 10^{-2}$

Le nombre de paramètre vaut 5 pour 3 unités fondamentales, le théorème π stipule deux produits sans dimension. Pour formuler ces produits, la masse volumique, le rayon, et la vitesse de rotation sont choisis pour paramètres de base. Les produits sans dimension s'écrivent alors

$$C_m = \frac{C}{1/2 \rho R^5 \omega^2} \quad \text{et} \quad Re = \frac{\rho R^2 \omega}{\mu}$$

Le coefficient de couple de frottement est estimé pour les trois vitesses (Tab. 4.2), et son évolution avec le nombre de Reynolds peut être approchée par une loi de type puissance :

$$C_m = \frac{0,0939}{Re^{0,161}}$$

L'estimation du couple de frottement exercé par l'huile sur un disque de diamètre égal à 120 mm est obtenue à partir de l'estimation du nombre de Reynolds dans cette nouvelle configuration, puis du couple de frottement adimensionnel, et enfin le couple de frottement. Les résultats obtenus à chacune de ces étapes sont rassemblés dans le tableau 4.3. On remarque que les nombres de Reynolds atteints dans le cas du disque en rotation dans l'huile (Tab. 4.2) sont dans la gamme de ceux observés dans la configuration numérique (Tab. 4.3) nous permettant ainsi d'utiliser l'approximation en puissance.

4.5 Récapitulatif

Afin d'y voir plus clair, récapitulons un peu ce que nous venons de voir. Il apparaît donc plusieurs types d'écoulements pour lesquels certains processus physiques do-

Tableau 4.3 Couple de frottement exercé par l'huile sur un disque de rayon 120 mm en rotation autour de son axe de révolution.

ω (rad/s)	300	500	700
$Re = \rho R^2 \omega / \mu$	$2,16 \times 10^5$	$3,60 \times 10^5$	$5,04 \times 10^5$
$C_m = 0,0939 / Re^{0,161}$	$1,30 \times 10^{-2}$	$1,20 \times 10^{-1}$	$1,13 \times 10^{-2}$
$C = C_m \times (1/2 \rho R^5 \omega^2)$ (N.m)	13,40	34,34	63,40

minent. Et lorsque l'on désire effectuer une étude sur maquette, l'ensemble des produits sans dimension peuvent être ou tous respectés (similitude complète), ou alors la théorie rencontre une incohérence. Dans cette dernière configuration, il importe alors de respecter en priorité certains nombres sans dimension, caractéristiques du phénomène physique dominant.

Ces similitudes sont :

- Similitude complète : tous les nombres sans dimension sont respectés.
- Similitude de Froude :
 - Incomplète ;
 - Forces d'inertie, de turbulence, et de pesanteur prépondérantes ;
 - Forces de viscosité négligeables ¹ ;
 - Respect du nombre de Froude : $Fr = \frac{V^2}{gl}$.
- Similitude de Reynolds :
 - Incomplète ;
 - Forces d'inertie, de turbulence, et de viscosité prépondérantes ;
 - Forces de pesanteur négligeables ;
 - Respect du nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho VD}{\mu}$.
- Similitude de Mach :
 - Incomplète ;
 - Forces de pression et de compressibilité prépondérantes ;
 - Respect du nombre de Mach : $M = \frac{V}{c}$.

4.6 Exercices

Le niveau de difficulté des exercices suivants est évalué à partir du nombre d'étoiles () allant d'une étoile pour les exercices simples jusqu'à trois étoiles pour les exercices les plus difficiles à résoudre.*

[E29] Écoulement sanguin *

La perte de charge par unité de longueur Δp_l pour un écoulement sanguin dans un tube mince horizontal est fonction du débit, du diamètre du tube et de la viscosité du sang. Une série de mesures, effectuée dans un tube de longueur $L=300$ mm, de diamètre $D=2$ mm, pour une viscosité de $\mu=0,004$ Pa.s a donné les résultats du tableau ci-contre.

Q (m ³ /s)	Δp (Pa)
$3,6 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^4$
$4,9 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^4$
$6,3 \times 10^{-6}$	$1,9 \times 10^4$
$7,9 \times 10^{-6}$	$2,4 \times 10^4$
$9,8 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^4$

1. L'écoulement doit alors présenter une turbulence fortement développée, entraînant dès lors un problème pour les écoulements surfaciques de faible profondeur. Ce problème peut néanmoins être contourné en introduisant une distorsion d'échelle.

A partir d'une analyse dimensionnelle, établir un modèle de Δp_l en fonction de Q valable aussi pour d'autres valeurs de diamètres, de longueur et de viscosité.

[E30] Convection forcée *

A partir d'une analyse dimensionnelle, exprimer le coefficient d'échange convectif pour un écoulement en conduite, en fonction de la vitesse u , des propriétés du fluide (ρ , c_p , μ , k), du diamètre de la conduite (D). On utilisera les paramètres k , D , μ et u pour caractériser les différents produits sans dimension.

[E31] Effort de traînée sur un sonar *

La traînée d'un sonar doit être prédit à l'aide d'un modèle réduit placé dans une soufflerie. Le prototype de diamètre égal à 300 mm doit être déplacé à une vitesse égale à 3,0 m/s dans l'eau. Si le diamètre du modèle réduit vaut 150 mm, déterminer la vitesse de l'écoulement d'air dans la soufflerie. Si d'autre part la mesure de la traînée sur le modèle réduit vaut 25 N, quel sera l'effort de traînée sur le prototype ?

[E32] Puissance hydraulique *

Si la puissance P nécessaire pour mettre en mouvement un fluide dans une conduite rectiligne de longueur L , de diamètre D , et de rugosité k dépend du débit Q , de la masse volumique ρ , et de la viscosité dynamique μ , déterminer l'ensemble des produits sans dimension du problème.

[E33] Similitude complète *

Montrez que si une maquette doit être construite pour satisfaire les nombres de Reynolds et de Froude sur le prototype et la maquette, la taille du modèle doit être identique à celle du prototype.

[E34] Écoulement autour d'un missile *

L'écoulement autour d'un missile se déplaçant dans l'air à l'altitude de 4000 m et à une vitesse égale à 2000 km/h doit être reproduit dans une soufflerie fonctionnant dans des conditions de pression atmosphérique standard (i.e. celle observée à l'altitude nulle). Quelle la vitesse l'écoulement doit-il atteindre dans la soufflerie pour respecter la similitude dynamique ? le tableau 4.4 rappelle les propriétés de l'air avec l'altitude.

Tableau 4.4 Propriétés physiques de l'air.

altitude (m)	p (bar)	T (K)	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)
0	0,3166	262,2	0,8194	$2,028 \times 10^{-5}$
4000	1,0132	288,16	1,225	$1,461 \times 10^{-5}$

[E35] Charge délivrée par une pompe centrifuge *

Une pompe centrifuge dont le rotor a pour diamètre D prélève de l'eau d'un bassin. Lorsqu'elle tourne à une vitesse de rotation ω , elle délivre un débit Q . Former un produit sans dimension à partir de ces trois variables.

[E36] Modélisation sur maquette de vagues présentes sur un lac **

On désire reproduire sur une maquette des vagues semblables à celles présentes sur un lac lorsque le vent souffle à sa surface (cf. Figure 4.2). Le mouvement de la surface libre représente alors l'oscillation verticale de l'eau (sans mouvement dans le sens du vent). Il n'y a pas de transport de matière mais transport d'une onde de gravité. La hauteur des vagues H (dénivellation maximale entre une crête et un creux successif) est supposée dépendre, entre autres, de la vitesse du vent V , des masses volumiques de l'eau et de l'air (respectivement ρ et ρ_A), de la profondeur de l'eau d (dénivellation entre la moitié de la hauteur des vagues et le fond de l'eau), et de la distance des vagues par rapport à la rive L .

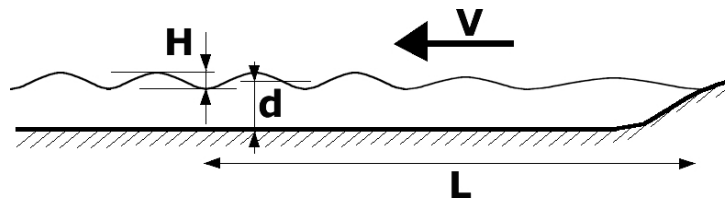


FIGURE 4.2 Configuration de l'exercice [E36].

[1.] Quel autre paramètre doit-on impliquer dans notre problème du fait de la surface libre perturbée ?

[2.] Pourquoi la viscosité de l'eau n'intervient-elle pas dans notre problème ?

[3.] Utilisez les paramètres de base ρ , V et d pour mettre en évidence les produits sans dimension caractérisant ce problème. Donner une interprétation physique de ces produits sans dimension.

[E37] Étude du viscosimètre d'Hoepler **

Les "viscosimètres à chute de bille", ou viscosimètre d'HOEPLER, permettent de mesurer la viscosité dynamique de liquides. L'appareillage est pour cela composé d'un tube de diamètre D_T contenant un liquide de masse volumique ρ_L connue, dont on désire estimer la viscosité μ_L , et d'une bille de diamètre D_B et de masse volumique ρ_B . Celle-ci, placée dans le tube, peut se déplacer sous l'action du champ de pesanteur. Le principe consiste à mesurer le temps nécessaire à la bille, une fois que celle-ci a atteint une vitesse constante, pour chuter d'une longueur L , caractérisée par deux marques sur le tube.

[1.] Parmi tous les paramètres impliqués dans ce problème, quels sont ceux que l'on peut regrouper pour former un nouveau paramètre, caractérisant les efforts liés à la poussée d'Archimède ?

[2.] Quels sont alors les produits sans dimension qui caractérisent le temps de chute

de la bille ?

[3.] Si l'appareillage est considéré comme étant une donnée fixe du problème (seul le fluide peut être amené à changer ici), montrer que la viscosité est une fonction linéaire du temps.

[4.] On peut étalonner le viscosimètre à l'aide d'une solution de glycérine dont on connaît les propriétés physiques : $\rho_L = 1250 \text{ kg/m}^3$, $\mu_L = 0,624 \text{ Pa.s}$. Le tube, de diamètre $D_T = 5 \text{ cm}$, possède deux marques distantes de 30 cm. La bille (cuivre) est caractérisée par son diamètre $D_B = 3 \text{ mm}$, et sa masse volumique $\rho_B = 8850 \text{ kg/m}^3$. Dans ces conditions, le temps de chute mesuré vaut $t = 5,03 \text{ s}$. Proposer une relation permettant d'estimer la viscosité d'un fluide à partir de cet appareillage.

[5.] Voyez-vous des inconvénients à ce moyen de mesure ?

Introduction à l'aérodynamique

L'aérodynamique est une branche de la dynamique, celle-ci reliant efforts et mouvement, qui étudie les phénomènes se produisant lors de l'interaction entre un fluide (ici l'air) et un corps en mouvement relatif. Cette branche s'intéresse à des applications diverses telles que l'aéronautique, l'automobile, l'étude d'installations fixes ou mobiles soumises à l'action d'un fluide en mouvement, les systèmes de production d'énergie électrique (*i.e.* des éoliennes ou des turbines). Les échelles d'application sont très diverses aussi puisque l'aérodynamique peut à la fois s'intéresser à l'amélioration des ailes d'un aéronef de très grande taille (Figure 5.1) mais aussi étudier les effets d'origine aérodynamique dans des paliers haute vitesse de faible taille pour lesquels les éléments roulant se déplacent à grande vitesse dans un mélange air/huile. Le développement de l'aérodynamique a été possible en premier lieu par l'amélioration régulière de la théorie et des moyens expérimentaux. La validation de la théorie et une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu ont été possible d'autre part à l'aide de méthode de visualisation des écoulements [47, 46]. Enfin, plus récemment, des méthodes numériques basées sur la méthode *CFD*, ont permis de simuler des écoulements dans des configurations très complexes.

Ce chapitre se propose de présenter l'origine de ces différents efforts aérodynamiques, en s'arrêtant rapidement sur l'effort généré par un écoulement incompressible sur une plaque plane. Cette configuration très simple permet d'appliquer les équations de Navier-Stokes avec très peu d'hypothèses. D'autre part celle-ci correspond à l'effort le plus faible exercé par un écoulement sur une surface. Enfin, nous aborderons les quelques méthodes utilisées dans les souffleries permettant de remonter aux valeurs d'efforts. Notons de suite que ce champ d'études se subdivise en aérodynamique des gaz incompressibles et aérodynamique des gaz compressibles. L'aérodynamique des gaz incompressibles concerne les vitesses de l'air inférieures



FIGURE 5.1 Soufflerie de l'ONERA à Modane dans les Alpes françaises (d'après [53]).

à 140 m/s. L'aérodynamique des gaz compressibles se subdivise en aérodynamique subsonique ($M < 1$), transsonique ($M \approx 1$), supersonique ($M > 1$) et hypersonique ($M \gg 1$).

5.1 La résultante aérodynamique

L'expérience montre qu'un corps en mouvement dans un fluide réel subit de la part de ce fluide un effort, que l'on appellera ici **résultante des forces appliquées**, notée R .

Analysons cette résultante en premier lieu par l'intermédiaire d'une analyse globale bidimensionnelle sur une aile ayant une incidence i par rapport à la vitesse de l'écoulement. La résultante des forces appliquées dépend *a priori* du fluide entourant le corps (ρ et μ), de la vitesse de l'écoulement (V), des effets de compressibilité caractérisés ici par la célérité¹ (a) et d'une dimension caractéristique de l'obstacle (L). On note donc 6 paramètres pour 3 unités fondamentales. Le théorème de Vaschy-Buckingham stipule que ce problème est régi par 3 nombres sans dimension, π_1 , π_2 , et π_3 tels que

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho LV} \equiv \text{Re} \qquad \pi_2 = \frac{R}{\rho L^2 V^2} \qquad \pi_3 = \frac{a}{V} \equiv M$$

1. On pourrait impliquer la pression, en lieu et place de la célérité, ce qui conduirait à un résultat identique en utilisant la loi des gaz parfaits et la définition de la célérité.

D'après les propriétés de la variationnelle $\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$, entraînant $\frac{R}{\rho L^2 V^2} = f(\text{Re}, M)$. Rappelons que cette analyse a été effectuée pour une incidence donnée. Si celle-ci est amenée à varier, la résultante sera aussi changée. On aura finalement en introduisant un coefficient C :

$$\frac{R}{\rho L^2 V^2} = C(\text{Re}, M, i) \quad (5.1)$$

avec C dépendant des nombres de Reynolds et de Mach, ainsi que de l'incidence. Nous verrons plus loin que ce coefficient dépend aussi et surtout de la forme de l'obstacle. On remarque qu'au dénominateur, la dimension de longueur est à la puissance 2 : on choisira donc une surface de référence S au lieu d'une longueur L . Une discussion quant au choix de cette surface sera menée au paragraphe 5.5 (p. 198). On écrira alors

$$R = \frac{1}{2} C \rho S V^2 \quad (5.2)$$

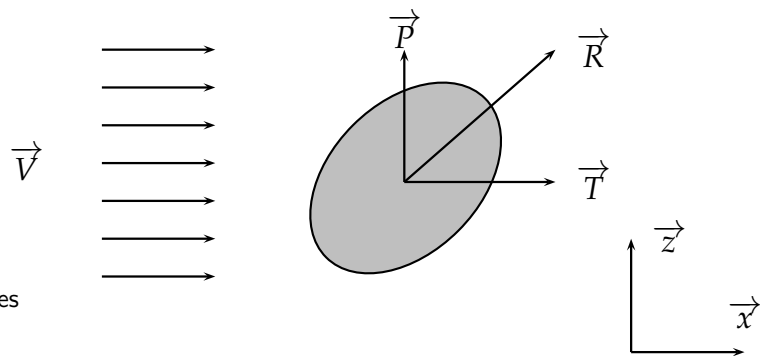
La présence du coefficient $1/2$ permet de mettre en évidence la pression dynamique, $\frac{1}{2} \rho V^2$.

On définit un système d'axes orthonormés $(\vec{x}, \vec{z})$ de telle sorte que $\vec{x}$ soit aligné selon l'écoulement et $\vec{z}$ perpendiculaire à l'écoulement. La décomposition de la résultante des efforts dans ce système d'axes donne respectivement la traînée T et la portance P (Fig. 5.2). On peut dès lors exprimer ces deux efforts identiquement à la relation (5.2) :

$$T = \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 \quad (5.3)$$

$$P = \frac{1}{2} C_z \rho S V^2 \quad (5.4)$$

FIGURE 5.2 Efforts aérodynamiques s'exerçant sur un obstacle.



Le fait d'écrire les efforts de traînée et de portance sous cette forme permet d'autre part d'isoler les termes pour lesquels on connaît bien l'influence (ρ , S et V). Par contre ceux qui ont une influence plus subtile (inclinaison, l'état de surface, ...) sont inclus dans les coefficients mis en place. Ces coefficients, C_x et C_z , sont appelés respectivement coefficients de traînée et de portance, avec

$$C^2(\text{Re}, M, i) = C_x^2(\text{Re}, M, i) + C_z^2(\text{Re}, M, i)$$

À titre d'exemple, le coefficient de traînée pour un cylindre en fonction du nombre de Reynolds basés est donné sur la figure 5.3. On remarque que le coefficient de traînée reste constant pour des nombres de Reynolds compris dans l'intervalle $[10^2; 10^5]$. Ceci témoigne d'un écoulement n'évoluant pas dans cet intervalle. On note ensuite une chute du coefficient avant de retrouver un autre palier.

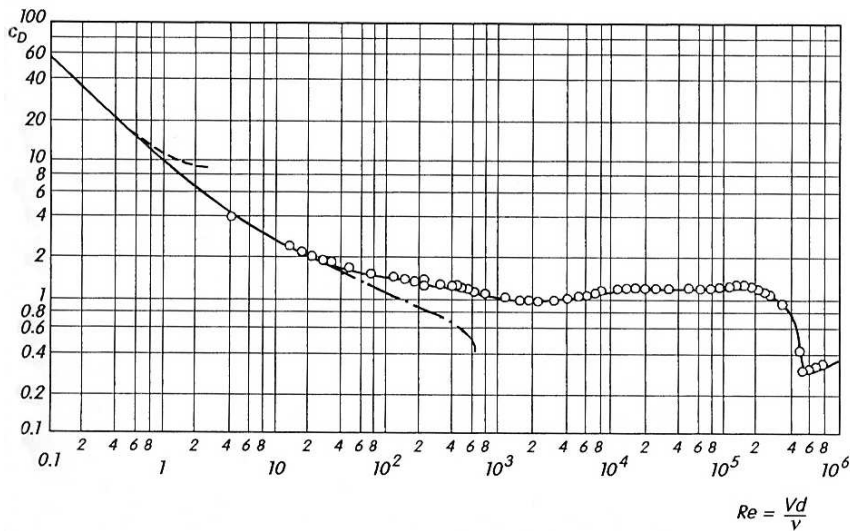
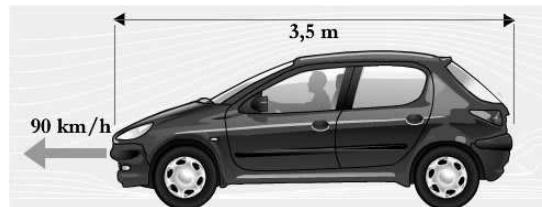


FIGURE 5.3 Coefficients de traînée d'un cylindre (d'après Wieselsberger [56]).

Considérons un véhicule de tourisme de longueur $L = 3,5 \text{ m}$, roulant à une vitesse de 90 km/h .



Le nombre de Reynolds basé sur la longueur de référence L vaut $Re_L = 5,8 \times 10^6 !!!$ L'aérodynamique fait donc appel à des nombres de Reynolds très élevés auxquels il faut s'habituer.

On considère maintenant le cas d'un obstacle tridimensionnel totalement immergé dans un écoulement de vitesse V . Les actions aérodynamiques sur ce solide peuvent être représentées par le torseur $[\vec{R}, \vec{M}]_O$. Le point O peut être situé au centre de gravité de l'obstacle même si cela n'est pas obligatoire. Chacun des vecteurs, résultant et moment, est caractérisé par ses trois composantes représentant donc les trois composantes de l'effort résultant et du moment global, *i.e.* $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ et $\vec{M}(M_x, M_y, M_z)$. Toutes ces composantes sont illustrées sur la figure 5.4. Les moments selon x , y et z sont appelés moments de roulis, de tangage et de lacet respectivement.

On se propose de regarder dans les paragraphes suivants les origines de la portance et de la traînée.

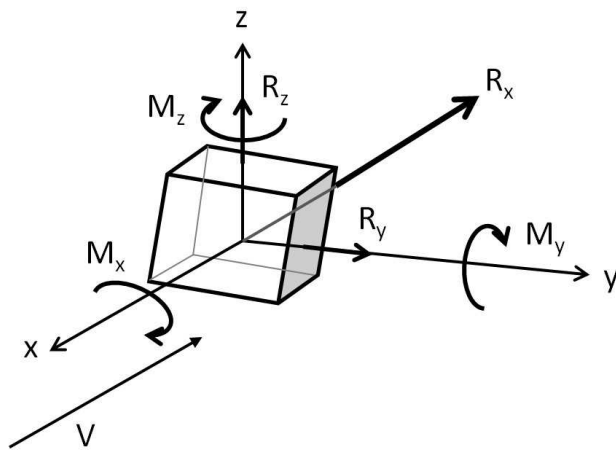


FIGURE 5.4 Illustration du torseur des efforts exercés par un écoulement relatif sur un obstacle.

5.2 Origine de la portance

La portance est simple d'approche car elle est consécutive à la création d'une dépression sur l'extrados, et d'une surpression sur l'intrados (Fig. 5.5). Sur un profil,

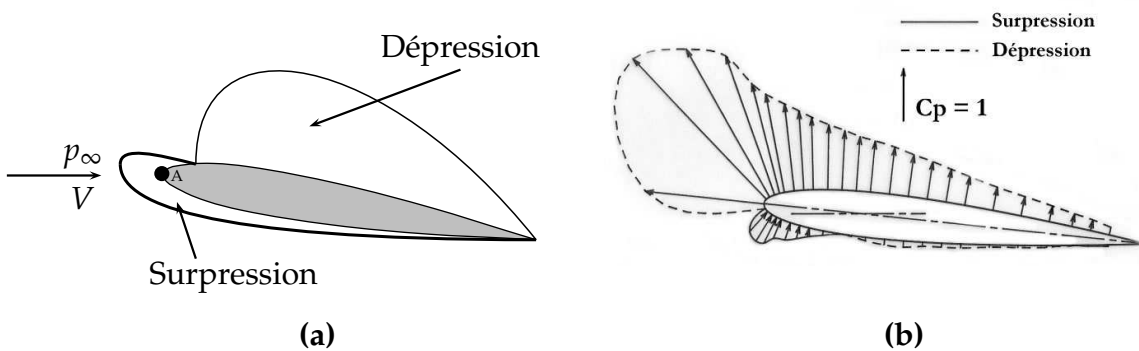


FIGURE 5.5 Efforts de pression sur l'intrados et l'extrados. a, principe ; b, mesures effectuées par le Laboratoire d'Études Aérodynamiques (Poitiers) sur une aile inclinée.

il existe un point pour lequel la vitesse est perpendiculaire à la paroi : le **point d'arrêt**, A. En ce point, la vitesse est minimale, et la pression maximale ($p_\infty + 1/2\rho V^2$, avec p_∞ la pression statique à l'infini). À partir de ce point, la vitesse augmente et la pression diminue. Il détermine donc le point de séparation des écoulements intrados et extrados. En ce qui concerne les deux surfaces : (i) sur la surface inférieure (intrados) la vitesse croît et la pression décroît jusqu'à ce que chacune retrouve leur valeur à l'infini amont. La surpression est donc située entre $p_\infty + 1/2\rho V^2$ et p_∞ ; (2) sur la surface extérieure (extrados) la vitesse croît jusqu'à une valeur supérieure à celle des conditions à l'amont infini, de ce fait la pression diminue d'autant plus. Il existe alors une forte zone d'aspiration. On remarque donc que l'écoulement autour du profil tend à aspirer la surface supérieure et à pousser la paroi inférieure. La portance est ainsi créée. Notons tout de même, que les efforts intrados et extrados n'ont pas la même intensité. L'effet aspirant est plus important que l'effet de poussée et représente 2/3 voire 4/5 de la portance totale.

5.3 Origine des forces de résistance (traînée)

La traînée, appelée aussi force de résistance à l'avancement, est plus complexe car elle a pour origine plusieurs sources. Sur une aile d'avion, retenons en tout cas qu'elle est présente consécutivement à une répartition inhomogène de la pression pariétale, à la présence d'un fluide réel, et à la dimension finie d'une aile. Tous ces aspects seront développés dans la suite du document.

Considérons pour l'instant la section droite d'un profil. Les efforts appliqués par l'écoulement en tout point M sur une surface élémentaire dS sont connus à partir du tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$ avec $p\bar{I}$ le tenseur des contraintes associé à la pression et $\bar{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses. Chacun de ces deux termes génèreront un effort de résistance. On appellera **résistance (ou traînée) de pression** la composante dans la direction de la vitesse de la résultante des forces de pression, et **résistance (ou traînée) de frottement** la composante dans la même direction de la résultante des forces de cisaillement. La somme de ces deux résistances est la **résistance totale**.

5.3.1 Traînée de frottement

L'adhérence du fluide en paroi implique l'existence d'une région dans laquelle l'écoulement décroît très rapidement, de la vitesse extérieure à une vitesse nulle (Fig. 5.6). Cette région, appelée **couche limite**², présente alors un gradient de vitesse important à l'origine d'efforts visqueux ($\vec{dF}$ sur la figure). Ces derniers sont estimés à partir de la relation :

$$\vec{dF} = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS \quad (5.5)$$

et sont à l'origine de la traînée de frottement, calculée à partir de l'intégration des efforts élémentaires sur toute la surface "mouillée". Ceci sous-entend donc qu'une connaissance de cette couche limite est nécessaire pour son estimation. Notons de suite que les frottements visqueux seront différents pour des écoulements laminaires dans la couche limite comparativement aux cas turbulents. En effet, la vitesse est plus importante dans le dernier cas (Fig. 5.7), entraînant alors un gradient plus important :

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} \right]_{\text{Turbulent}} > \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} \right]_{\text{Laminaire}}$$

Néanmoins, il ne faut pas poser de suite qu'il est préférable d'avoir un écoulement laminaire dans la couche limite. La traînée de frottement n'est pas la seule traînée présente, et la traînée de pression qui dépend fortement de la forme de l'obstacle dans l'écoulement peut elle devenir très importante, même dans le cas laminaire.

2. Notons que le terme de couche *limite* est artificiellement introduit. La transition de la région proche de la paroi vers l'écoulement externe n'est pas brutale mais prend place de façon continue. Le terme "limite" n'est donc a priori pas adapté.

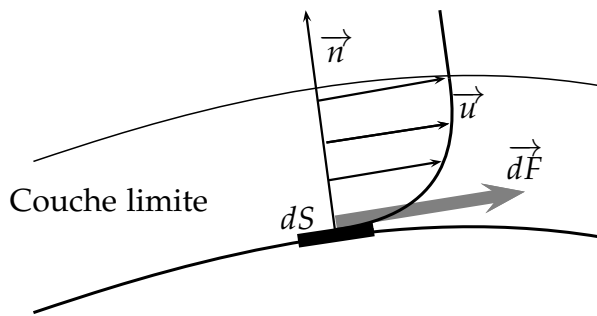


FIGURE 5.6 Efforts de viscosité pariétaux.

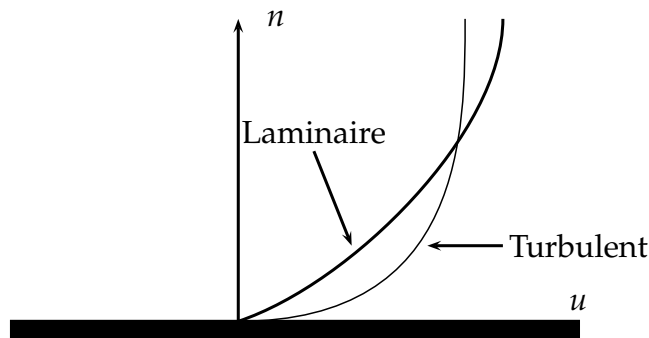


FIGURE 5.7 Profils de vitesses pour des écoulements laminaire et turbulent dans la couche limite.

5.3.2 Traînée de pression

La traînée de pression est liée à une répartition non-homogène de la pression autour de l'obstacle, et correspond à la composante dans le sens de l'écoulement de la résultante des efforts de pression. Ces efforts sont pratiquement les mêmes sur la surface externe de la couche limite et sur la paroi solide (une démonstration est donnée dans le paragraphe 5.4.2). Tout se passe donc comme si ces forces agissaient dans un fluide parfait sur un corps solide dont la surface externe serait celle de la couche limite. Ce corps est souvent appelé *corps effectif*.

La traînée de pression dépend donc de l'écoulement autour du profil, et ainsi fortement de sa forme et de son incidence. En effet, lorsque celui-ci présente une courbure importante vers l'aval ou lorsque l'incidence du profil est grande, on note un décollement de la couche limite (Fig. 5.8.a). De ce fait, le sillage devient important et est caractérisé par une pression constante en moyenne et plus faible que dans le cas de l'écoulement attaché (Fig. 5.8.b). L'écoulement se retrouve complètement modifié et la traînée augmentée. Dans ce cas, le terme de frottement devient négligeable devant le terme de pression.

5.3.3 Traînée induite

Il existe une composante supplémentaire à l'origine de la traînée, et consécutive de la portance : la traînée induite (sous-entendu par la portance). L'écart important de pression entre l'intrados et l'extrados génère en bout d'aile une distorsion de l'écoulement. Cela a pour conséquence la formation de tourbillons marginaux vers l'aval (Fig. 5.9). Il en résulte l'ajout d'une résistance à l'avancement et une diminution de la portance consécutivement à une longueur efficace de l'aile plus faible. Il est à noter d'autre part que ces tourbillons sont très persistants, et le fait qu'un avion situé en aval rencontre ces perturbations peut être très dangereux. Face à des avions deve-

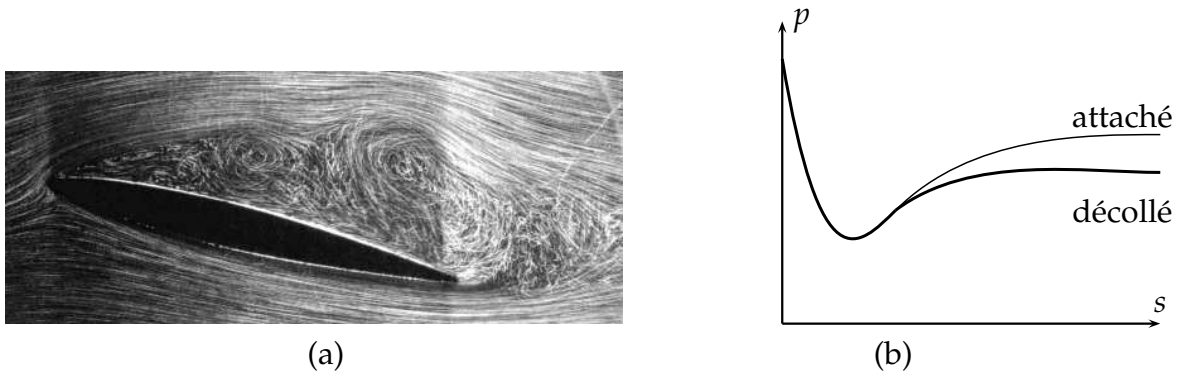


FIGURE 5.8 a, décollement de la couche limite (Photo ONERA); b, distribution de la pression autour d'un obstacle selon le type d'écoulement (attaché ou décollé).

nant de plus en plus lourds, augmenter la portance devient nécessaire. La longueur des ailes peut être augmentée mais ceci n'est souvent pas possible pour des raisons d'encombrement sur les pistes d'aéroport³. Une solution proposée par Richard T. Whitcomb et son équipe du centre de recherche de la NASA (1976) consiste alors à amoindrir les tourbillons marginaux par l'utilisation d'ailettes marginales (Fig. 5.10). Ceci a pour autre conséquence de générer une portance latérale légèrement dirigée vers l'avant, diminuant alors la traînée de l'aile. Plus récemment, un passionné d'aviation, Christian Hugues [38], a conçu un dispositif appelé *minix* (Fig. 5.11). Ce dernier en forme de cylindre à fente hélicoïdale "fluidifie" l'écoulement ayant pour une conséquence à la fois une diminution de la traînée proche de 8% pour les écoulements incompressibles et une augmentation de la portance proche de 5,5%.

Cette traînée porte mal son nom, car même si elle est bien induite par la portance (c'est le prix à payer pour avoir de la portance), elle ne réagit pas comme une traînée au sens $1/2C_pV^2$. Plus une aile porte, plus la traînée induite est importante. Si une aile ne porte pas, comme cela peut être le cas lors d'une chute libre, celle-ci n'existe pas.

5.3.4 Traînée de frottement/Traînée de pression

Considérons un corps d'envergure assez importante par rapport à ses dimensions transversales pour pouvoir considérer un écoulement bidimensionnel. Lorsque le nombre de Reynolds est important, la surface se recouvre d'une couche limite. Deux cas sont alors envisageables : (1) la couche limite enveloppe totalement le corps sans se décoller, la résistance de traînée de pression devient généralement négligeable et la résistance totale est pratiquement la résistance de frottement. L'estimation des efforts de traînée peut être envisagée dès lors que l'évolution de la couche limite est parfaitement connue ; (2) la couche limite fait apparaître un décollement, le sillage devient alors important. La résistance totale est très importante, et la résistance de frottement devient négligeable devant celle de pression. Cette résistance de pression (en présence de décollement) est appelée **Traînée de forme**. Dans le cas d'un cycliste par exemple pour lequel celui-ci essaye d'adopter la position la plus aérodynamique possible Mar-

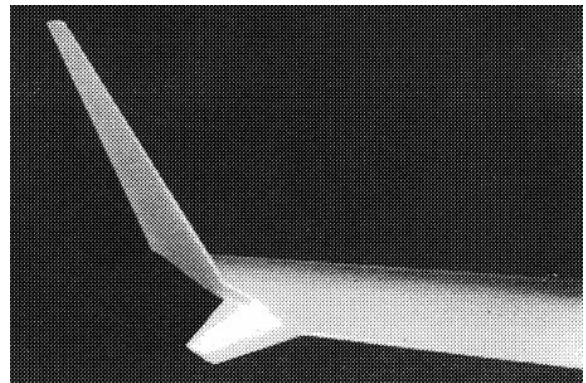
3. L'envergure de l'A380 vaut tout de même près de 80 m.



FIGURE 5.9 Tourbillons marginaux (Photo Paul Bowen).



(a)



(b)

FIGURE 5.10 a, ailette marginale en bout d'aile d'un A380 (Airbus S.A.S. 2008 - Photo exm company / H. Goussé) ; b, ailette marginale testée en soufflerie (d'après Whitcomb [55]).



FIGURE 5.11 Minix (d'après C. Hugues [38]).

tin *et al.* montrent que la traînée de pression contribue à 90% de la pression totale [37]. Il devient alors judicieux pour le cycliste d'adapter au mieux sa position afin que la pression le pénalise le moins possible.

5.4 Étude simple de la couche limite

Nous avons vu précédemment que la traînée de frottement peut être évaluée uniquement à partir de la théorie de la couche limite. Ce concept a été introduit par Prandtl⁴ en 1904 dans un article révolutionnant l'analyse des écoulements visqueux et permettant le calcul de traînée, et la compréhension de séparation de l'écoulement autour d'un obstacle.

Comme nous l'avons suggéré plus haut, la couche limite a une épaisseur très faible, ceci expliquant que durant de longues années elle échappa à l'observation des chercheurs qui de ce fait n'avaient aucune explication sur les phénomènes de traînée, et de décollement.

Après une définition communément acceptée de la couche limite et une présentation de ses caractéristiques, l'équation caractérisant la couche limite, appelée équation de Prandtl, est présentée. Celle-ci est utile à l'évaluation de la tension pariétale nécessaire à l'évaluation de la traînée de frottement. Notons de suite que cette étude se bornera à une couche limite laminaire. Une discussion de la transition vers une couche limite turbulente sera tout de même menée.

5.4.1 Définition et caractéristiques

Nous avons présenté plus haut la couche limite comme étant une fine région de l'écoulement adjacente à une paroi, où l'écoulement est retardé par l'influence des frottements visqueux. Nous allons essayer d'aller plus loin dans l'étude de la couche limite. Considérons pour cela la couche limite de la figure 5.12, exagérée pour la clareté de l'exposé.

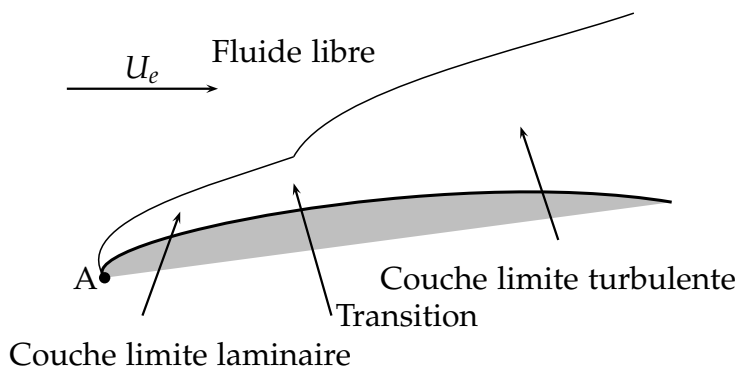


FIGURE 5.12 Schématisation d'une couche limite.

4. Ludwig Prandtl, mécanicien allemand (1875 - 1953). Prandtl est le père fondateur de l'aérodynamique moderne en lui donnant de nombreuses théories. Il fût d'autre part le professeur de Theodore Von Karman (1881 - 1963) célèbre chercheur hongrois en aéronautique et de Paul Richard Heinrich Blasius (1873 - 1970) mécanicien allemand qui donna une première application à la présence de la couche limite sur une plaque plane (cf. paragraphe 5.4.5 page 190).

La couche limite prend naissance dès le point d'arrêt pour ensuite s'épaissir. L'écoulement interne à la couche limite est laminaire, puis après une zone de transition peut devenir turbulent. On note que le développement de la couche limite est différent selon le type d'écoulement. La turbulence génère une épaisseur plus importante, avec en plus une tension pariétale plus importante liée à la contribution des fluctuations de vitesses. L'effort de frottement devient alors plus grand. Nous verrons néanmoins qu'il est préférable d'avoir une couche limite turbulente.

Une définition qualitative vient d'être donnée, or on définit souvent l'épaisseur de couche limite δ comme étant la distance à la paroi à laquelle u est très voisin de la vitesse de l'écoulement extérieur U_e , plus précisément :

$$u(y = \delta) = 0,99 \times U_e$$

La couche limite est donc la région de l'écoulement proche d'une paroi caractérisée par des vitesses au moins inférieures à 1% de celle de l'écoulement général.

Cette frontière demeure néanmoins très difficile à estimer expérimentalement car le gradient de vitesse y est très faible. De plus, elle est fluctuante dans le temps consécutivement à des effets d'intermittence et non pas statique.

5.4.2 Équations de Prandtl

Cette partie est détaillée dans l'exercice [E44].

L'objectif de cette partie est l'écriture des équations simplifiées de Navier-Stokes. Pour cela, quelques hypothèses sont posées en premier lieu : (i) le nombre de Reynolds basé sur une longueur caractéristique de l'obstacle et sur les propriétés de l'écoulement général est suffisamment important pour que les phénomènes visqueux soient concentrés dans une couche limite peu épaisse au voisinage immédiat de la paroi ; (ii) l'obstacle est de forme régulière en ce sens que les rayons de courbure principaux de la paroi doivent être partout très grands par rapport à l'épaisseur de la couche limite ; (iii) l'écoulement dans la couche limite a une composante transversale faible devant la composante longitudinale, l'écoulement peut alors être considéré comme étant bidimensionnel.

Considérons un système d'axes orthonormés de telle sorte qu'en chaque point de la surface, $\vec{x}$ soit tangent à celle-ci et dans le sens de l'écoulement, $\vec{y}$ perpendiculaire sortant à cette surface, et $\vec{z}$ perpendiculaire au plan (x,y) . La distribution des vitesses est indépendante de la coordonnée z (la composante z de la vitesse sera alors absente des équations). Les deux équations exactes de Navier-Stokes en régime permanent (où les forces de volume sont négligées) s'écrivent :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.7)$$

En raison de la faible épaisseur de la couche limite, le mouvement du fluide dans la couche limite est principalement parallèle à l'élément plan. L'évolution de la vitesse selon y est très grande (ces vitesses évoluent d'une valeur nulle à une vitesse égale à celle de l'écoulement externe à la couche limite sur une distance très courte, l'épaisseur de couche limite). Suivant la direction x , la vitesse évolue très faiblement, une variation notable est observée sur une longueur caractéristique du problème (par exemple, les dimensions du corps). Pour toutes ces raisons les dérivées dans la direction transversales sont prépondérantes devant celles selon l'écoulement, ainsi $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$.

D'autre part les ordres de grandeur des termes du membre de gauche de l'équation projetée selon x valent

$$\left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \sim \left[\frac{U^2}{x} \right]$$

et ceux de l'équation projetée selon y :

$$\left[u \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \left[v \frac{\partial v}{\partial y} \right] \sim \left[\frac{U^2 \delta}{x^2} \right]$$

De ce fait, pour des points localisés dans la couche limite et placés dans une région éloignée du point d'arrêt l'épaisseur de la couche limite reste très négligeable devant la valeur de la localisation, x . Les termes de convection de l'équation projetée selon x sont très importants devant ceux de l'équation projetée selon y .

Enfin, l'équation de continuité permet d'atteindre l'ordre de grandeur de la vitesse longitudinale, $[v] \sim [U\delta/x]$. Les termes de viscosité de l'équation projetée selon x sont dès lors prépondérants devant ceux de l'équation projetée selon y . Cette dernière ne fait plus apparaître qu'un seul terme, le gradient de pression.

Les équation de la couche limite s'écrivent finalement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5.9)$$

La relation (5.9) tend à dire que la pression est constante le long de l'épaisseur de la couche limite. De ce fait, la pression qui est appliquée sur cette couche par l'écoulement est intégralement restituée à l'obstacle, et peut être estimée à partir de l'équation de Bernoulli, $p + 1/2\rho U^2 = \text{Cste}$. La pression de l'écoulement externe à la couche limite joue alors un rôle primordiale dans la formation de celle-ci. Par exemple, le point de transition laminaire/turbulent dépend fortement de cela. Si la pression décroît fortement dans le sens de l'écoulement, ce qui se passe à l'arrière des obstacles, il est alors possible que la couche limite se sépare (cf. § 5.4.3).

Les équations (5.8) et (5.9) représentent les **équations de Prandtl** auxquelles on rajoute l'équation de conservation de la masse. Il faut d'autre part indiquer les conditions aux limites : (1) en paroi, $y = 0$: $u = 0$; $v = 0$, (2) hors de la couche limite, $y \rightarrow \infty$: $u = U_e$; $v = 0$.

5.4.3 Décollement de la couche limite

Considérons une couche limite permanente. Si on considère les valeurs des différents termes en paroi (i.e., $y = 0$ et $u = v = 0$), il vient d'après l'équation (5.8) :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0}} \quad (5.10)$$

Cette relation, appelée **équation de compatibilité à la paroi**, montre que la courbure du profil de vitesse est liée au gradient de pression (il ne s'agit pas d'information concernant la tangente à la paroi).

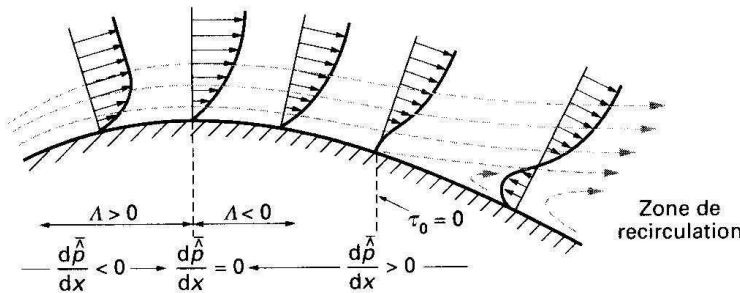


FIGURE 5.13 Évolution du profil de vitesse dans la couche limite (d'après Comolet [16]).

La figure 5.13 propose des formes de profil de vitesse pour différents signes du gradient de pression, dp/dx . On note que dans la région caractérisée par $dp/dx > 0$, il existe une zone de retour de l'écoulement (appelée zone de recirculation). On dit alors qu'en ce point, la couche limite se sépare ou "décolle". La tangente au profil de vitesse y est normale à la surface de la paroi, $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$. La contrainte pariétale, τ_p , devient donc nulle en ce point :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (\text{Décollement}).$$

En appliquant l'incompressibilité de l'écoulement, il vient

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (5.11)$$

si le gradient de vitesse est positif, d'après cette relation la composante de vitesse transversale est négative. Le fluide est ramené vers la paroi. L'accélération du fluide tend alors à amincir la couche limite. En revanche, une décélération entraînera une composante v positive. Le fluide est de ce fait poussé vers l'extérieur de la couche limite⁵. Une décélération du fluide à l'extérieur entraîne un gradient de pression positif

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (5.12)$$

Ce gradient de pression adverse étant valable aussi dans la couche limite (d'après l'expression 5.9), s'il est suffisamment important, il peut renverser l'écoulement et provoquer un décollement de la couche limite.

5. Cet effet se rajoute à l'épaississement de la couche limite provoqué par la diffusion de quantité de mouvement consécutive à la viscosité.

Les équations du mouvement dans la couche limite montrent que la composante tangentielle de la vitesse (u) est très grande devant la composante normale à la surface (v). Ce rapport entre u et v doit être observé partout où les équations de Prandtl ont des solutions physiques acceptables. Mathématiquement ce rapport est vérifié en tout point ne se trouvant pas proche de la zone de décollement (dans cette région, v ne devient plus négligeable). Le décollement ne peut donc se produire que sur la ligne dont les points sont des points singuliers pour la solution des équations de la couche limite.

5.4.4 Comment résoudre les équations de la couche limite ?

À partir des hypothèses de la couche limite, nous aboutissons aux équations (5.8) et (5.9) auxquelles il faut rajouter l'équation de conservation de la masse. Ces équations semblent *a priori* être toutes aussi complexes que celles de Navier-Stokes. Ceci est vrai à une différence près. En effet, la composante perpendiculaire à l'écoulement du bilan de quantité de mouvement (5.9) est radicalement plus simple et devient alors une source d'espoir pour l'obtention d'une solution pour l'écoulement dans la couche limite.

Il existe principalement deux techniques pour atteindre ces solutions : (1) les méthodes classiques (et analytiques) valables dans des cas pratiques simples (§ 5.4.5), (2) des méthodes modernes numériques permettant d'étudier des écoulements autour d'obstacles plus complexes. Retenons donc qu'il n'existe pas à ce jour de solutions exactes généralisées. Autant dans des configurations très simples en régime laminaire, on peut obtenir une solution exacte, autant lorsque la couche limite est turbulente aucune solution exacte n'est connue, consécutivement au manque d'information concernant la turbulence. N'oublions pas d'autre part que la solution de ces équations, à savoir le profil de vitesse, ne nous intéresse que très peu. En effet, celui-ci nous permettra surtout lors d'une deuxième étape d'estimer au mieux la tension pariétale, τ .

5.4.5 Couche limite laminaire sur une plaque plane : solution de Blasius

Ce paragraphe propose une application simple effectuée par Blasius⁶ [12] des équations précédentes. Considérons pour cela un écoulement laminaire bidimensionnel, dont les propriétés physiques sont considérées comme étant constantes, au-dessus d'une plaque plane à une incidence nulle. On aura donc $\rho = \text{Cste}$, $\mu = \text{Cste}$, $dp/dx = 0$. Les relations précédentes deviennent :

6. Paul Richard Heinrich Blasius (1873-1970), mécanicien allemand. La relation (5.17) a été introduite par Blasius lors de son travail de thèse en 1908. Il fut un des élèves de Prandtl, et cette relation représente la première application de la théorie de la couche limite énoncé par Prandtl en 1904.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.13)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5.15)$$

L'expérience montre une évolution du profil des vitesses $u(y)$ le long de l'obstacle (i.e., en fonction de x). On peut cependant écrire de façon identique ces profils en faisant intervenir une nouvelle variable η qui fait intervenir les deux autres x et y , $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$.

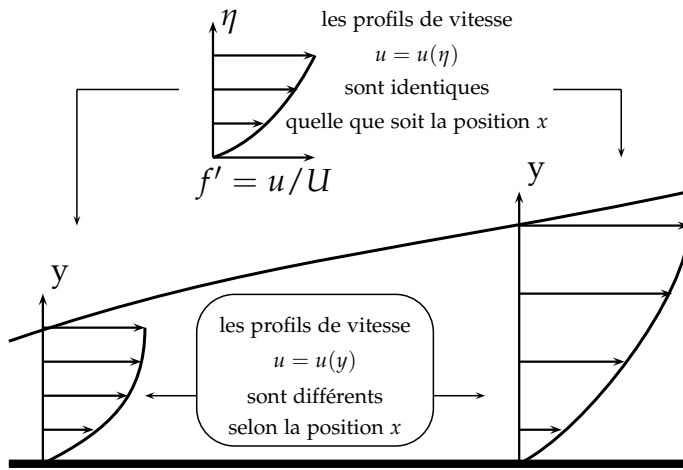


FIGURE 5.14 Profils de vitesse physiques et transformés.

Dans ce cas, le profil de vitesse $u(\eta)$ reste inchangé (Fig. 5.14). On définit alors une fonction de courant ψ uniquement fonction de la nouvelle variable :

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu x U} f(\eta) = \frac{Ux}{\sqrt{Re_x}} f(\eta)$$

et vérifiant $u = \partial\psi/\partial y$ et $v = -\partial\psi/\partial x$. Les calculs permettent d'écrire les expressions des vitesses en fonction de ψ , et de ses dérivées :

$$u = Uf'(\eta) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (\eta f' - f) \quad (5.16)$$

La dérivée première de la fonction $f(\eta)$ permet ainsi d'écrire la composante selon x de la vitesse. Les relations (5.16) sont introduites dans l'équation (5.14), et après simplification, on obtient :

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (5.17)$$

Cette équation est appelée **équation de Blasius**. Remarquons comme il est surprenant à partir de cette méthode transformant les variables de départ (x et y) d'obtenir une équation différentielle très simple dont les solutions sont données dans le tableau 5.1 et sur la figure 5.15.

η	f	$f' = u/U$	f''	η	f	$f' = u/U$	f''
0	0	0	0,33206	2,6	1,07252	0,77246	0,20646
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	3,0	1,39682	0,84605	0,16136
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,0	2,30576	0,95552	0,06424
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	8,8	7,07923	1,00000	0,00000
2,2	0,78120	0,68132	0,24835				

Tableau 5.1 Solutions de l'équation de Blasius

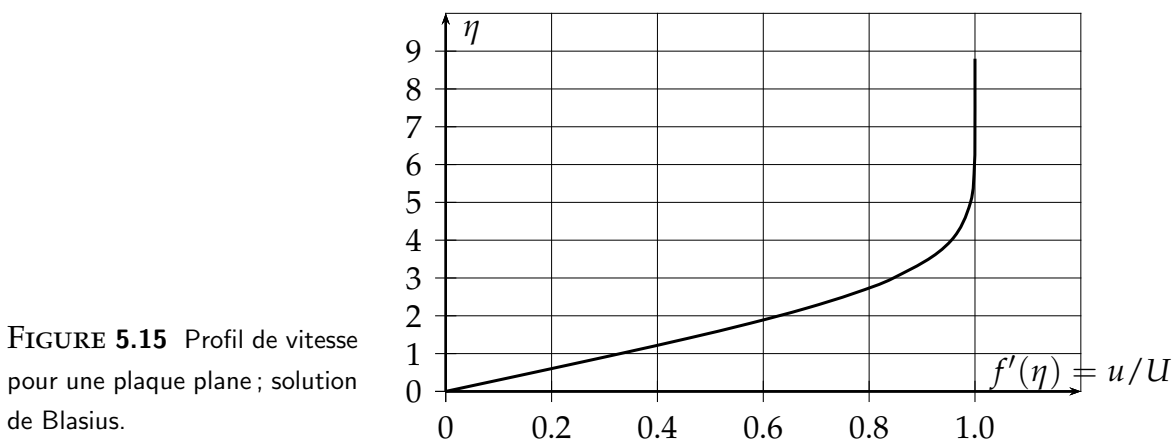


FIGURE 5.15 Profil de vitesse pour une plaque plane ; solution de Blasius.

D'après la définition de l'épaisseur de couche limite, celle-ci est atteinte lorsque la vitesse u vaut 99% de la vitesse de l'écoulement extérieur : $u(y = \delta) = 0,99 \times U$. Or $f' = u/U$ d'après ce que nous venons de voir précédemment, et vaut 0,99 pour $\eta = 5$. Soit $\eta = \delta\sqrt{U/\nu x} = 5$, ce qui nous permet d'écrire : $\delta/x = 5/\sqrt{\text{Re}_x}$. On connaît ainsi l'évolution de l'épaisseur de couche limite pour une plaque plane avec une incidence nulle. La solution de l'équation de Blasius faisant intervenir la grandeur f' en paroi, on peut donc formuler la contrainte pariétale, et ensuite le coefficient de frottement pariétal, respectivement :

$$\tau_0(x) = 0,332 \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{et} \quad c_f(x) = \frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (5.18)$$

L'intégration de la contrainte pariétale sur la surface de la plaque permet d'estimer le coefficient de traînée :

$$C_x = \frac{T}{1/2\rho S U^2} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

Cette expression, appelée loi de Blasius, est applicable pour des couches limites laminaires, c'est à dire pour des nombres de Reynolds inférieurs au Reynolds critique $\text{Re}_c = 3,2 \times 10^5$.

(1) La traînée que présente une plaque plane sans inclinaison n'est donc due qu'au seul frottement visqueux, et constitue par conséquent la limite inférieure en matière de traînée parasite, en deçà de laquelle il n'est guère possible de descendre. Néanmoins, ce niveau inférieur n'est pas vraiment fixé. Il est plus ou moins bas selon que la couche limite est laminaire ou turbulente. (2) Les formules quantitatives établies dans ce qui précède ne concernent évidemment que l'écoulement autour d'une plaque plane. (3) La solution obtenue pour la couche limite sur une plaque plane n'est pas satisfaisante au bord d'attaque de la plaque. En effet, dans cette région, l'approximation de la couche limite n'est plus valable. Pour analyser cette zone, il faut utiliser les équations de Navier-Stokes dans leur formulation complète.

Application numérique : si on considère une plaque carrée de 1 m de longueur placée dans un écoulement de vitesse 5 m/s, on trouve les valeurs suivantes :

- $\delta(x=L) = 5L/\sqrt{\text{Re}_L} = 8,55 \text{ mm}$;
- $C_D = 1,328/\sqrt{\text{Re}_L} = 2,27 \times 10^{-3}$;
- $T = 3,42 \times 10^{-2} \text{ N}$.

5.4.6 Transition vers la turbulence dans la couche limite

Lorsque le nombre de Reynolds local, Re_x , devient suffisamment grand, la couche limite laminaire devient instable et une partie de cette couche limite devient turbulente (Fig. 5.16). La surface de l'obstacle est alors divisée longitudinalement en deux voire trois parties : (1) la couche limite laminaire, (2) la couche limite turbulente, et (3) la région située au-delà de la ligne de décollement (ou point de décollement en 2D) si un fort gradient de pression est présent. La présence de la turbulence dans la couche limite augmente le transfert de quantité de mouvement. L'apport de fluide de grande vitesse vers la paroi permet à la couche limite de mieux résister aux effets d'un gradient de pression, et le point de décollement se trouve alors retardé. La transition vers la turbulence est observée pour des valeurs du nombre de Reynolds $\text{Re} = 3,8 \times 10^5$ pour la sphère (Fig. 5.18) et $\text{Re} = 3,0 \times 10^5$ pour le cylindre (Fig. 5.3). La taille du sillage étant fortement diminuée, le coefficient de traînée est alors caractérisé par des valeurs plus faibles. On parlera de *crise de la traînée*.

L'état de surface des obstacles influence la localisation dans la couche limite de la transition vers la turbulence. Le nombre de Reynolds critique devient plus faible lorsque la rugosité de la surface augmente [6, 7] (Fig. 5.19). La figure 5.20 propose l'évolution du coefficient de traînée d'une balle de golf, d'un ballon de football, et d'une sphère lisse. Parmi ces trois obstacles, la chute de la traînée se produit pour une valeur plus faible du Reynolds pour la balle de golf comparativement à la sphère lisse. La longueur parcourue par cette balle est susceptible d'être plus importante dans ce cas. De ce fait, les équipementiers sportifs s'intéressent grandement à ces effets afin de proposer des produits de plus en plus performants. Les fabricants de ballons de football ont notamment travaillé l'état de surface, par le biais entre autre des coutures, dans le but d'améliorer leur stabilité et permettant d'autre part de diminuer de près de 30% la traînée (Fig. 5.21).

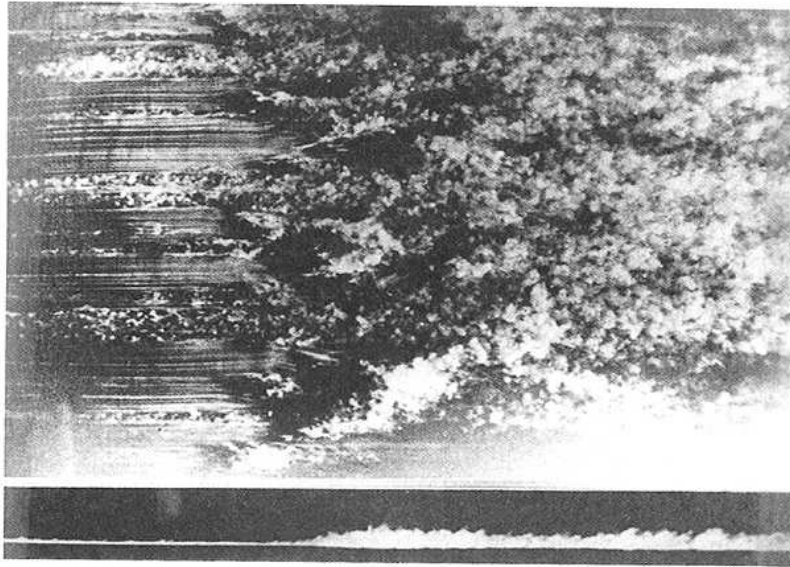


FIGURE 5.16 Vue supérieure de la transition d'une couche limite laminaire vers une couche limite turbulente pour une plaque plane non-inclinée (d'après Nakayama [40]).

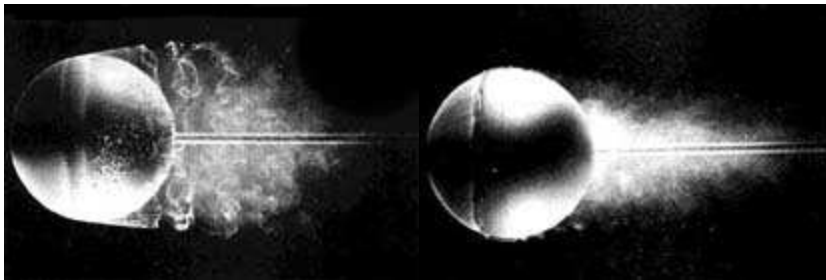


FIGURE 5.17 Influence de la position du point de décollement sur la taille de la traînée (photo : ONERA). À gauche, $Re < Re_c$; à droite $Re > Re_c$, avec $Re_c = 3 \times 10^5$.

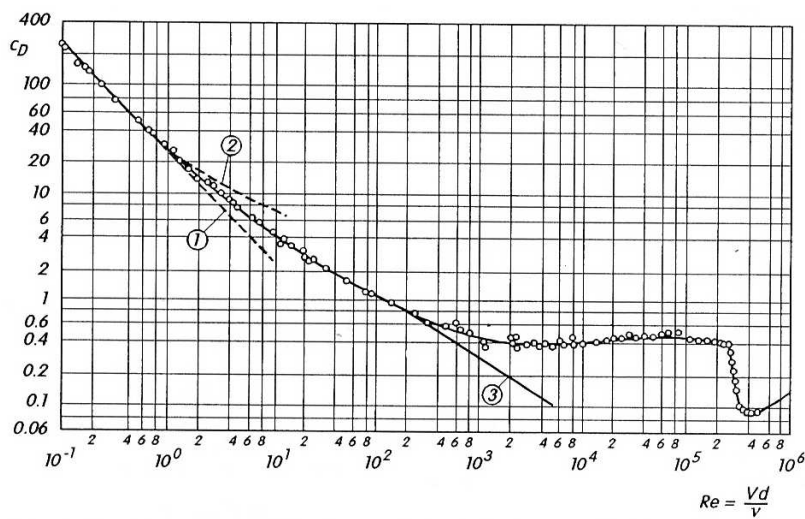


FIGURE 5.18 Évolution du coefficient de traînée d'une sphère avec le nombre de Reynolds basé sur le diamètre.

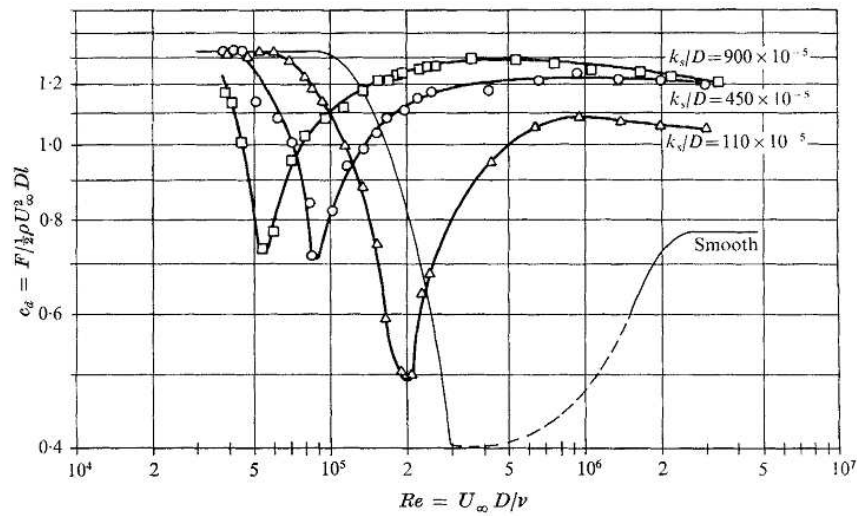


FIGURE 5.19 Influence de la rugosité d'une surface sur les coefficients de traînée d'un cylindre. La rugosité est caractérisée par le paramètre k/D avec k la taille des rugosités et D le diamètre du cylindre (d'après Achenbach [6]).

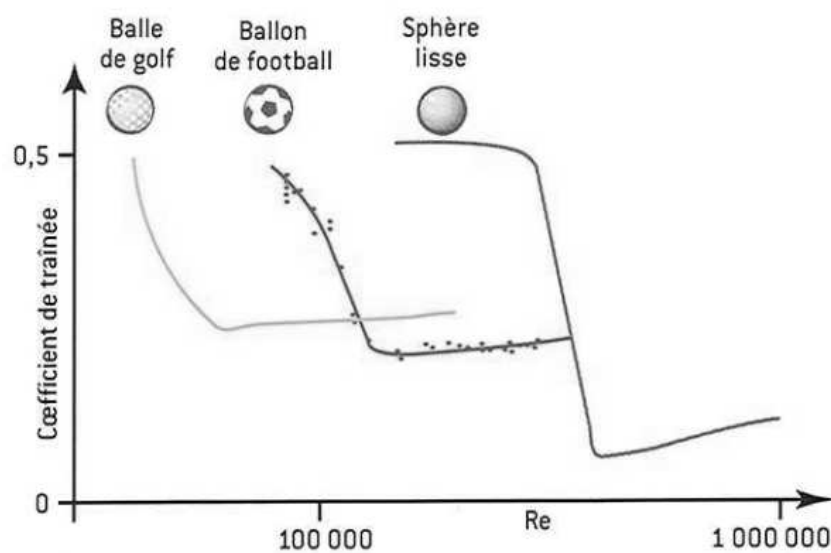


FIGURE 5.20 Coefficients de traînée d'une balle de golf, d'un ballon de football, et d'une sphère lisse (d'après Guyon [29]).

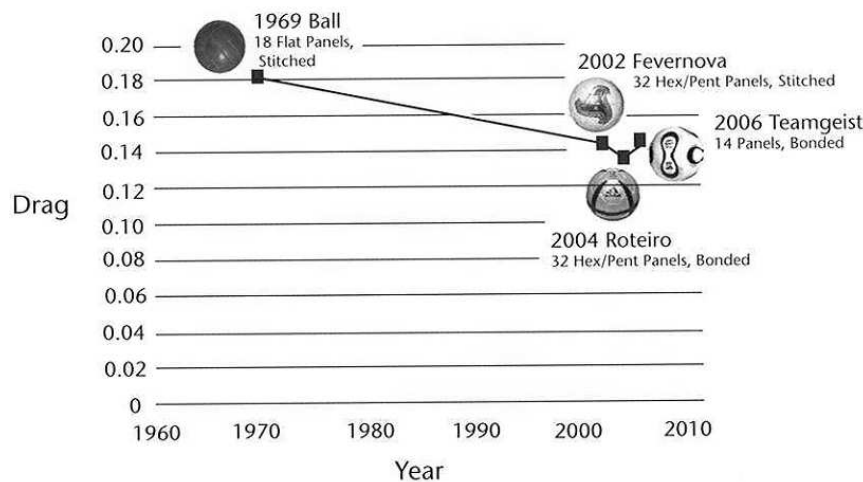


FIGURE 5.21 Évolution du coefficient de traînée de ballons de football sans rotation et à très grande vitesse (d'après Barber [9]).

5.4.7 Couche limite turbulente

L'étude de la turbulence est très complexe, et demeure encore de nos jours un des modes de mouvement pour un fluide les moins compris. Pour ces raisons, ce document se bornera à décrire de façon très succincte les différences impliquées par rapport à l'étude des couches limites laminares.

Couche limite turbulente sur une plaque plane

Pour un écoulement incompressible au-dessus d'une plaque plane, l'épaisseur de la couche limite est estimée par l'expression :

$$\delta = \frac{0,37x}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (5.19)$$

Notons à partir de l'équation 5.19 que dans ce type d'écoulement l'épaisseur de la couche limite varie proportionnellement à $\text{Re}_x^{-1/5}$, alors qu'en écoulement laminaire celle-ci varie évolue comme $\text{Re}_x^{-1/2}$. Ainsi l'épaisseur augmente plus rapidement lorsque l'abscisse curviligne croît ($\delta \propto x^{4/5}$ en turbulent, et $\delta \propto x^{1/2}$ en laminaire). De ce fait, les coefficients de frottement sont différents. Dans le cas d'un écoulement turbulent sur une plaque plane, celui-ci vaut :

$$c_f = \frac{0,074}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (5.20)$$

expression à comparer avec la relation 5.18. Il apparaît donc que les frottements visqueux sont plus importants lorsque la couche limite devient turbulente.

Modélisation de la turbulence

Les expressions des coefficients de frottement vus plus haut sont basées sur des configurations simples d'écoulement (plaque plane). Dans des cas de formes d'obstacles plus complexes, celles-ci sont inutilisables. Les codes de calculs numériques, permettant alors d'obtenir des solutions quelle que soit la configuration, impliquent les équations de conservation de la masse, le bilan de quantité de mouvement, et l'équation d'énergie (dans le cas d'écoulements compressibles). Ces calculs sont effectués à l'aide de techniques numériques (différences finies, éléments finis, volumes finis, ...) dont il ne sera pas discuté ici.

Elles sont basées aussi pour certaines sur une modélisation de la turbulence. Dans ce type d'approche, les effets de la turbulence sont simplement impliqués par l'addition d'un terme, la viscosité turbulente μ_T , à la viscosité "moléculaire" μ . Le bilan de quantité de mouvement selon x s'écrit alors :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \mu_T) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.21)$$

où les différents paramètres de vitesse et pression sont des valeurs moyennes (la turbulence est mis de côté pour ne s'intéresser qu'à l'écoulement moyen). La difficulté

réside ici dans l'estimation de la valeur locale de la viscosité turbulente à partir des propriétés de l'écoulement. Il faut en effet que ce paramètre représente au mieux les particularités de la turbulence en chacun des points de calculs. Il existe pour cela plusieurs types de modèles : algébriques pour les plus simples, et avec une ou deux équations supplémentaires représentant le transport de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation pour les plus complexes. Le plus connu à ce jour est le modèle $k\epsilon$ qui donne des résultats satisfaisants pour des écoulements en absence de recirculation.

5.4.8 Écoulement laminaire ou turbulent ?

Nous avons vu plus haut l'influence du type d'écoulement dans la couche limite sur l'écoulement global et sur la traînée. Une question se pose alors : est-il préférable d'avoir un écoulement laminaire ou turbulent ? Il n'y a pas de réponse tranchée. En effet, cela dépend surtout de la forme de l'obstacle. Ainsi pour des corps profilés, l'écoulement adhère à la surface (*i.e.*, absence de décollement) et la traînée de pression est faible. On préférera dans ce cas un écoulement restant laminaire sur une surface la plus grande possible. L'avion de guerre XP-51 Mustang (Fig. 5.22), conçu en 1940 par l'aviation américaine en collaboration avec la *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA), possède des ailes dont le profil a été dessiné pour respecter au mieux ce concept⁷. Néanmoins il a été avéré par la NACA que l'état de surface ne fût pas assez lisse pour maintenir suffisamment l'écoulement laminaire. L'apparition d'imperfections et de dépôts au cours du vol sur la surface entraînant une transition de la couche limite laminaire vers celle turbulente. Ces aspects ont été améliorés depuis, avec par exemple le profil NACA 23015 pour l'aviation de masse [5] puis le profil "laminaire" NACA 63-215 ayant un coefficient de traînée plus faible mais caractérisé par un domaine d'utilisation de portance plus réduit (Fig. 5.23). Plus tard le profil NASA NLF(I)-0115 [48] fût proposé et possédant un coefficient de traînée aussi faible que le profil NACA 63-215 tout en ayant une gamme d'utilisation de la portance aussi grande que le profil NACA 23015.

Par contre, si l'obstacle n'est plus profilé, le sillage est tel que la traînée de pression devient importante et celle de frottement très négligeable. La transition vers la turbulence est alors une solution pour à la fois réduire la zone de sillage et la traînée.

5.5 Coefficients sans dimension

La traînée et la portance jouent un rôle déterminant dans l'analyse des performances d'un avion. En effet, lors d'un vol à une vitesse constante, appelée **vitesse de croisière**, la résultante de ces forces est nulle (Fig. 5.24). De ce fait, la portance équilibre le poids total de l'avion, et la poussée des moteurs équilibre la traînée.

Nous avons introduit plus haut des coefficients qui ne sont pas uniquement d'ordre pratique mais surtout majeur pour l'ingénieur en aérodynamique. Celui-ci s'intéressera

7. Le terme anglais souvent employé pour ce type d'aile est *Laminar Flow Airfoil*.



FIGURE 5.22 Mustang XP-51 41-039).

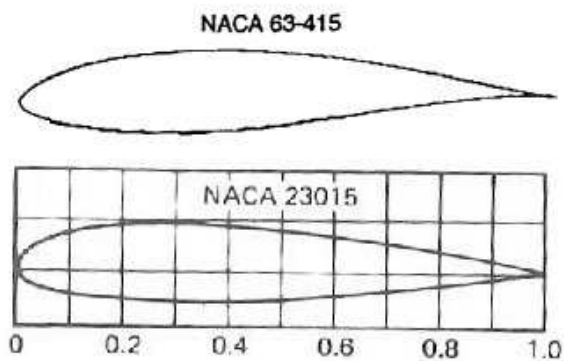


FIGURE 5.23 Profils NACA 63-415 (proche du profil 63-215) et 23015.

essentiellement à leur évolution vis à vis de divers paramètres pour évaluer l'état de vol de l'avion.

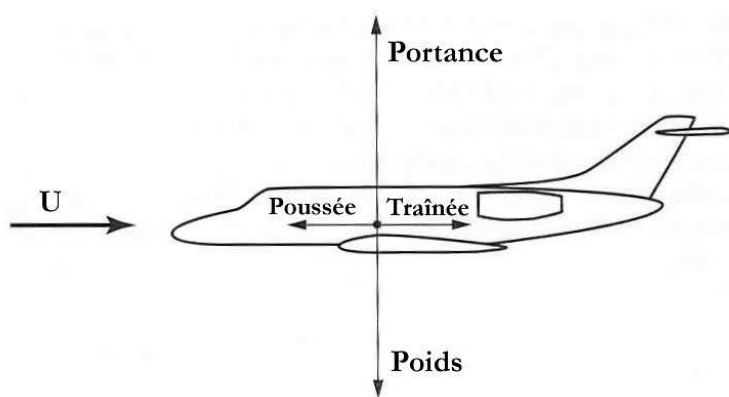


FIGURE 5.24 Schématisation des 4 efforts s'exerçant sur un avion.

Notons d'autre part que ces coefficients font intervenir une surface de référence caractérisant au mieux l'obstacle. On note principalement trois types de surface de référence :

- Le maître couple (ou surface frontale) : elle est généralement considérée pour des corps non aérodynamiques (sphère, cylindre, parallélépipédique, ...) (Figure 5.25) ;

- La projection sur un plan selon l'écoulement (i.e., surface vue de haut) : elle est utilisée pour des corps minces tels que les ailes d'avion ;
- La surface mouillée : elle correspond à la surface en contact avec le fluide. Cette référence est souvent utilisée pour les bateaux.

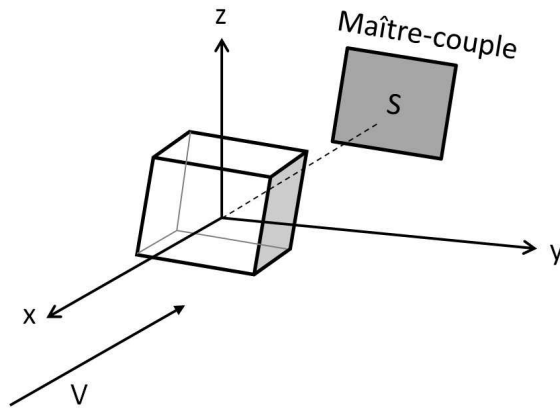


FIGURE 5.25 Définition du maître-couple d'un obstacle parallélépipédique.

La surface de référence doit rester constante lorsque l'obstacle voit son inclinaison varier. Elle représente de façon intrinsèque l'obstacle, quelle que soit la configuration. Les clichés d'Étienne-Jules Marey⁸ illustrent très bien ce propos (Fig. 5.26). Les maîtres-couples du prisme dans les deux cas sont identiques, mais le sillage est plus étendu dans la deuxième configuration. La traînée sera donc plus importante. On utilisera dans cet exemple la surface mouillée pour les raisons évoquées plus haut dans ce paragraphe.

Notons à cette occasion, le rôle crucial des arrêtes vives dans l'aérodynamisme des corps.

Dans le domaine de l'automobile, la quantité SC_x est plus utilisée que le coefficient de traînée, celui-ci désignant la qualité d'un véhicule indépendamment de sa taille. En divisant ce paramètre par la surface frontale du véhicule (comprise entre 1,75 m² et 2,25 m²), on obtient le C_x (de l'ordre de 0,28 et 0,40 pour les véhicules actuels).

5.5.1 Influence de l'écoulement

Nous l'avons vu plus haut, les coefficients de traînée d'un cylindre circulaire et d'une sphère évoluent avec le nombre de Reynolds (Figs. 5.3 et 5.18). Ce comportement est lié à la forme de l'écoulement autour de l'obstacle évoluant avec sa vitesse.

Considérons le cas d'un écoulement au passage d'un cylindre circulaire, les différents régimes d'écoulement étant schématisés par Lienhard [35] sur la figure 5.27. Le nombre de Reynolds est défini à partir de la vitesse amont au cylindre, du diamètre du cylindre, et de la viscosité cinématique du fluide, $Re = UD/\nu$. En dessous de la valeur $Re = 5$, l'écoulement contourne le cylindre parfaitement sans qu'aucune séparation de l'écoulement apparaisse. Dans la gamme $5 \leq Re \leq 45$, l'écoulement se sépare dans la région aval du cylindre pour former deux tourbillons collés dans le sillage proche.

8. Etienne-Jules Marey (1830-1904), physiologiste, médecin, biomécanicien, et inventeur en 1882 de la chronophotographie, base technique de la cinématographie, a consacré trois des dernières années de sa vie, de 1899 à 1901, à photographier les mouvements de l'air.

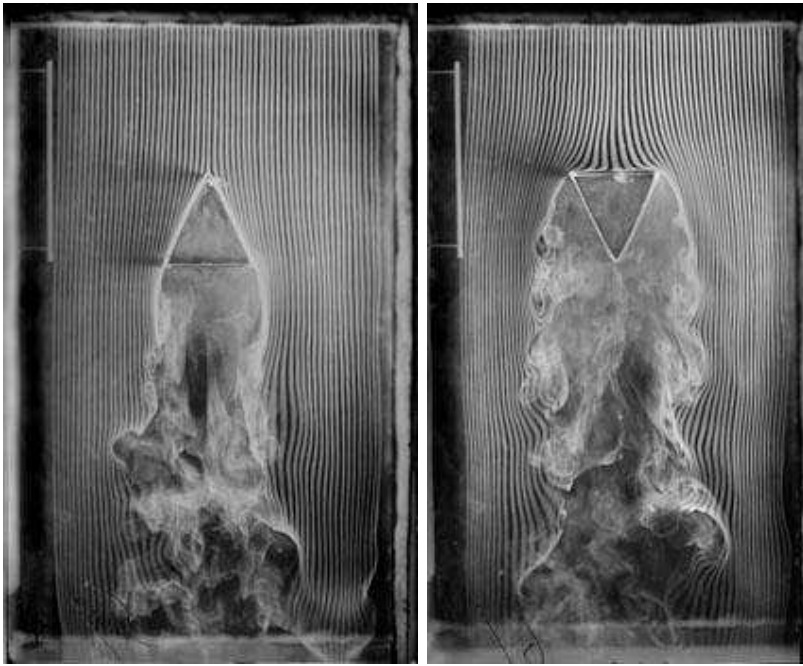


FIGURE 5.26 Prisme triangulaire orienté différemment face au courant. Quatrième et dernière version de la machine à fumée équipée de 57 canaux mise au point par Etienne-Jules Marey en 1901 pour son étude sur le mouvement de l'air (Agrandissement moderne d'après la plaque négative au gélatino-bromure sur verre. Paris, Cinémathèque française).

Au-delà de $Re = 45$, une rangée de tourbillons est formée ayant un comportement laminaire. Pour des valeurs comprises entre $Re = 150$ et $Re = 300$, ces tourbillons se détachent différemment et commencent à se comporter de façon turbulente bien que la couche limite sur ce cylindre reste laminaire. Dans la région sous-critique, $300 \leq Re \leq 3,5 \times 10^5$, la couche limite laminaire se sépare à 80 degré du point d'arrêt, et la production de tourbillons est cette fois bien définie et périodique. Dans le régime de transition, $1,5 \times 10^5 \leq Re \leq 3,5 \times 10^6$, la couche limite du cylindre est turbulente et décolle à une valeur plus en aval, 140 degré. Ce régime, appelé *crise de la traînée*, est caractérisé par une chute de la traînée. Dans le régime supercritique, $Re \geq 3,5 \times 10^6$, la génération périodique de tourbillons reprend.

Les lâchers d'instabilités par l'obstacle sont caractérisés par le nombre de Strouhal,

$$St = \frac{fD}{U},$$

où U est la vitesse amont au cylindre, D son diamètre, et f le nombre d'instabilités générées par une même région du cylindre (i.e. supérieure ou inférieure) pendant une seconde. Ce nombre correspond donc à la fréquence adimensionnelle des lâchers de tourbillon par le solide. Les efforts aérodynamiques sont sensibles à ces instationnarités et sont caractérisés à leur tour par des valeurs périodiques. Ainsi la portance évolue autour d'une valeur nulle avec une fréquence identique à celle des lâchers de tourbillons d'une même rangée. La traînée est sensible quant à elle à chaque tourbillon généré, et donc au double de la fréquence précédente. Le nombre de Strouhal dépend du régime d'écoulement (Fig. 5.28), mais aussi de la forme de l'obstacle. Ainsi le nombre de Strouhal pour des formes prismatiques est affecté par les dimensions relatives de l'obstacle, les formes des coins et est compris dans la gamme $0,1 < St < 0,2$ (Fig. 5.29). Pour des obstacles arrondis, cette gamme devient $0,2 < St < 0,3$ (Fig. 5.30).

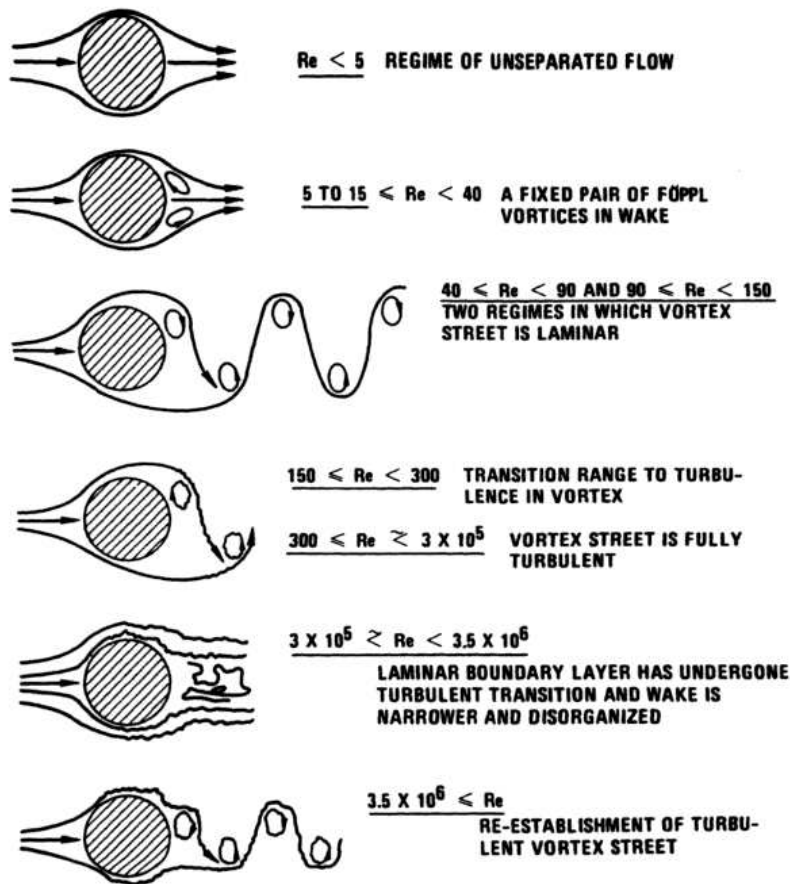


FIGURE 5.27 Régimes d'écoulement au passage d'un cylindre circulaire (d'après Leinhard [35]).

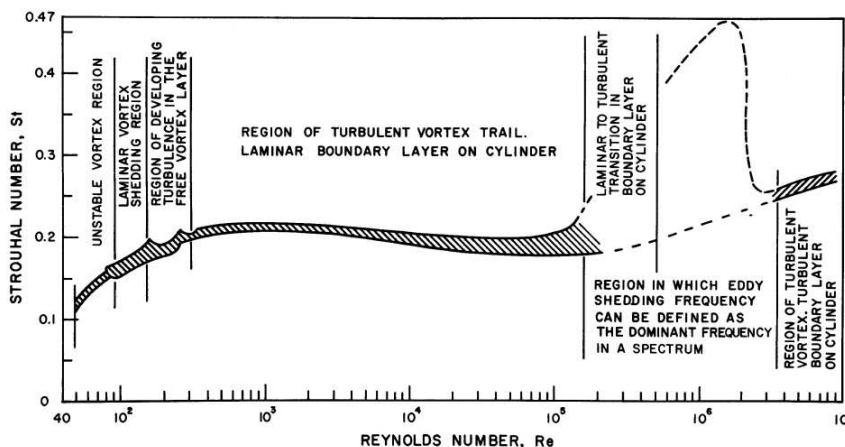


FIGURE 5.28 Évolution du nombre de Strouhal avec le nombre de Reynolds pour un cylindre circulaire. La région hachurée a été définie à partir de plusieurs résultats expérimentaux (d'après Leinhard [35]).

5.5.2 Influence de l'angle d'attaque

Étude locale

Lorsque l'angle d'attaque d'une aile change, on note une variation de la répartition de la pression autour du profil. On tracera alors le coefficient de pression, déterminé à l'aide la pression de référence p_∞ (celle de l'écoulement amont), et de la pression

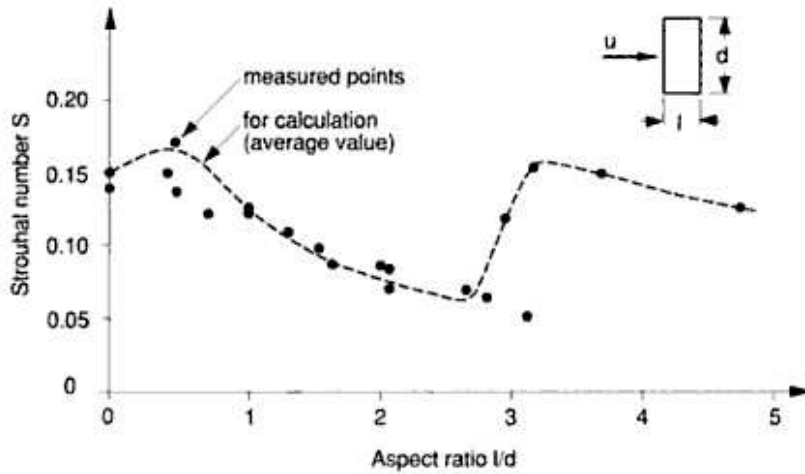


FIGURE 5.29 Évolution du nombre de Strouhal pour des cylindres de sections rectangulaires différentes (d'après Bachmann [22]).

dynamique de l'écoulement $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$, tel que

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

Ce coefficient est négatif le long de l'extrados, et positif le long de l'intrados, caractérisant ainsi les effets d'aspiration et de poussée. On observe d'autre part sur la figure 5.31 que le fait d'incliner le profil augmente la dépression sur l'extrados. Cependant, cette évolution est rompue pour une inclinaison trop importante de l'aile.

Étude globale

Les variations des deux coefficients vis à vis de l'angle d'attaque sont données sur la figure 5.32.a. On note que le coefficient de portance croît de façon linéaire avec α jusqu'à une valeur (appelée **angle de décrochage**) pour laquelle l'avion voit sa portance terriblement chuter. Ceci est consécutif au décollement de la couche limite, étant donnée la forte réduction de la vitesse proche du profil. Le coefficient de traînée fait apparaître quant à lui un minimum. On voit donc que pour des angles différents la portance est maximale et la traînée minimale. Il convient alors de trouver un compromis sur la valeur de l'angle, qui donnera à l'aile sa meilleure efficacité.

On peut alors raisonner sur le rapport des deux efforts :

$$\frac{\text{Portance}}{\text{Traînée}} = \frac{1/2\rho U^2 C_z}{1/2\rho U^2 C_x} = \frac{C_z}{C_x} \quad (5.22)$$

que l'on cherchera ainsi à faire tendre vers un maximum. Ce rapport est appelé **finesse** et nous lui donnerons un autre sens physique plus loin. On peut dès lors tracer la finesse en fonction de l'angle d'attaque (Fig. 5.32.b) et se rendre compte de la présence d'un angle (unique) pour lequel l'aile est la plus efficace.

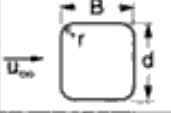
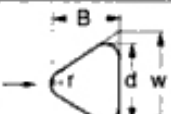
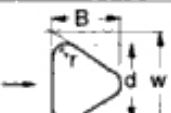
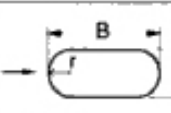
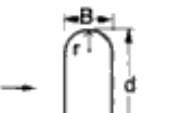
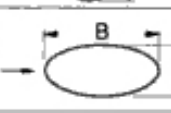
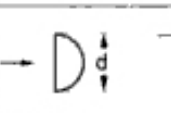
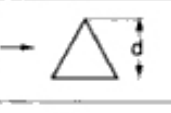
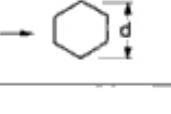
Shape of cross-section	Strouhal number $S = \frac{f_w \cdot d}{u_\infty}$	Valid range of Reynold's number
 $\frac{B}{d} = 1$ $\frac{r}{d} = \frac{1}{3}$	0.33	$2 \times 10^6 > Re > 4 \times 10^5$
 $\frac{B}{d} = 1$ $\frac{r}{w} = \frac{1}{3}$	$0.2 \rightarrow 0.35$ 0.35	$7 \times 10^5 > Re > 4 \times 10^5$ $2 \times 10^6 > Re > 7 \times 10^5$
 $\frac{B}{d} = 1$ $\frac{r}{w} = \frac{1}{4}$	0.2 0.3	$8 \times 10^5 > Re > 3 \times 10^5$ $Re > 3 \times 10^5$
 $\frac{B}{d} = 1$ $\frac{r}{w} = \frac{1}{4}$	0.2 0.65	$5 \times 10^5 > Re > 3 \times 10^5$ $1.6 \times 10^6 > Re > 6 \times 10^5$
 $\frac{B}{d} = 2$ $\frac{r}{d} = \frac{1}{2}$	0.4	$2.5 \times 10^6 > Re > 3 \times 10^5$
 $\frac{B}{d} = \frac{1}{2}$ $\frac{r}{d} = \frac{1}{4}$	$0.2 \rightarrow 0.35$ 0.35	$6 \times 10^5 > Re > 2 \times 10^5$ $1 \times 10^6 > Re > 6 \times 10^5$
 Ellipse $\frac{B}{d} = 2$	0.12 0.60	$5 \times 10^5 > Re > 3 \times 10^5$ $2 \times 10^6 > Re > 1 \times 10^6$
 Ellipse $\frac{B}{d} = \frac{1}{2}$	0.2	$7 \times 10^5 > Re > 1 \times 10^5$
	0.22 0.125	$Re > 8 \times 10^4$ $Re > 5 \times 10^4$
	$0.13 \rightarrow 0.22$	$Re = 0.3 + 1.4 \times 10^5$
	$0.14 \rightarrow 0.22$	$Re > 0.8 \times 10^5$

FIGURE 5.30 Nombre de Strouhal pour des obstacles fermés (d'après Bachmann [22]).

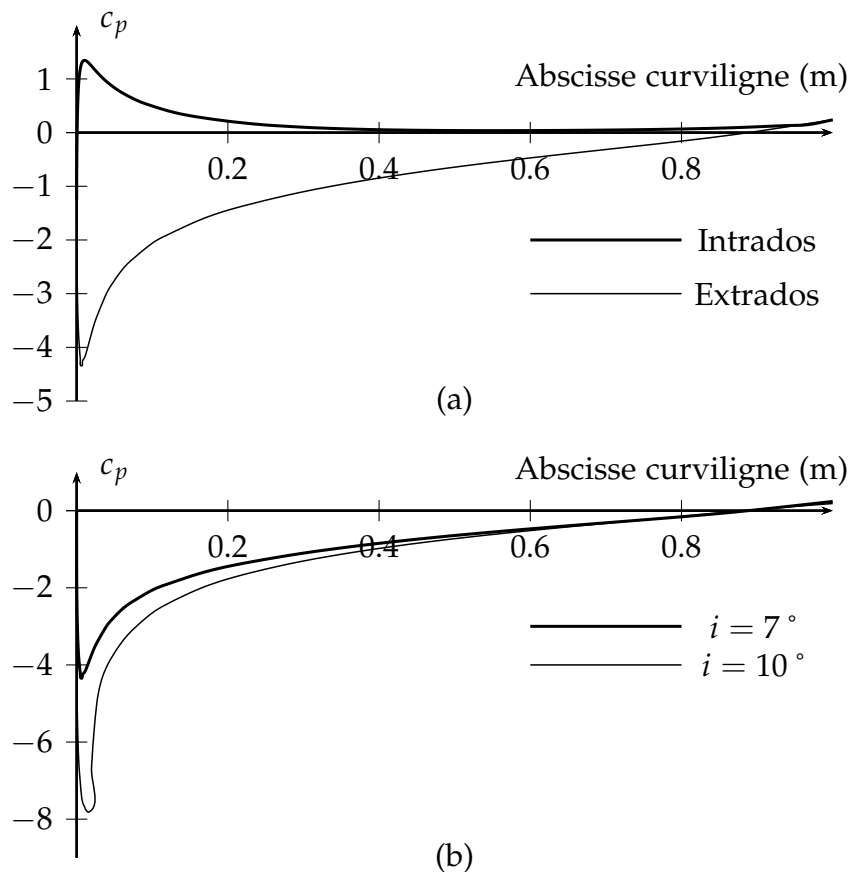


FIGURE 5.31 Coefficient de pression le long du profil d'aile. (a), répartition sur les deux surfaces; (b), influence de l'angle d'attaque sur le coefficient de pression le long de l'extrados. Résultats numériques obtenus à partir du code de calculs Fluent - le profil est caractérisé par une corde d'un mètre et l'écoulement par une vitesse de 119,7 m/s ($M = 0,4$, $T = -50^\circ\text{C}$).

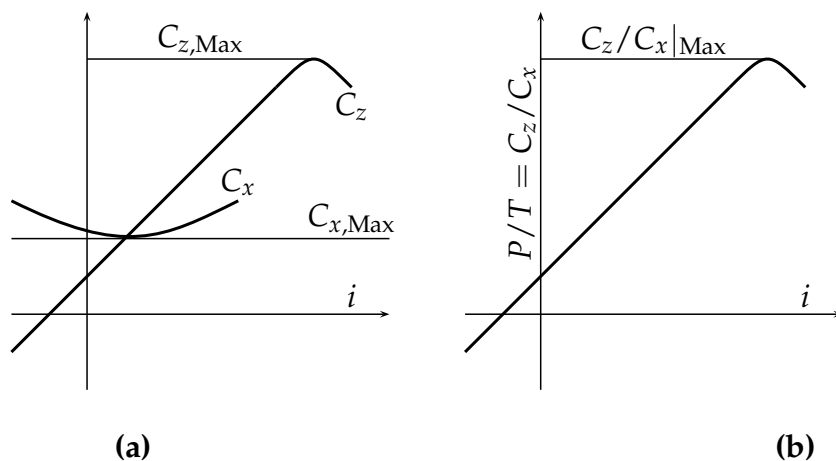


FIGURE 5.32 Influence de l'angle d'attaque sur les coefficients de traînée et de portance (a), et sur la finesse (b).

5.5.3 Polaire

Une représentation, souvent utilisée pour caractériser une aile, est celle du coefficient de portance en fonction du coefficient de traînée : **polaire d'une aile** (Fig. 5.33). Celle-ci est graduée en incidence, la branche inférieure correspondant aux angles d'incidence faibles.

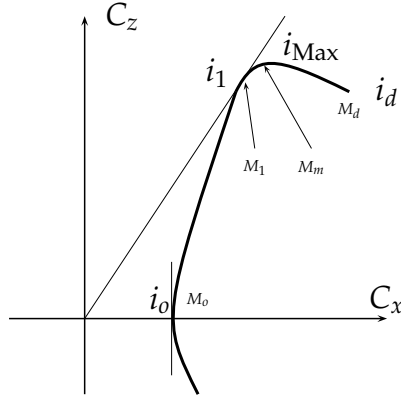


FIGURE 5.33 Exemple typique d'une polaire.

Les principaux points caractéristiques d'une polaire sont (i) M_0 le point de portance nulle, (ii) M_1 le point de finesse maximale (pente maximale pour i dans l'intervalle $[i_0 ; i_m]$), (iii) le point de portance maximale, (iv) M_d le point de décrochage. On peut remarquer qu'il existe un lien entre l'angle de finesse maximale et une consommation minimale. En vol, à altitude et vitesse constantes, le poids est équilibré par la portance et la propulsion équilibre la traînée :

$$\frac{1}{2}C_z\rho V^2S = mg \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{2}C_x\rho V^2S = F_p \quad (5.24)$$

avec F_p la force de propulsion. Le rapport des deux équations précédentes donnent

$$\frac{C_z}{C_x} = f = \frac{mg}{F_p} \quad \text{ou} \quad \boxed{F_p = \frac{mg}{f}} \quad (5.25)$$

D'après la relation (5.25), la force de propulsion, pour un poids donné, est minimale pour une finesse maximale. En ce point, la consommation est la plus faible.

On peut effectuer un raisonnement similaire pour connaître la configuration d'une vitesse maximale, ceci pour une force de propulsion donnée. D'après la relation (5.24), on peut écrire

$$V = \sqrt{\frac{2F_p}{\rho SC_x}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{\text{Max}} = \sqrt{\frac{2F_p}{\rho SC_{x,\text{min}}}}} \quad (5.26)$$

ceci est obtenu pour des incidences faibles.

5.5.4 Quelques ordres de grandeurs

Ce paragraphe a pour but d'une part de donner les ordres de grandeur des coefficients de traînée communément rencontrés. D'autre part, il permettra au lecteur de se familiariser aux relations entre traînée et coefficient de traînée. Quelques valeurs typiques sont données sur la figure 5.34. Notons que pour tous ces cas, la même longueur de référence a été prise (d) et que les coefficients sont donnés par unité de profondeur pour s'affranchir des effets tridimensionnels (i.e., $S = d \times 1$).

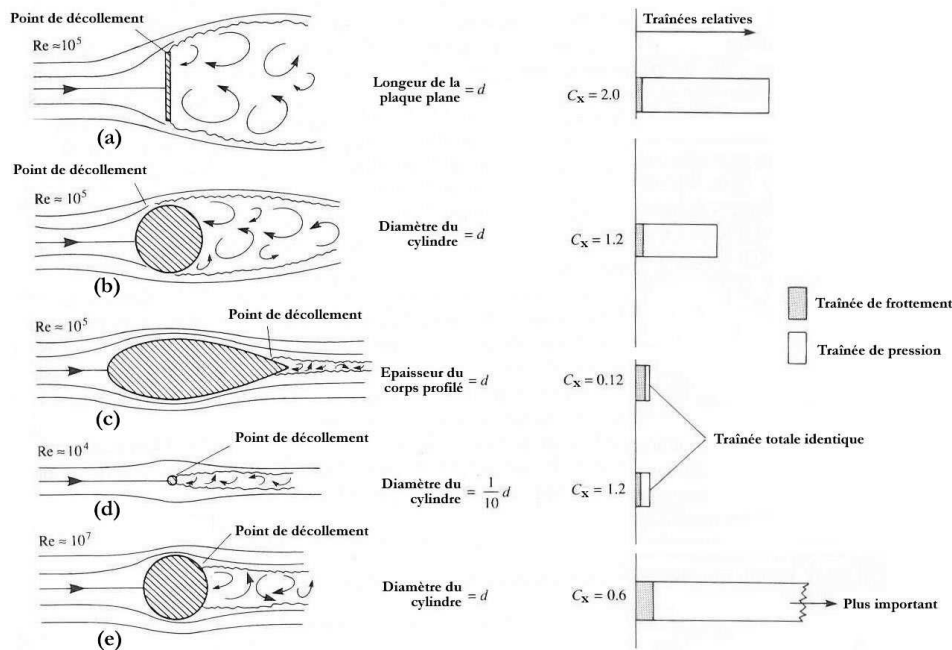


FIGURE 5.34 Coefficients de traînée et répartition des traînées de frottement et de pression pour différentes formes de profil (d'après Anderson [8]).

Coefficients de traînée

On note de prime abord que le C_x est fortement lié à la taille du sillage, ce qui confirme les propos précédents (cf. page 193).

La plaque plane placée perpendiculairement à l'écoulement génère le coefficient de traînée le plus important ($C_x = 2$). Cette configuration est en effet la plus défavorable à l'avancement des corps.

La figure (b) montre le cas d'un cylindre, avec pour coefficient $C_x = 1,2$ beaucoup plus faible que le cas précédent. Cependant, celui-ci peut être très fortement diminué en travaillant le profil en aval de l'obstacle. $C_x = 0,12$ pour le cas (c).

Considérons les cas (b) et (d) présentant les mêmes valeur de C_x . Le dernier cas considère un cylindre de diamètre $d/10$ entraînant donc un nombre Reynolds dix fois moins important (on considère les autres paramètres inchangés). L'expérience montre que C_x ne varie pas pour des nombres de Reynolds compris dans l'intervalle $[10^4, 10^5]$; d'autre part la forme est conservée, le coefficient de traînée reste donc identique

dans les deux cas. Cependant la traînée dans le deuxième cas est dix fois moins élevée que le cas (b) car la surface de référence est dix fois moins grande.

Une autre comparaison est illustrée sur les cas (c) et (d). Nous comparons ici un large corps profilé avec un cylindre de diamètre faible. Pour le corps profilé, la traînée vaut :

$$T = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_x = 0,12\left(\frac{1}{2}\rho U^2 d\right)$$

alors que pour le cylindre, on a

$$T = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_x = \frac{1}{2}\rho U^2 (0,1d)(1,2)C_x = 0,12\left(\frac{1}{2}\rho U^2 d\right)$$

Les traînées sont identiques ! Ceci illustre alors le fait que la traînée d'un cylindre est équivalente à celle d'un obstacle profilé dix fois plus grand.

Valeurs relatives des traînées de frottement et de pression

La figure 5.34 illustre à sa droite la part des traînées de frottement et de pression sur la traînée totale. On remarque que la traînée de pression est la plus importante dans le cas de la plaque plane, alors que la traînée de frottement domine pour l'obstacle profilé. On apportera alors grand soin à l'état de surface sur une aile d'avion profilé, afin qu'un défaut ne vienne augmenter le faible frottement consécutivement à un décollement prématuré.

5.6 Effets transitoires aérodynamiques

Nous avons considéré jusqu'à présent un écoulement permanent au contact des obstacles. Il en résulte alors des efforts et des moments aérodynamiques dont les variations au cours du temps restent très faibles. Ceci n'est plus le cas par exemple lorsque les écoulements dans la région de ces obstacles voient leur vitesse varier. Les valeurs numériques des coefficients de traînée et de portance ne changent pas ou peu si la variation de vitesse reste modérée les écoulements ne changeant pas de forme (*i.e.* restent similaires). Les valeurs numériques des efforts varient donc en proportion du carré de la vitesse. Les efforts aérodynamiques peuvent être grandement modifiés par contre lorsque la variation de la vitesse d'écoulement est brutale et génère alors des efforts transitoires non négligeables cette fois. Ceux-ci proviennent dans la plupart des cas d'instabilités générées sur les surfaces (Fig. 5.35). Des effets non négligeables sur les coefficients aérodynamiques apparaissent de même dans le cas de deux obstacles en mouvement passant près l'un de l'autre. Cela est par exemple le cas lors d'une manœuvre de dépassement d'un véhicule par un autre. Dans ce cas l'écoulement de l'obstacle le plus rapide modifie l'écoulement autour de celui plus lent. Il en résulte alors une modification de la distribution des contraintes (*i.e.* pression et frottements visqueux) à l'origine de variations importantes des efforts et des moments (Fig. 5.36). Autre exemple en ce sens et très proche du quotidien, Crouch *et al.* montre que le mouvement de la jambe pour la mise en rotation du pédalier perturbe grandement le sillage du cycliste et est à l'origine d'une variation non négligeable du coefficient de traînée (Fig. 5.37).

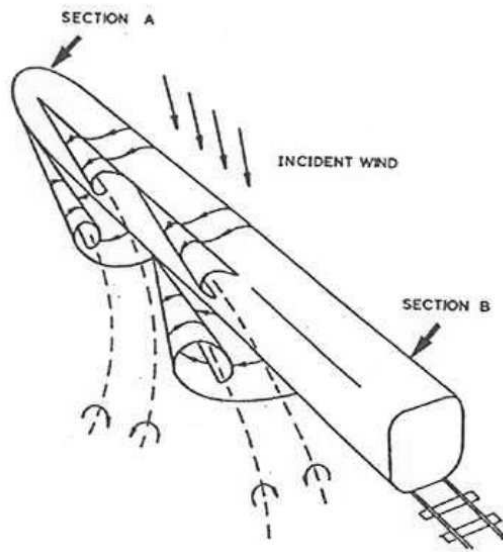


FIGURE 5.35 Écoulement autour d'un train sous l'influence d'un vent latéral orienté à 35° par rapport à l'axe du train (d'après Krajnović *et al.* [32]).

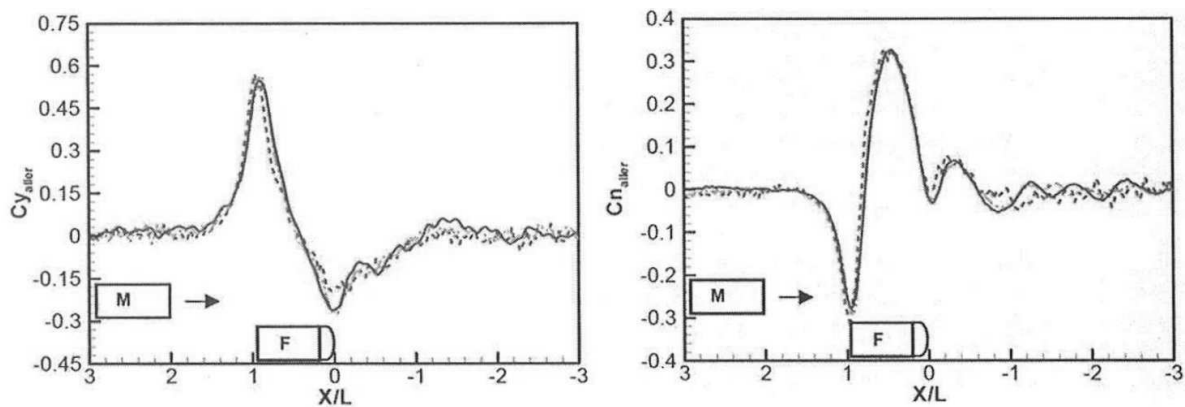


FIGURE 5.36 Influence d'un véhicule en manœuvre de dépassement sur le véhicule dépassé — C_y et C_n représentant les coefficients d'effort latéral et de moment de lacet (d'après Noger et Széchényi [43]).

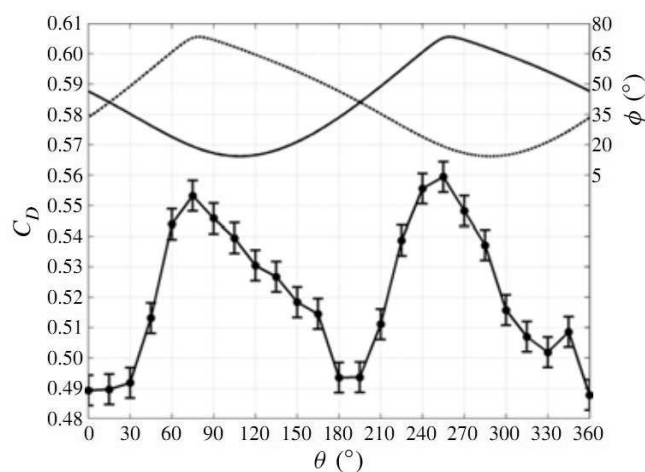


FIGURE 5.37 Variation du coefficient de traînée (-●-) (axe de gauche) avec l'angle de la jambe lors de rotations de pédalier (-) (axe de droite) (d'après Crouch *et al.* [17]).

5.7 Estimations des efforts aérodynamiques

Il existe deux types de méthodes pour estimer les efforts de portance et de traînée : les méthodes expérimentales basées sur l'utilisation de souffleries subsoniques ou supersoniques et les méthodes numériques basées sur des discrétisations spatiale et temporelle.

5.7.1 Les souffleries

La volonté de construire des souffleries, permettant de reproduire des écoulements d'air dans un laboratoire, remonte à l'année 1871 (F. Wenham en Angleterre). À partir de cette date jusqu'aux années 1930, les souffleries étaient dimensionnées pour reproduire des écoulements ayant des vitesses de l'ordre de 400 km/h. De telles souffleries sont toujours d'actualité et ont été complétées par des vitesses plus importantes (supersoniques, hypersoniques, ...).

La soufflerie utilise le principe de réciprocity, à savoir que si les conditions aux limites sont respectées et l'écoulement stable, les efforts aérodynamiques de cet écoulement sur un obstacle immobile sont identiques à ceux agissant sur un corps se déplaçant dans un fluide immobile. On notera cependant une différence sur les différents efforts, liée à des taux de turbulence souvent différents dans les deux cas et difficilement maîtrisables en soufflerie.



FIGURE 5.38 Étude aérodynamique d'une voiture de compétition. Photo de la soufflerie S4 de l'Institut AéroTechnique du CNAM (Une balance à 6 composantes, est disposée sous le plancher de la chambre d'expériences. Le véhicule à qualifier repose sur ses roues, sur quatre patins de forme rectangulaire affleurant le plancher et liés au bâti mobile de la balance. Trois dynamomètres à jauges de contraintes, dont les axes de mesure sont dirigés perpendiculairement au plancher, transmettent les poussées verticales à des butées hydrostatiques. Trois autres dynamomètres répartis dans un même plan horizontal et orientés suivant des directions orthogonales privilégiées, sont utilisés pour déterminer les composantes horizontales du torseur des efforts.).

Description

Une soufflerie est un large venturi dans lequel l'écoulement est généré par un ventilateur associé à un moteur. Les pales du ventilateur sont identiques à celles d'un

avion à propulsion à hélices. La soufflerie peut être ouverte (type Eiffel, Fig. 5.39.a), ou fermée (type Göttingen, Fig. 5.39.b).

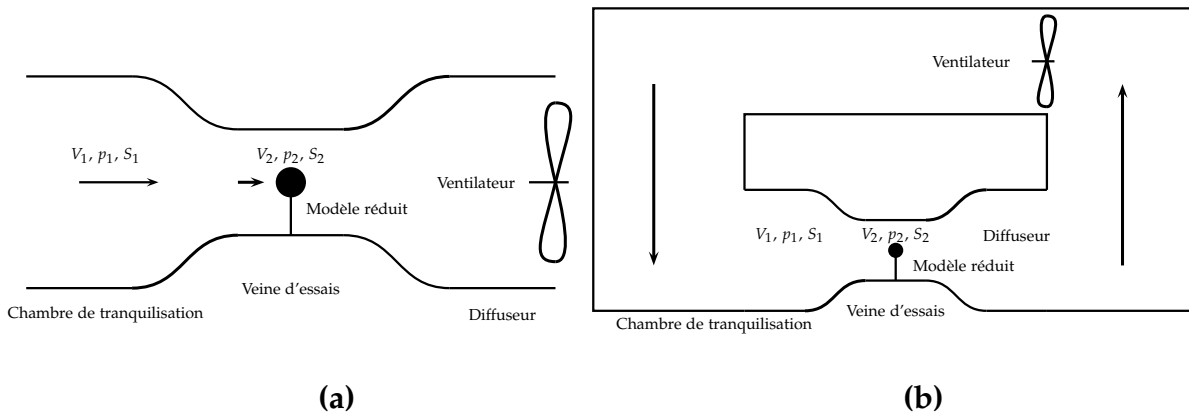


FIGURE 5.39 Souffleries ouverte type Eiffel (a) et fermée type Göttingen (b).

En aérodynamique, pour que les mesures soient fiables, il est indispensable que les dimensions du flux d'air que délivre la soufflerie soient très supérieures à celles de l'objet à tester. En cas contraire, se crée un effet de "bouchon" qui induit des erreurs de mesures. À veines d'essais identiques, la soufflerie Eiffel est plus petite que la soufflerie Göttingen, et de ce fait plus simple et moins chère. Cependant, la deuxième permet de faire varier les conditions expérimentales (pression, gaz, . . .), et reste moins consommatrice.

Dans le cas de tests effectués sur des véhicules, les nouvelles souffleries présentent un sol défilant et permettant ainsi de reproduire le mouvement de la route par rapport au véhicule. Dans les souffleries classiques, plus anciennes, le flux d'air est freiné au niveau du sol, ce qui n'est pas le cas dans la réalité. Seul ce dispositif est capable de restituer de manière réaliste les écoulements d'air sous le plancher et sous le capot, et ainsi de prendre en compte leur impact réel sur l'aérodynamique globale.

Mesures de la vitesse

La vitesse **moyenne** de l'écoulement dans la veine d'essais est estimée soit à partir de tubes de Pitot, soit à partir de la variation de pression mesurée entre les sections A_1 et A_2 :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

Si on désire d'autre part mesurer des vitesses **locales** (près des parois par exemple), d'autres moyens de mesure, intrusifs ou non, sont disponibles.

▷ **L'anémométrie à fil chaud**, méthode la plus ancienne, utilise un fil métallique chauffé par effet joule à l'aide d'un courant électrique (Fig. 5.40). Lorsque le fil est

placé dans l'écoulement, il se voit refroidi par convection forcée. Si le courant électrique dans le fil est maintenu constant, la variation de résistance est mesurée. Si au contraire la résistance du fil (indirectement la température du fil) est maintenue constante, la variation du courant électrique est mesurée. Dans les deux cas, courant constant ou température constante, la composante perpendiculaire au fil de la vitesse locale est possible. Avant toute utilisation, le fil doit être étalonné dans un écoulement de vitesse connue.

Cette méthode reste bien adaptée à la mesure de faibles vitesses dans l'air et dans l'eau. Elle peut être utilisée en supersonique, mais l'étalonnage demeure délicat. D'autre part, la bande passante est importante, permettant ainsi l'étude de la turbulence.

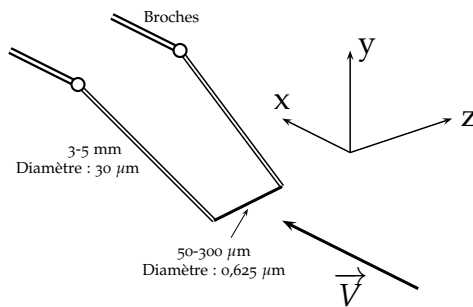


FIGURE 5.40 Schéma d'un fil chaud et ordres de grandeur des composantes principales.

▷ **Le vélocimètre à effet Doppler** (LDV en anglais pour *Laser Doppler Velocimeter*) ne mesure pas directement la vitesse de l'écoulement mais celle de particules entraînées par cet écoulement. Il convient donc de bien choisir ces particules pour qu'elles suivent au mieux l'écoulement (c'est là le propos de la granulométrie). Un faisceau LASER monochromatique illumine une partie de l'écoulement, et le rayonnement réfléchi par les particules est collecté (Fig. 5.41.a). Selon l'effet Doppler, la différence entre les fréquences émises et réfléchies dépend de la vitesse de la particule, $\vec{u}$:

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda} \vec{u} \cdot (\vec{e}_s - \vec{e}_i)$$

où λ est la longueur d'onde du LASER dans le milieu considéré, $\vec{e}_i$ et $\vec{e}_s$ respectivement les directions du faisceau incident et la direction de l'observateur (i.e., photomultiplicateur).

Cette méthode a pour principal intérêt de ne pas perturber l'écoulement⁹, et d'avoir une réponse en fréquence élevée. Il faut cependant veiller à un bon alignement entre les faisceaux émis et réfléchis afin d'augmenter la précision de la mesure. D'autre part, il s'agit d'une méthode optique, le milieu doit donc être suffisamment transparent entre la source LASER et la surface du récepteur (photomultiplicateur).

▷ **La vélocimétrie laser à franges**, elle aussi mesure indirectement la vitesse de l'écoulement par l'intermédiaire de particules. Cette fois-ci, quelques particules tra-

9. On suppose alors que les particules injectées dans l'écoulement sont choisies de façon adéquates pour ne pas le perturber.

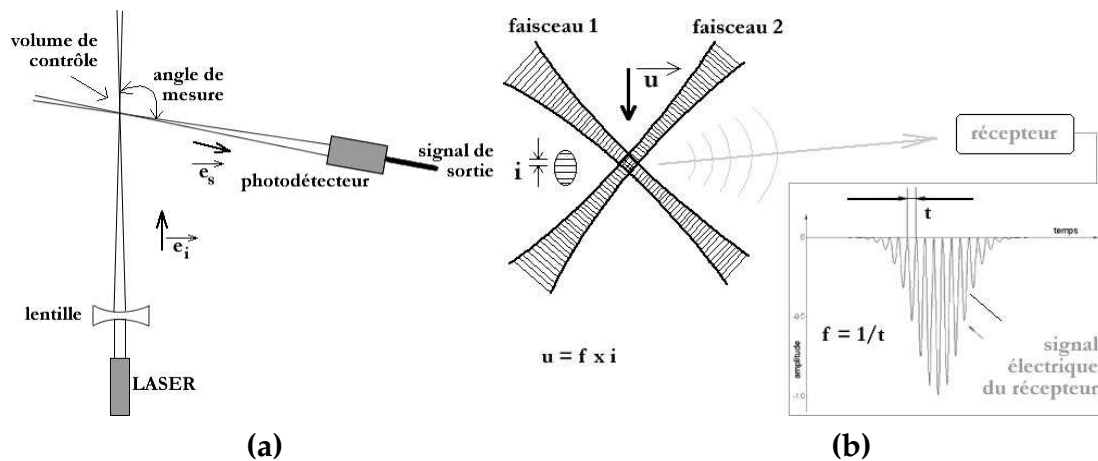


FIGURE 5.41 Configurations classiques de la vélocimétrie laser à effet Doppler (a) et à franges (b).

versent un volume de mesure constitué de franges, d'interfranges égales à i , générées par le croisement de deux faisceaux LASER (Fig. 5.41.b). La fréquence du scintillement produit f est fonction de la vitesse de la particule, et donc de l'écoulement.

La vitesse est ensuite estimée par le produit de l'interfrange par la fréquence du signal du récepteur. La difficulté réside ici dans la mesure d'une fréquence élevée (de l'ordre du MégaHertz) sur un temps très courts (0,1 seconde à peu près).

Les deux méthodes précédentes permettent l'estimation de la vitesse locale en un point de l'écoulement. L'obtention du champ de vitesse nécessite alors la motorisation du système afin de sonder la région intéressante. Ceci entraîne alors une lourdeur supplémentaire, et un temps de manipulation rallongé. Afin de palier à ces inconvénients, il a été mis en place une méthode basée sur l'acquisition d'images, la PIV.

▷ **La vélocimétrie par image de particules** (PIV en anglais pour *Particle Image Velocimetry*) mesure la vitesse de particules entraînées par l'écoulement à partir de deux photos successives prises à un intervalle de temps très court. Les deux illuminations successives de l'écoulement par deux flashes sont enregistrées par une caméra CCD, et un post-traitement par technique de corrélation permet de déterminer les positions successives de la même particule. Un exemple de champ de vitesse à l'aval d'un diffuseur est donné sur la figure 5.42. On y voit de façon très claire la recirculation générée par la présence du gradient de pression adverse à l'origine du décollement de la couche limite.

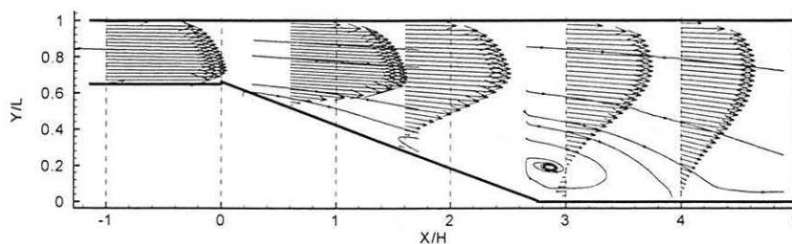


FIGURE 5.42 Champ de vitesse d'un écoulement soumis à un gradient de pression adverse dans un diffuseur d'angle égal à 20° (d'après Portier [45]).

Mesures des efforts

Les mesures d'efforts aérodynamiques sont effectuées à l'aide de balances (souples, à plateaux, ... Fig. 5.43) lorsque les obstacles sont posés au sol ou à l'aide de dards anémométriques (Fig. 5.44) pour les obstacles placés dans des régions éloignées du sol. Ces capteurs sont soumis aux efforts aérodynamiques et doivent réaliser la décomposition du torseur en six composantes (trois résultantes, trois moments). Cependant, ceci n'est pas aisé car les efforts interagissent entre eux. Il demeure alors difficile d'estimer chacune des composantes de la portance et de la traînée. Le principe général d'une balance réside sur la mesure des déformations, à partir de jauges de contraintes, d'une lame ou une poutre sous l'effet de la composante désirée. Le type d'agencement des jauges permet alors la mesure de différents efforts.

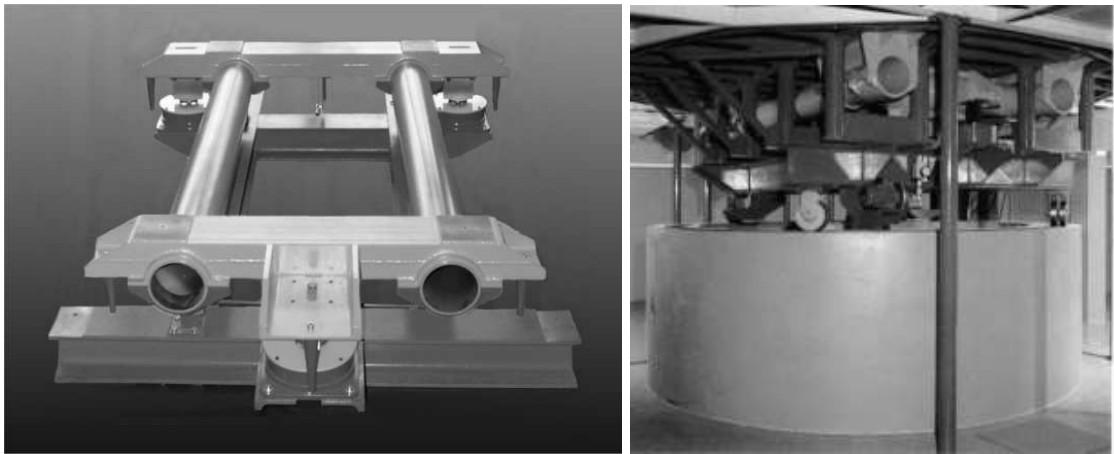


FIGURE 5.43 Balances à 6 composantes, la soufflerie se situant dans le plan supérieur (document Institut AéroTechnique du CNAM).

Mesures des frottements pariétaux

Les frottements pariétaux peuvent être mesurés soit à l'aide d'un élément flottant inséré sur la surface à étudier (Fig. 5.45.a), soit en utilisant des tubes (de Preston), ou à partir de la théorie du coin d'huile (Fig. 5.45.b).

5.7.2 Les méthodes numériques

L'utilisation de la mécanique des fluides numérique (CFD en anglais pour *Computational Fluid Dynamics*) est très large et peut servir à tous les types de recherche : des écoulements aérodynamiques externes comme un avion complet en configuration de décollage, d'atterrissage ou de croisière, l'échappement des moteurs, le déplacement de corps dans le champ d'écoulement de l'avion jusqu'aux écoulements sur les corps non profilés qui ne sont pas aéronautiques, notamment les navires dans une couche limite atmosphérique et les automobiles.

La plupart des calculs sont effectués par des logiciels de calculs industriels (Fluent, CFX, ...) qui résolvent les équations de Navier-Stokes et les équations de la chaleur

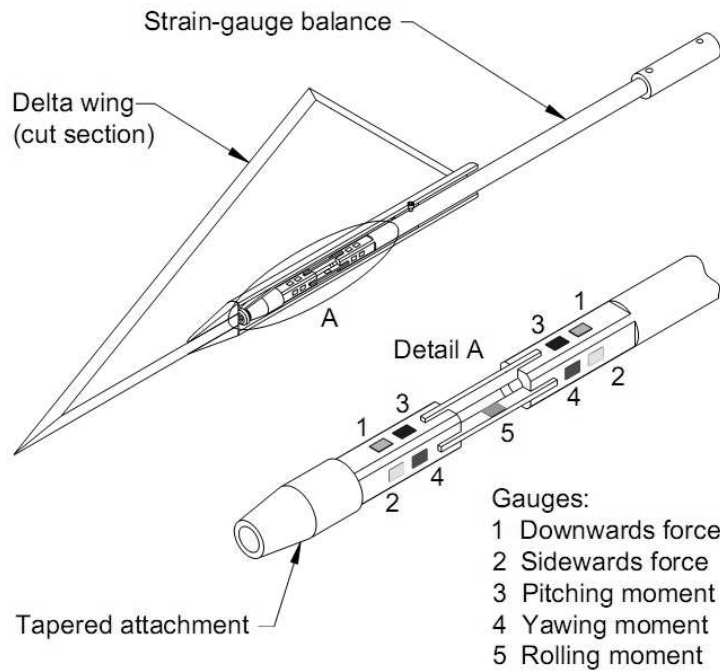


FIGURE 5.44 Dard anémométrique mesurant cinq composantes du tenseur des efforts à partir de jauges de déformation (d'après Erm [21]).

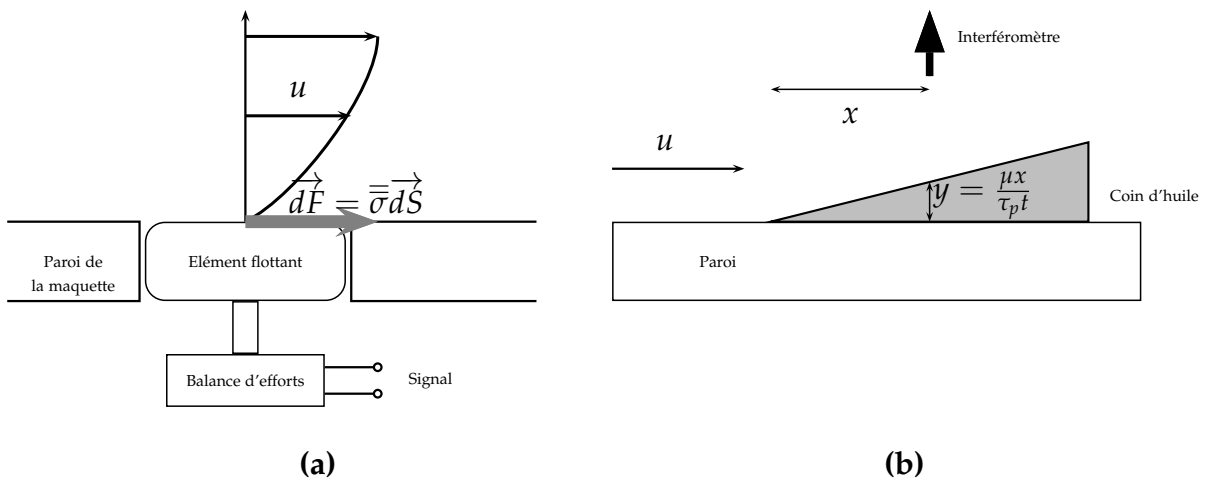


FIGURE 5.45 (a), mesure directe de la force de frottement à l'aide d'un élément flottant (balance de frottement) ; (b) mesure de la forme d'un film d'huile déposé sur la paroi (d'après la théorie de la lubrification, coin d'huile).

(couplées ou non) pour la modélisation d'écoulements (compressibles et incompressibles) et de transfert de chaleur dans des géométries complexes.

Il existe principalement trois méthodes de résolution de ces équations : la DNS pour Direct Numerical Simulation, la LES pour Large Eddies Simulation, et les méthodes statistiques. La première résout directement les équations, nécessitant alors une discrétisation de l'espace très fine. Cela a pour intérêt une bonne restitution du rôle de la turbulence, mais aura pour autre conséquence des calculs très lourds à gérer et des temps de calculs très importants.

On peut alors modéliser les tourbillons de petite taille en leur conférant un comportement universel, et simuler les plus grands. Ce procédé basé sur un filtrage est le principe de la LES. Cette méthode requiert un maillage moins fin que le précédent, et des temps de calculs plus courts. Néanmoins, l'utilisation de cette méthode demande des connaissances sur les schémas numériques adoptés.

Une méthode encore moins gourmande en temps de calculs et en place mémoire consiste à décomposer toute variable aérodynamique en une composante constante et une autre fluctuante. Cela permet de mettre de côté le champ turbulent pour ne s'intéresser qu'au champ moyen¹⁰. La nouvelle écriture de l'équation de Navier-Stokes laisse apparaître un terme lié à la turbulence et qui reste inconnu. Plusieurs modèles ont alors été mis en place afin de l'estimer au mieux.

Les méthodes numériques ne s'attachent pas à simuler uniquement des écoulements au passage de véhicules de transport. Elles peuvent, par exemple, permettre l'estimation des pertes aérodynamiques, autrement appelée *pertes par ventilation*, qui dominent les autres pertes dans les systèmes de transmission à engrenage dès lors que les vitesses de rotation sont élevées. Les estimations numériques prédisent une circulation complexe de l'air au passage des dents : l'air est aspiré de façon axiale, effectue une recirculation dans la région située entre les deux dents pour être finalement éjecté radialement par effet centrifuge (Fig. 5.46.a). Les pertes aérodynamiques numériques sont estimées par le code de calcul et sont très proches de celles mesurées sur un banc expérimental dans des conditions similaires (Fig. 5.46.b). Les résultats obtenus *via* l'approche numérique est utile dans la compréhension de l'écoulement d'une part et permet d'autre part de mettre en place des moyens de réduction de pertes.

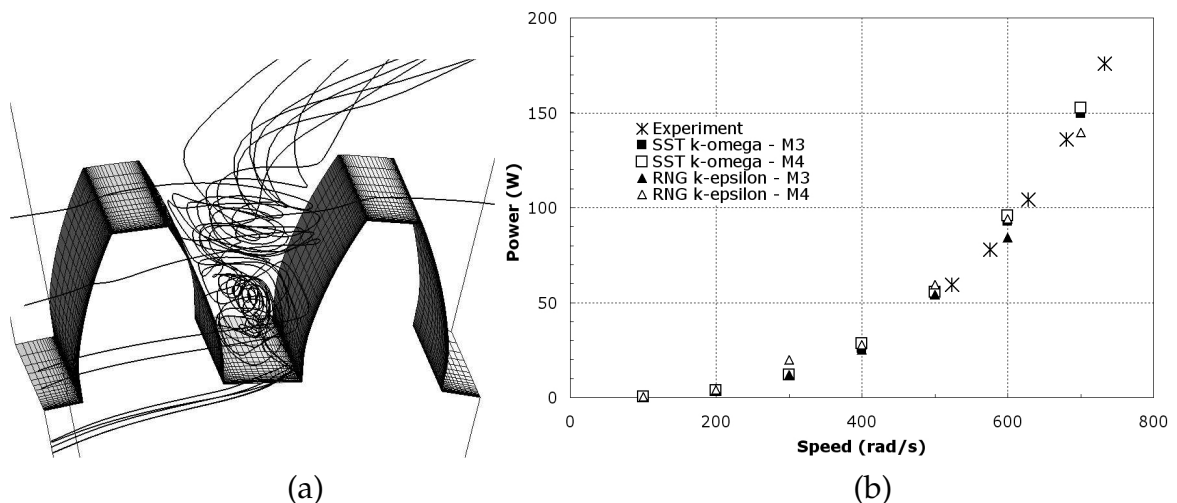


FIGURE 5.46 a, lignes de courant de l'écoulement dans la région des dents; b, pertes aérodynamiques estimées expérimentalement et numériquement à partir de différentes modélisations - $D_p = 150$ mm, $m = 5$ mm, $b = 24$ mm. (d'après Marchesse et al. [36]).

10. On pourra lire le document "Modélisation de la turbulence", proposé dans le cadre du module éponyme en 3ème année.

5.7.3 Soufflerie/Calcul numérique : complémentaires ?

Les simulations numériques donnent des résultats de plus en plus satisfaisants. Néanmoins le passage au tout numérique n'est pas encore d'actualité. En effet, aujourd'hui la précision du calcul est encore sensiblement inférieure à celle d'une soufflerie réelle. La marge d'incertitude des résultats fournis par les logiciels de simulation se situent autour de 2 à 5 % ($0,015 \text{ m}^2$ à $0,030 \text{ m}^2$) de SC_x par rapport au SC_x réel du véhicule, contre $0,002 \text{ m}^2$ de SC_x pour une soufflerie. Ceci suffit à justifier l'utilisation des souffleries. En fait, les deux approches sont complémentaires. Le calcul, moins précis, permet ainsi d'avoir une visualisation complète de l'écoulement, et de les analyser sous tous les angles : pressions, vitesses, etc. Il est certes possible de visualiser les écoulements en soufflerie mais pas de façon aussi complète qu'en numérique. D'autant que le calcul autorise des observations de l'écoulement dans des zones difficilement accessibles en soufflerie, comme le sous-capot.

Concernant le temps, d'un côté lancer un calcul ne prend que le temps de récupérer les données géométriques du véhicule à tester, et quelques manipulations logicielles. Soit environ une journée pour une nouvelle configuration. Alors que la réalisation d'une maquette nécessite au moins une semaine et coûte cher. Toutefois, une fois passée ce cap, le bilan s'inverse. Les temps de calcul sont encore pour l'heure très importants, tandis qu'une fois la maquette installée dans la soufflerie, il est possible de tester un grand nombre de configurations et de réaliser des modifications en quelques heures. Une facilité qui favorise l'échange entre les aérodynamiciens et les dessinateurs.

Ainsi, le calcul permet de préparer le travail en soufflerie, celle-ci étant réservée aux séances de finalisation des formes.

5.8 Exercices

Le niveau de difficulté des exercices suivants est évalué à partir du nombre d'étoiles () allant d'une étoile pour les exercices simples jusqu'à trois étoiles pour les exercices les plus difficiles à résoudre.*

[E38] Coefficient de portance d'un avion de tourisme *

Considérons un avion de tourisme de masse $1\,100 \text{ kg}$ évoluant à une vitesse de croisière de 60 m/s à l'altitude $4\,000 \text{ m}$, altitude pour laquelle la masse volumique de l'air vaut $0,82 \text{ kg/m}^3$. La surface de référence est la surface alaire, c'est à dire la surface projetée des ailes sur un plan transverse. On prendra dans cet exercice la surface alaire de 32 m^2 . Le coefficient de traînée dans le cas d'un vol de croisière vaut $0,015$.

[1.] Estimer le coefficient de portance ;

[2.] Estimer la finesse de cet avion.

[E39] Couple de frottement d'un système tournant **

On souhaite estimer la puissance d'un moteur nécessaire au maintien en rotation d'un système tournant. Celui-ci est constitué de deux pales sans inclinaison (Fig. 5.47), amené à évoluer en rotation autour d'un axe aligné selon $\vec{z}$, et dans de l'eau immobile. Chaque pale est assimilée à une plaque plane de longueur L , s'étendant radialement des valeurs R_i à R_e . Lorsque le système est en mouvement, deux couches limites identiques se développent sur les surfaces inférieure et supérieure de chacune des pales, générant alors des frottements visqueux (traînée de frottement). On fera l'hypothèse dans cette étude que les composantes radiales des vitesses dans les couches limites seront négligeables. L'inclinaison des pales étant nulle et leur épaisseur étant supposée très faible, la traînée de pression sera supposée comme étant négligeable.

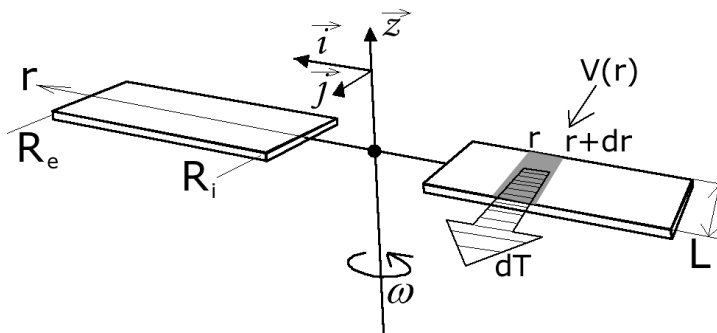


FIGURE 5.47 Schéma du système de pales en rotation et paramètres du problème.

- [1.] Proposez une expression de l'effort élémentaire dT exercé par les frottements visqueux sur une surface élémentaire dS de longueur L et bornée par les distances radiales r et $r + dr$.
- [2.] Déterminez ensuite le couple de frottement généré par la présence des quatre couches limites.
- [3.] Estimer la puissance à fournir par le moteur pour maintenir le système à une vitesse de rotation constante et égale à 100 tr/min, pour des pales de dimensions $R_i = 100$ mm, $R_e = 400$ mm, et $L = 50$ mm.

[E40] Couple nécessaire à la rotation d'un disque *

On veut étudier, à partir d'une analyse dimensionnelle, l'expression du couple C nécessaire à la rotation d'un disque (ici de diamètre $D = 136$ mm), à la vitesse angulaire ω , baignant entièrement dans un bain d'huile ($\rho = 795$ kg/m³, $\mu = 4,0 \times 10^{-3}$ Pa.s, $c_p = 1800$ J/kg.K, $k = 0,134$ W/m.K). On négligera dans cette étude les échanges de chaleur entre le disque et l'huile, ainsi que l'épaisseur du disque.

- [1.] À partir d'une analyse dimensionnelle, donner les nombres sans dimension qui interviennent dans cette étude. On choisira les paramètres de base D , ρ , et ω . On notera C_m le produit sans dimension faisant apparaître le couple.

On propose le modèle $C_m = \alpha \pi_1^\beta \pi_2^\gamma \dots$, où $\pi_1, \pi_2, \dots$ sont les produits sans dimension trouvés dans la question précédente, mis à part C_m . Des valeurs de couples ont été estimées pour deux

vitesse de rotation différentes, à partir du disque et de l'huile de l'étude. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

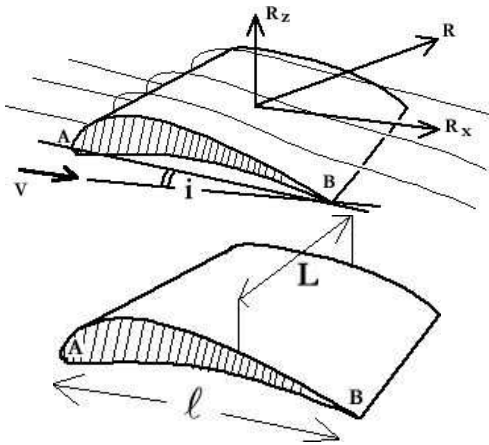
ω (tr/min)	C (N.m)
500	$1,84 \cdot 10^{-3}$
1000	$3,69 \cdot 10^{-3}$

[2.] Déterminer la valeur des coefficients intervenant dans l'expression du couple adimensionné.

[E41] Efforts dynamiques d'une aile d'avion **

Les actions mécaniques de pression et de frottement génèrent des effets de portance (P) et de traînée (T) sur les ailes d'avion. Ces ailes sont caractérisées par la forme de leur section droite appelée profil. Le bord amont A est appelé bord d'attaque, et le bord aval B est appelé bord de fuite. Le segment AB est la corde de référence dont la longueur l caractérise la forme de l'aile. L'envergure de l'aile quant à elle est notée L .

On désire mener des expériences sur une aile destinée à être utilisée sur un avion pouvant voler à 10000 m d'altitude ($T = -50^\circ \text{C}$), et à une vitesse proche de 800 km/h. On rappelle que dans ces conditions, l'air peut toujours être modélisé par celui des gaz parfaits.



[3.] Pour effectuer cette étude, on réalise une maquette à l'échelle 1/10. Cette maquette est placée dans une soufflerie pressurisée où la température de l'air est de 20°C . Dans quelle situation de vitesse et de pression doit-on utiliser cette soufflerie pour avoir une similitude parfaite ?

[4.] Quel sera alors le rapport entre les efforts mesurés sur la maquette et ceux attendus sur le prototype ?

Remarques :

- La viscosité dynamique de l'air est indépendante de la pression et varie en fonction de la température, exprimée en Kelvin, selon la loi : $\mu = 1,753 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T}{273} \right)^{0,76}$.
- La masse volumique de l'air dans les conditions du prototype vaut $\rho = 0,5 \text{ kg/m}^3$;
- Les valeurs de la constante des gaz, et du rapport des chaleurs spécifiques valent : $r = 287,06 \text{ J/kg.K}$ et $\gamma = 1,4$.

[E42] Choix d'un banc d'essais pour l'étude des efforts dynamiques d'un écoulement sur un pantographe de TGV **

L'apport d'énergie nécessaire à la traction d'un TGV est d'origine électrique. Cette technique est de moindre coût d'exploitation et d'entretien, et elle permet la réalisation de machines très puissantes. Le courant, véhiculé par une ligne suspendue appelée *caténaire* (Fig. 5.48), est capté par le TGV à l'aide d'un archet porté par le *pantographe*, qui appuie et glisse sur le fil de contact.

Dans les conditions normales de fonctionnement, le TGV roule à une vitesse de croisière proche de 280 km/h. Le pantographe est alors situé dans une région au sein de laquelle l'écoulement d'air est très complexe et génère une traînée, notée T , sur celui-ci. Du point de vue aérodynamique, le pantographe peut être assimilé en première approximation à un **cylindre de section circulaire** de diamètre réel $D = 15$ cm, dont l'axe de révolution est vertical et perpendiculaire à l'écoulement. L'évolution du coefficient de traînée pour un cylindre placé dans un écoulement est rappelé sur la figure 5.49. On admettra une **évolution** du coefficient de traînée du pantographe identique à ce graphe.

Le but de l'exercice est de choisir un banc d'essais adapté pour reproduire l'effort de traînée sur le pantographe. On dispose pour cela de deux maquettes du TGV entier, de tailles différentes et équipées d'un pantographe. La première, réalisée à l'échelle $1/5^{\text{ème}}$ est destinée à une soufflerie (air), et la deuxième plus petite (échelle $1/7^{\text{ème}}$) pour des essais dans un tunnel hydrodynamique (eau). Les performances des deux bancs d'essais sont rassemblées dans le tableau 5.2.

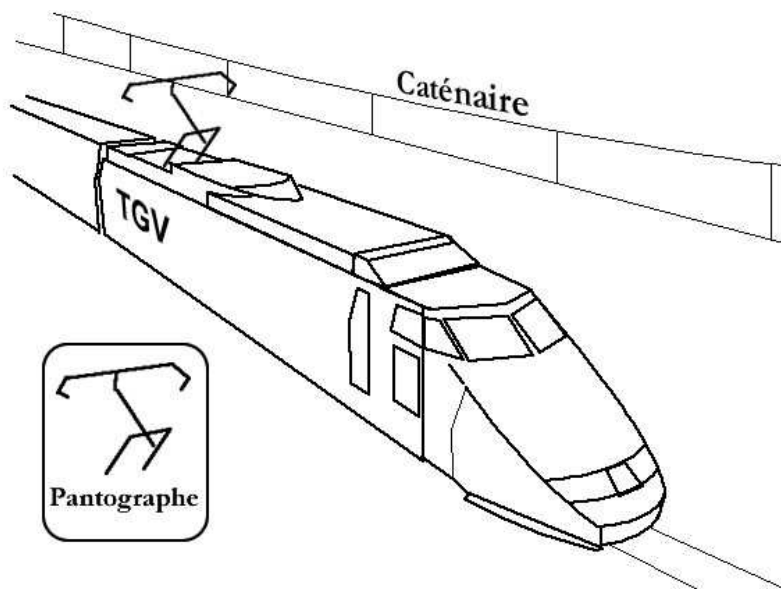


FIGURE 5.48 Schématisation d'un TGV avec emplacement du pantographe et de la caténaire.

[1.] Les effets de compressibilité sont négligeables pour des nombres de Mach de l'écoulement, $M=V/c$, inférieurs à 0,3. Ces effets sont-ils présents sur le prototype ?

[2.] Quel est le banc d'essais susceptible de reproduire le plus fidèlement les **seuls** efforts dynamiques impliqués dans notre étude ? Proposez alors une vitesse de l'écoulement

du fluide autour de la maquette générée par le banc d'essais. On pourra utiliser les propriétés de l'air données dans le tableau 5.2 pour l'estimation du nombre de Reynolds.

[3.] On veut maintenant reproduire sur maquette, un écoulement similaire à celui observé autour du pantographe lorsque le TGV circule en ville, c'est à dire à une vitesse de 75 km/h. Montrez que l'on peut effectuer des mesures sur les deux bancs d'essais sans qu'elles soient perturbées par des effets de compressibilité. Donnez les gammes de vitesses acceptables dans les deux cas.

Tableau 5.2 Performances des deux bancs d'essais proposés pour cette étude (Propriétés des fluides utilisés et vitesse maximale accessible).

Soufflerie - Air (20°C)			
μ_{air} (Pa.s)	ρ_{air} (kg/m ³)	χ (10 ⁻⁹ m ² /N)	V_{max} (m/s)
1,85.10 ⁻⁵	1,2	7083	140
Tunnel hydrodynamique - Eau (20°C)			
μ_{eau} (Pa.s)	ρ_{eau} (kg/m ³)	χ (10 ⁻⁹ m ² /N)	V_{max} (m/s)
1,007.10 ⁻³	1000	0,5	25

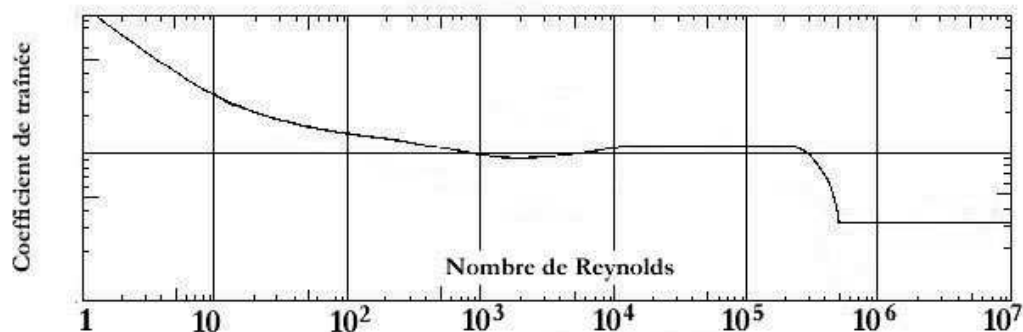


FIGURE 5.49 Évolution du coefficient de traînée d'un cylindre placé perpendiculairement à l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds basé sur le diamètre du cylindre.

[E43] Étude de la cavitation sur les ailes d'hydroglisseurs ***

L'hydroglisseur est un bateau très rapide, pourvu d'ailes immergées générant une portance, effort ascendant lui permettant de réduire la surface en contact avec l'eau. La masse volumique de l'eau (ici salée) étant plus importante que celle de l'air, la surface portante des ailes peut être très petite comparativement à celles d'un avion. Cependant, dans certaines conditions de fonctionnement, la pression locale autour de l'aile est telle que le phénomène de cavitation apparaît.



Ceci est pénalisant pour l'hydroglisseur car la cavitation¹¹ diminue la portance et augmente fortement la traînée. Aussi, des études sur maquette sont menées pour dessiner au mieux le profil de l'aile. On se propose ici d'étudier la traînée en présence de cavitation.

Partie 1. Analyse dimensionnelle

Cette partie vise à mettre en place quelques produits sans dimension caractérisant la traînée en présence de cavitation autour de l'aile. Afin de préparer l'analyse sur maquette, nous supposons l'aile fixe et l'eau en mouvement. Nous raisonnerons sur le profil de l'aile correspondant à une coupe de l'aile (Fig. 5.50.a). De ce fait, on s'intéresse à l'effort de traînée par unité d'envergure, T , ainsi exprimé en **Newton par mètre** [N/m].

On considère un profil, de corde c , incliné d'un angle i , et dont le bord d'attaque (point A) est immergé à une distance h de la surface de l'eau (Fig. 5.50.b). L'écoulement amont est caractérisé par une pression statique p_∞ et une vitesse V_∞ .

L'eau est caractérisée par sa masse volumique ρ , sa viscosité dynamique μ et sa pression de vapeur saturante $p_v(T)$. L'aile est immergée à une profondeur telle que l'état de la surface libre n'a aucune influence sur la traînée.

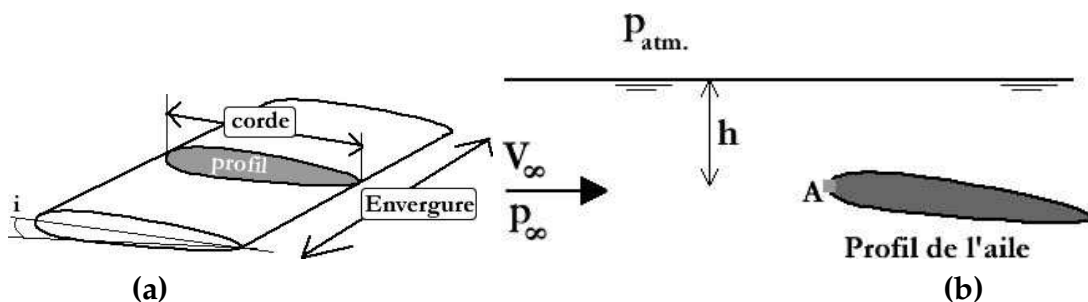


FIGURE 5.50 Configuration de l'aile immergée inclinée. (a), représentation en trois dimensions et définition du profil, de la corde et de l'envergure; (b), paramètres de l'étude à deux dimensions.

[1.] Donner l'ensemble des paramètres globaux qui interviennent dans la traînée par unité d'envergure du profil en présence de la cavitation. On pourra pour cela répondre à deux questions indépendantes :

1. Quels sont les paramètres globaux qui interviennent dans la traînée sans cavitation ?
2. Quels sont les paramètres globaux qui interviennent dans la cavitation seule ?

[2.] Quels sont les deux paramètres que l'on peut regrouper pour mettre en évidence

11. On rappelle que la cavitation correspond au changement phase de vaporisation (liquide $\Rightarrow$ gaz) obtenu lorsque la pression absolue d'un liquide passe sous la pression de vapeur saturante, $p_v(T)$, ceci à température constante.

la réserve d'énergie potentielle de l'écoulement par rapport à la cavitation (on obtiendra un paramètre similaire à celui intervenant dans le nombre d'Euler) ?

[3.] Proposer les produits sans dimension caractérisant la traînée en présence de cavitation. On notera σ_V le produit sans dimension faisant intervenir la pression de vapeur saturante. Comme le veut la tradition en aérodynamique, on rajoutera dans les produits sans dimension concernés le facteur $1/2$ pour faire apparaître la pression dynamique de l'écoulement, $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$.

[4.] Interpréter chacun des produits sans dimension obtenus.

Partie 2. Critère de cavitation

On s'intéresse cette fois aux informations locales données par la répartition de la pression absolue, notée p , autour de l'aile.

[5.] Former un produit sans dimension, noté c_p , à partir de la différence de pression $p - p_\infty$ et de la pression dynamique de l'écoulement amont.

[6.] Proposer une relation entre σ_V et c_p conditionnant la présence de cavitation sur le profil d'aile.

Partie 3. Essais sur maquette

On dispose d'un tunnel hydrodynamique composé d'un circuit fermé d'eau douce. Les expériences relatives au phénomène de cavitation sont menées dans une veine d'essai carrée où peuvent être montés différents profils. À partir du pupitre de commande, l'opérateur peut modifier les paramètres de pression (de 30 à 3000 mbar) et de vitesse de l'écoulement (jusqu'à 12 m/s) dans la veine.

On désire reproduire, dans le tunnel, les phénomènes de cavitation ayant lieu sur un prototype se déplaçant dans l'eau de mer. Ce dernier est composé d'ailes de longueur $L = 1$ m et d'envergure $l = 3$ m, immergées à 1 m sous la surface de l'eau, et il se déplace à une vitesse de croisière de 60 km/h. Pour cela, on dispose d'une aile de profil identique à l'échelle $1/10^{\text{ème}}$ de l'original.

[7.] Est-il possible de respecter la conservation du nombre de Reynolds entre le tunnel et le prototype. Si c'est le cas, quelle est la vitesse de l'écoulement à échelle réduite, sinon on prendra la vitesse maximale du tunnel et commentez.

[8.] Déterminer la pression de fonctionnement du tunnel (i.e., pression en amont du profil) permettant de simuler un type de cavitation équivalent au prototype.

[9.] À l'aide d'une balance, on mesure dans le tunnel un effort de traînée par unité d'envergure égal à 576,0 N/m. Quel serait alors l'effort de traînée sur l'aile entière du prototype ?

Tableau 5.3 Propriétés physiques des eaux douce et salée

	Eau douce	Eau salée
ρ (kg/m ³)	1000	1025
μ (mPa.s)	1,007	1,032
$p_v(T)$ (Pa) à 20°C	2330	1700

On prendra une pression atmosphérique égale à 101300 Pa, et une accélération de pesanteur égale à 9,81 m/s². On rappelle que 1 bar = 10⁵ Pa.

[E44] Traînée d'une plaque plane ***

Considérons une plaque plane de longueur L , de largeur l , d'épaisseur très faible et plongée sans inclinaison dans un écoulement uniforme de vitesse U . Pour des nombres de Reynolds relativement élevés, l'écoulement autour de l'obstacle peut être divisé en deux régions (Fig. 5.12 page 186) : (1) la couche limite, région adjacente aux surfaces solides dans laquelle les forces de viscosité jouent un rôle prépondérant. L'épaisseur de couche limite, notée δ , définit la dimension transversale de la couche limite. À une abscisse donnée, cette épaisseur correspond à l'ordonnée du point où la vitesse axiale atteint 99% de sa valeur dans l'écoulement externe. On supposera que l'extension de la couche limite ne dépend que du paramètre x (i.e., $\delta(x)$), le problème peut donc être résolu en deux dimensions. (2) une région extérieure à la couche limite dans laquelle le fluide peut être considéré comme dénué de toute viscosité.

L'écoulement dans la couche limite est caractérisé par deux échelles, δ dans la direction transversale et x dans la direction de l'écoulement. Les vitesses de référence sont V selon la direction y , et U dans la direction de l'écoulement.

La présence d'une couche limite génère des contraintes pariétales auxquelles on peut associer une traînée totale de la plaque. Le but ici est d'une part d'étudier l'évolution de l'épaisseur de la couche limite, et ensuite de proposer une expression de cette traînée à partir des caractéristiques de la géométrie de la plaque, du fluide, et de la vitesse de l'écoulement à l'infini.

Les hypothèses suivantes sont posées pour résoudre l'exercice : (i) le fluide est newtonien et incompressible ; (ii) l'écoulement du fluide dans la couche limite est isotherme, permanent et laminaire (dans le cas d'une plaque plane, le nombre de Reynolds critique vaut $Re_{Lc} = UL/\nu \sim 5 \cdot 10^5$. Pour un nombre de Reynolds inférieur à Re_{Lc} , la couche limite est laminaire sur toute la longueur de la plaque.) ; (iii) la force de pesanteur est négligée ; et (iv) la pression sera considérée comme étant uniforme dans toute la couche limite.

[1.] En utilisant les hypothèses ci-dessus, écrire les équations de Navier-Stokes simplifiées (on utilisera le fait que l'épaisseur de la couche limite reste très faible devant les autres grandeurs pour considérer le fait que les gradients de vitesse selon y sont prépondérants devant les autres) ;

[2.] Donner un ordre de grandeur de V , qui pour l'instant demeure inconnu, et ensuite

des termes du membre de gauche de Navier-Stokes ;

[3.] Proposez ensuite un ordre de grandeur de δ/L .

Nous allons adopter, cette fois-ci, une stratégie mathématique afin de donner une expression plus fine de l'épaisseur de la couche limite. Considérons pour cela respectivement un paramètre sans dimension et une fonction de courant ¹² :

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \qquad \psi(x, y) = \sqrt{\nu x U} f(\eta) = \frac{Ux}{\sqrt{Re_x}} f(\eta)$$

où f est une fonction sans dimension ne dépendant que de η .

[4.] Montrer que la fonction de courant satisfait l'équation de continuité ;

[5.] Donner les expressions de la vitesse transversale v et de la vitesse selon l'écoulement u en fonction de f et de ses dérivées ;

[6.] En reportant ces résultats dans l'équation de Navier-Stokes de la question [1.], obtenez l'équation en f dite, de **Blasius** :

$$2f''' + ff'' = 0$$

Cette équation différentielle a pour conditions limites : $\eta=0 : f=f'=0$; $\eta \rightarrow \infty : f' \rightarrow 1$. Les résultats sont consignés dans le tableau (5.1).

[7.] À partir des solutions de l'équation de Blasius, proposez une formulation δ/x .

Les formulations précédentes sont appliquées à l'écriture d'un coefficient de traînée et appliquées à une plaque plane

[8.] À partir des résultats de la partie précédente, en déduire l'expression des contraintes pariétales locales, notée τ_0 ;

[9.] Donner alors l'expression de l'effort de traînée T , d'une plaque totalement immergée en fonction de sa surface, de la masse volumique et la vitesse du fluide, et du nombre de Reynolds ;

[10.] On introduit le coefficient C_D tel que $C_D = 1/2\rho U^2 S \times T$ où S désigne la surface de la plaque. Donner l'expression de ce coefficient de traînée, étant donnés les résultats de la question précédente ;

[11.] Une plaque plane carrée de côté $L=1$ m se trouve placée dans un écoulement

12. On rappelle qu'une fonction de courant ψ est définie telle que $u = \partial\psi/\partial y$ et $v = -\partial\psi/\partial x$

d'air à vitesse $U = 5 \text{ m/s}$. La viscosité de l'air est de $1,76 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m.s}$ à la température de 20°C , et sa masse volumique $\rho = 1,205 \text{ kg/m}^3$. Déterminer l'épaisseur de la couche limite en bout de plaque, et calculer l'effort de traînée induite par cette plaque.

Bibliographie sommaire

– Mécanique des Fluides et des Milieux Continus

- ◇ **Mécanique des Milieux Continus**
J. Coirier, Dunod
- ◇ **Mécanique des Fluides**
S. Candel, Dunod Université
- ◇ **Physique théorique - Tome 6 - Mécanique des Fluides**
L. Landau et E. Lifchitz, Ed. Librairie du globe Ed. Mir.
- ◇ **Mécanique expérimentale des Fluides**
R. Comolet, Ed. Masson
- ◇ **An Introduction to Fluid Dynamics**
G. K. Batchelor, Cambridge Mathematical Library

– Les Pompes

- ◇ **Know and Understand Centrifugal Pumps**
L. Bachus & A. Custodio, Ed. Elsevier
- ◇ **Techniques de l'Ingénieur**
- ◇ **Les pompes centrifuges - Conceptions, règles d'utilisation**
Encyclopédie des sciences et des techniques industrielles, Section techniques modernes. Édition Nathan.
- ◇ **Machine à fluide - Principe et fonctionnement**
M. Pluviose, Ed. Ellipse
- ◇ **Pompes, ventilateurs, compresseurs**
A. de Kováts et G. Desmur, Ed. Dunod
- ◇ **Les pompes centrifuges**
M. Chicha, Les presses de l'Université de Montréal
- ◇ **Machines hydrauliques**
L. Bergeron, Dunod
- ◇ **Mémento Technique**
LMT, Division Électro-Hydraulique
- ◇ **Les pompes centrifuges - Conceptions, règles d'utilisation**
Pompes Guinard/Nathan
- ◇ **Hydraulique urbaine - Tome II**
A. Dupont, Eyrolles Editeur-Paris
- ◇ **Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery**
S.L. Dixon, Edition Butterworth Heinemann.

– **Phénomènes transitoires dans les conduites**

◇ **Hydraulique unidimensionnelle - Partie 2**

P. Pernès, Ed. Cemagref

◇ **Le coup de bélier**

Savoir-Faire KSB, volume 1

Bibliographie

- [1] Accumulateurs hydropneumatiques, hydac. [http ://www.hydac.com/de-fr/produits/accumulateurs-hydropneumatiques.html](http://www.hydac.com/de-fr/produits/accumulateurs-hydropneumatiques.html). Accédé le 01/02/2017. 136
- [2] Comment choisir une pompe centrifuge? [http ://genie.industriel.iaa.free.fr/telechargements/doc.techniques/calpeda.pdf](http://genie.industriel.iaa.free.fr/telechargements/doc.techniques/calpeda.pdf). Accédé le 10/04/2017. 26
- [3] Norme iso 5167 – mesure de débit des fluides au moyen d'appareils déprimogènes insérés dans des conduites en charge de section circulaire. [https ://www.boutique.afnor.org/normes](https://www.boutique.afnor.org/normes). Accédé le 14/04/2017. 27, 28
- [4] *Le coup de bélier - savoir-faire KSB - Volume 1*. 2010. 150
- [5] I. H. ABBOTT and A. E. VON DOENHOFF. *Theory of Wing Sections*,. Dover New-York, 1959. 197
- [6] E. ACHENBACH. *Influence of surface roughness on the cross-flow around a circular cylinder*. *J. Fluid Mech.*, 65 :321–335, 1974. 193, 195
- [7] E. ACHENBACH. *The Effects of Surface Roughness and Tunnel Blockage on the Flow Past Spheres*. *J. Fluid Mech.*, 65 :113–125, 1974. 193
- [8] J. D. ANDERSON. *Fundamentals of aerodynamics*. McGraw-Hill, 3^{ème} edition, 2001. 206
- [9] S. BARBER, S. HAAKE, and M. CARRÉ. *Using CFD to understand the effects of seam geometry on soccer ball aerodynamics- The engineering of Sport 6 - Volume 2 : developments and disciplines*. Springer, 2006. 195
- [10] D. BERGERON. *Environmental Engineers' Handbook*. CRC Press, 2^{nde} edition, 1997. 31
- [11] L. BERGERON. *Machines hydrauliques*. Dunod, 4^{ème} edition, 1928. 39
- [12] H. BLASIUS. *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. *Z. Math. Physik*, 56 :1–37, 1908. 22, 190
- [13] W. BOHL. *Stromungsmaschinen Berechnung und Konstruktion*. Vogel Buchverlag Wurzburg. 37
- [14] C. E. BRENNEN. *Hydrodynamics of pumps*. Concepts ETI 1994 / Oxford Science Publications, 1994. 88
- [15] E. BUCKINGHAM. *On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations*. *Physical Review*, 4 :345–376, 1914. 167

- [16] R. COMOLET. *Mécanique expérimentale des fluides - Tome II : Dynamique des fluides réels*. Masson, 4^{ème} édition, 1994. 189
- [17] T.N. CROUCH, D. BURTON, N.A.T. BROWN, M.C. THOMPSON, and J. SHERIDAN. *Flow topology in the wake of a cyclist and its effect on aerodynamic drag*. *J. Fluid Mech.*, 748 :5-35, 2014. 208
- [18] S.L. DIXON. *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. Butterworth-Heinemann, 4^{ème} édition, 1998. 37, 44
- [19] L. DUCLOS. *Pompes hydro et appareils d'élévation*. 51
- [20] A. DUPONT. *Hydraulique urbaine*. Eyrolles, 2^{ème} édition, 1969. 28, 30, 119
- [21] L. P. ERM. *Dynamic testing of aircraft models in water tunnel*. *15th Australasian Fluid Mechanics Conference, Sidney, Australia, 13-17 Dec., 2004*. 214
- [22] H. BACHMANN et al. *Vibration problems in structure : practical guidelines*. Birkhauser, 1995. 202, 203
- [23] J. FAY. *Industrie et Technologie*, 910, 2009. 66
- [24] K. FISHER and D. THOMA. *Investigation of the flow conditions in a centrifugal pump*. *Trans. ASME, Hydraulics*, 54 :141-155, 1932. 87
- [25] R. FOX, W. ROBERT, A.T. McDONALD, and P.J. PRITCHARD. *Introduction to fluid mechanics*. Vol. 7. New York : John Wiley & Sons, 1985. 84
- [26] RNED-HA (Montpellier (FRA)). *Les stations de pompage individuelles pour l'irrigation*. CEMAGREF (Gap - FRA), 1996. 96
- [27] C. GAILLARDREAU. *Débitmètres à pression différentielle*. *Techniques de l'Ingénieur*, Vol. R2-220 :1-16, 1999. 26
- [28] P. GHILARDI and A. PAOLETTI. *Additionnal viscoelastic pipes as pressure surges suppressors*. 5th Int. Conf. Pressure Surges, Hannover, Germany, 22-24 Sept., pages 113-121, 1986. 131
- [29] E. GUYON and J.P. HULIN. *Ce que disent les fluides*. Belin - pour la science édition, 2005. 195
- [30] G. HAGEN. *Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren*. *Pogg. Ann. Bd.*, 46 :423-442, 1839. 22
- [31] J. JAWHAR, E. HADJ-TAIEB, and C. THIRRIOT. *Influence de l'élasticité de la paroi sur l'évolution des ondes de pression dans les réseaux de conduites*. *Mechanics and Industry*, 9 :33-42, 2008. 111, 131
- [32] S. KRAJNOVIĆ, H. HEMIDA, and B. DIEDRICHS. *Time-dependent simulations for the directional stability of high speed trains under the influence of cross winds or cruising inside tunnels*. In *Proceedings of SIA - Fluid Dynamics Applications in Ground Transportation*, Lyon, Oct. 2005. 208
- [33] F. KREITH. *The CRC Handbook of Mechanical Engineering - Chapter Three : Fluid Mechanics*. CRC - second edition, 2004. 30
- [34] W. LEDERLE. *Engine and Pump Factory*. Freiburg, Company catalogue, 1900. 36

- [35] J. LIENHARD. *Synopsis of Lift, Drag, and Vortex Frequency Data for Rigid Circular Cylinders*. Washington State University, College of Engineering Bulletin No. 300, 1966. 199, 201
- [36] Y. MARCHESSE, C. CHANGENET, F. VILLE, and P. VELEX. *Investigation on CFD simulation for predicting windage power losses in spur gears*. *ASME Journal of Mechanical Design*, 133(2) :7 pages, 2011. 215
- [37] J.C. MARTIN, C.J. DAVIDSON, and E.R. PARDYJAK. *Understanding sprint-cycling performance : the integration of muscle power, resistance, and modeling*. *Int. J. of Physiol. Perform.*, 2(1) :5 pages, 2007. 186
- [38] Y. MOULIN. Christian hugues, minix - dispositif de réduction de vortex et de traînée induite, [http ://www.minix.fr](http://www.minix.fr), 2016. 184, 185
- [39] Y. MOULIN. Yoann moulin, photographe, [http ://www.yoannmoulin.fr](http://www.yoannmoulin.fr), 2016. Accédé le 01/02/2017. 132
- [40] Y. NAKAYAMA. *Visualised Flow*. Pergamon Press, Oxford, 1988. 194
- [41] Y. NAKAYAMA and R. F. BOUCHER. *Introduction to fluid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1999. 31
- [42] J. NIKURADSE. *Strömungsgesetze in Rauhen Rohren*. *Forschungsheft, Série B (n°361)*, 1933. 18
- [43] C. NOGER and E. SZÉCHÉNYI. Influence of vehicule shape on transient aerodynamic forces generated during passing manoeuvre. In *Proceedings of SIA – Fluid Dynamics Applications in Ground Transportation*, Lyon, Oct. 2005. 208
- [44] J.L.M. POISEUILLE. *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres*. *Comptes Rendus*, 11 :961–967, 1840. 22
- [45] E. PORTIER. *Étude de l'écoulement au travers de diffuseurs équipés de vannes de guidage ; analyse des performances et application au contrôle des débits pulsés*. Thèse de l'Université de Poitiers, 2000. 212
- [46] S. RISTIC. *Flow Visualisation Techniques in Wind Tunnels, Part II Optical Methods*. *Scientific Technical Review*, 57(2) :38–49, 2007. 177
- [47] S. RISTIC. *Flow Visualisation Techniques in Wind Tunnels, Part I Non Optical Methods*. *Scientific Technical Review*, 57(1) :39–49, 2007. 177
- [48] M. S. SELIG, M.D. MAUGHMER, and D.M. SOMERS. *Natural-Laminar-Flow airfoil for General-Aviation Applications*. *Journal of Aircraft*, 32(4) :pp. 710–715, 1995. 197
- [49] traduit du russe par Mme M. Meury. *Memento des pertes de charge – Coefficients de pertes de charge singulières et de pertes de charge par frottement*. Eyrolles, 1960. 22, 23
- [50] A. TURNER. *Leçons de Physique expérimentale de l'abbé Nollet (livre III, leçon IX)*. 40
- [51] M. VAN DYKE. *An album of fluid motion*. Parabolic Press, Stanford, California., 1982. 21
- [52] A. VASCHY. *Sur les lois de similitude en physique*. *Annales Télégraphiques*, 19 :25–28, 1892. 167

- [53] Brüel & Kjaer (Magazine WAVES). Tunnel vision, 2016. 178
- [54] W.L. WEISS. *Suggested Design Change for a Centrifugal Pump Impeller handling Dredged Mud. Report for C.E. 422 - Hydraulic Research*, 1959. 39
- [55] R. WHITCOMB. *A design approach and selected wind-tunnel results at high subsonic speeds for winglets wing-tip mounted winglets. Nasa Technical Note (TN D-8260)*, 1976. 185
- [56] C. WIESELBERGER. *A sphere drag. Zeitschrift fur Mechanisch*, 5 :140–144, 1914. 180
- [57] F.J. WIESNER. *A review of slip factor for centrifugal compressors. Journal of Engineering Power, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 89 :558–572, 1967. 86
- [58] H. YAMAZAKI. . *Journal of Instrumentation and Control*, 10 :173, 1971. 31

Annexes

A.1 Quelques dates essentielles en mécanique des fluides

— **Archimède (287-212 avant JC)**, mathématicien grec, mit en évidence le fait que tout corps immergé ou plongé dans un liquide est soumis à une force ascendante proportionnelle à la masse du volume de liquide déplacé. Il s'agit là de la base de l'hydrostatique, qui après lui, n'évoluera pas de façon significative jusqu'au 18ème siècle. . .

— **Leonard de Vinci (1452-1519)** reste célèbre pour son génie de l'observation au profit de conceptions de machines. Ces observations vont du jet, des vagues, des tourbillons, jusqu'au vol d'oiseaux. En particulier, de Vinci formula correctement le principe de continuité : *la vitesse d'un écoulement varie inversement avec la section de passage du liquide*.

— 2000 ans après Archimède, la deuxième contribution majeure à l'hydrostatique vient de l'ingénieur allemand **Simon Stevin (1548-1620)**. Ce dernier montre que l'effort exercé par un liquide sur la surface d'un corps immobile est égale au poids de la colonne de liquide s'étendant de l'obstacle à la surface libre.

— Alors que de Vinci jouait de l'observation, **Galilée (1564-1642)** y ajouta l'expérimentation. Il travailla entre autres sur la cohésion et nota qu'une chute d'eau se casse dès lors que le poids de celle-ci est trop importante. D'autre part, il mis en évidence une longueur maximale de conduite d'aspiration d'une pompe à ne pas dépasser pour ne pas créer de "vide". Mais surtout, alors que de Vinci travaillait seul, Galilée rassembla autour de lui une école de pensée. Son jeune collègue **Evangelista Torricelli (1608-1647)** mit d'ailleurs en application les travaux de son mentor sur les trajectoires d'un jet liquide. Il reste célèbre surtout pour ses travaux concernant les baromètres (le premier fut construit en 1643-44).

— À la même époque, le savant français **Blaise Pascal (1623-1662)** finalisa le principe d'hydrostatique, et mit en évidence la variation de la pression atmosphérique via l'altitude.

— **Newton (1642-1727)** est célèbre pour son Principe Fondamental de la Dynamique, mais travailla aussi sur la vitesse du son dans l'air, les contraintes visqueuses, et la résistance à l'avancement des corps dans un liquide (i.e., la traînée).

— Le mathématicien suisse **Daniel Bernoulli (1700-1782)** reste un des plus célèbres, et tout cours de mécanique des fluides ne peut éviter son théorème. On lui attribue la découverte d'une relation entre la vitesse du fluide et la pression. Cependant, dans son ouvrage *Hydrodynamica*, son aboutissement reste obscure, et sa formulation reste très éloignée de celle que l'on connaît aujourd'hui. Il faut attendre la contribution de **Leonhard Euler (1707-1783)**, mathématicien suisse et ami du premier, pour atteindre la relation différentielle du fameux théorème.

— À cette époque, un instrument de mesure essentiel en hydraulique vit le jour grâce au travail du français **Henri de Pitot (1695-1771)**. Celui-ci permet de mesurer la vitesse d'écoulement d'eau à partir de tubes piezométriques. Il s'agit du tube de Pitot.

—Les études de résistance à l'avancement d'un corps sont les plus nombreuses en hydraulique. **Jean Lerond d'Alembert (1717-1783)** démontra que sous des conditions de permanence et d'irrotationnalité, un fluide n'opposait aucune résistance : il s'agit du paradoxe de d'Alembert. Son contemporain, **Antoine de Chezy (1718-1798)** mis en évidence une relation donnant cette résistance à l'avancement, qui porte depuis son nom.

—Bien que la contribution des italiens, allemands et des anglais fut certaine aux 18ème et 19ème siècle, les premiers rôles reviennent aux français du Corps des Ponts et Chaussées (créé en 1719). Parmi ceux-là, **Louis Marie Henri Navier (1785-1836)** fut le premier à améliorer l'équation d'Euler en lui rajoutant un terme lié à la viscosité. Bien que sa compréhension ne fut pas totale, ses résultats mathématiques restaient justes. Une meilleure compréhension des phénomènes sera consécutive aux travaux d'**Augustin Louis de Cauchy (1789-1857)**, ensuite de **Siméon Denis Poisson (1781-1840)**, et finalement de **George Gabriel Stokes (1819-1903)**.

—Au début du 19ème siècle, des mesures d'écoulements dans des conduites de faible diamètre ont été effectuées par l'allemand **Gotthilf Ludwig Hagen (1797-1884)**. Plus tard, le physicien français **Jean Louis Poiseuille (1799-1869)** répéta ces expériences dans le cadre d'études d'écoulement sanguin. Excepté en Allemagne, ce phénomène est appelé écoulement de Poiseuille. Bien que beaucoup de chercheurs ont travaillé sur ces phénomènes, retenons surtout l'italien **Giovanni Battista Venturi (1746-1822)**, les allemands **Johann Albert Eytelwein (1764-1848)** et **Julius Weisbach (1806-1822)**.

—Deux autres noms dominant cependant tous les précités : l'anglais **Osborne Reynolds (1842-1912)** qui en 1873 expérimenta les écoulements dans des conduites et mis en évidence un nombre marquant la distinction des écoulements laminaire et turbulent. **William Froude (1810-1879)**, quant à lui, s'est intéressé à l'architecture navale et fabriqua lui-même quelques maquettes. Il énonça pour cela des lois de similarités d'écoulements influencés par les effets gravitaires. Il fut le premier à noter les effets de la houle sur les navires.

—À cette époque où l'hydraulique devient une science appliquée, certains mathématiciens développent des théories associées, l'hydrodynamique vient de naître : **Joseph Lagrange (1736-1813)**, **Pierre Laplace (1749-1827)**, **Hermann von Helmholtz (1821-1894)**, **Lord William Thomson Kelvin (1824-1907)**, et **John William Strutt Rayleigh (1842-1919)**. Alors que les deux thèmes traitent de fluide, les chercheurs travaillent néanmoins séparément, l'hydraulique manquant de rigueur mathématique et l'hydrodynamique essayant tant bien que mal de rester proche de la réalité. Ainsi, lorsque l'homme commença à rêver de voler, aucune des deux sciences ne put donner de bases assez solides pour comprendre la portance et la traînée.

—Heureusement, une nouvelle science va naître et se développer grâce entre autres à l'allemand **Ludwig Prandtl (1875-1953)** : l'aérodynamique. Dès 1904, il introduisit le concept révolutionnaire de la couche limite. Ce concept est ensuite appliqué par un de ses étudiants en thèse, **Paul Richard Heinrich Blasius (1873-1970)**, sur l'approximation de la traînée d'une plaque plane dans un écoulement. Il montra aussi que les pertes de charge dans une conduite étaient fonction du nombre de Reynolds, en laminaire et en turbulent. Ces dernières études furent complétées par **Johann Nikuradse (1894-1979)** dans les conduites rugueuses ou lisses.

A.2 Principaux nombres sans dimensions

Nombre de Froude, $Fr = \frac{V^2}{gl}$

le nombre de Froude caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces volumiques associées au champ de pesanteur. Ce nombre intervient dans les études d'écoulements à surface libre.

Nombre de Reynolds, $Re = \frac{\rho V l}{\mu}$

Le nombre de Reynolds compare les forces d'inertie aux forces de viscosité. Dans les écoulements laminaires (Reynolds faible) les forces de viscosité sont prépondérantes. Pour les écoulements turbulents (Reynolds important), les efforts d'inertie dominent.

Nombre de Mach, $M = \frac{V}{c}$

Le carré du nombre de Mach est proportionnel au rapport de l'énergie cinétique par unité de masse du gaz sur son énergie interne par unité de masse. Ce nombre intervient dans les écoulements compressibles.

Nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$

Le nombre de Prandtl compare les transferts de quantité de mouvement, associées aux forces visqueuses, aux transferts de chaleur par conduction.

Nombre de Nusselt, $Nu = \frac{hl}{k}$

Le nombre de Nusselt compare les transferts de chaleur convectif et conductif vers une paroi.

Nombre de Schmidt, $Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D}$

Le nombre de Schmidt compare les transferts de quantité de mouvement, associés aux forces visqueuses, aux transferts de masse associés à la diffusion moléculaire.

Nombre de Cavitation, $\sigma_v = \frac{p - p_v(T)}{\frac{1}{2}\rho V^2}$

Ce nombre compare la différence entre la pression statique et la pression de vapeur saturante à l'énergie cinétique du fluide. Lorsque ce nombre prend des valeurs faibles, le fluide se rapproche des conditions qui conduisent à la cavitation.

Nombre d'Euler, $Eu = \frac{p - p_o}{\rho V^2}$

Ce nombre compare les forces de pression à l'énergie cinétique du fluide par unité de volume.

Coefficient de pression, $c_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$

Ce coefficient compare une différence de pression à l'énergie cinétique par unité de volume.

Coefficient de frottement local, $c_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho V^2}$

Ce coefficient compare la contrainte pariétale (frottement par unité de surface) à l'énergie cinétique par unité de volume.

Coefficient de portance, C_z (ou C_L) = $\frac{P}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$

Ce coefficient compare l'effort de portance P à une force hydrodynamique de référence $\frac{1}{2}\rho V^2 A$.

Coefficient de traînée, C_x (ou C_D) = $\frac{T}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$

Ce coefficient compare l'effort de traînée T à une force hydrodynamique de référence $\frac{1}{2}\rho V^2 A$.

Coefficient de pertes de charge, λ tel que $\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

Ce coefficient caractérise les pertes de charge dans une conduite de diamètre D et de longueur L d'un écoulement de vitesse moyenne V .

A.3 Propriétés de l'eau et de l'air

Caractéristiques physiques de l'eau

Température T (°C)	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (Pa.s) $\times 10^3$	Viscosité cinématique ν (m ² .s ⁻¹) $\times 10^6$	Conductivité thermique k (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	Chaleur massique c_p (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹) $\times 10^3$
0	1002.3	1.792	1.788	0.552	4.218
20	1000.5	1.007	1.006	0.597	4.182
40	994.6	0.654	0.658	0.628	4.178
60	985.5	0.471	0.478	0.652	4.184
80	974.1	0.354	0.364	0.668	4.196
100	960.6	0.283	0.295	0.680	4.216
200	866.8	0.138	0.160	0.665	4.505
300	714.3	0.096	0.150	0.540	5.720

Caractéristiques physiques de l'air

Température T (K)	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (Pa.s) $\times 10^5$	Viscosité cinématique ν (m ² .s ⁻¹) $\times 10^5$	Conductivité thermique k (W.m ⁻¹ .K ⁻¹) $\times 10^2$	Chaleur massique c_p (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
100	3.601	0.692	0.192	0.924	1026
150	2.367	1.028	0.434	1.373	1010
200	1.768	1.329	0.749	1.809	1006
250	1.413	1.488	0.949	2.227	1005
300	1.177	1.983	1.568	2.624	1005
350	0.998	2.075	2.076	3.003	1009
400	0.882	2.286	2.590	3.365	1014
500	0.705	2.671	3.790	4.038	1029
600	0.587	3.018	5.134	4.659	1055
700	0.503	3.332	6.625	5.230	1075
800	0.440	3.625	8.220	5.779	1098
900	0.392	3.899	9.930	6.279	1121
1000	0.352	4.152	11.780	6.675	1142
1400	0.251	5.170	20.550	8.910	1214
1800	0.197	6.070	30.810	11.100	1287
2400	0.146	7.350	50.400	16.100	1574

A.4 Conversion d'unités

Nom	Symbole	Équivalence
Longueur		
pouce	in	= 0,0254 m
pied	ft	= 0,305 m
Énergie		
calorie	cal	= 4,18 J
Force		
dyne	dyn	= 10^5 N
kilogramme-force	kgf	= 9,80665 N
pound-force	lbf	= 4,44822 N
Pression		
atmosphère	atm	= 101 325 Pa
	atm	= 76 cm Hg
bar	bar	= 10^5 Pa
Dyne/cm ²	Dyne/cm ²	= 0,1 Pa
pounds per square inch	psi	= 6894,757 Pa
Puissance		
cheval vapeur	ch	= 735,499 W
Viscosité dynamique		
poise	P	= 0,1 Pa.s
poiseuille	Pl	= 1 Pa.s
Viscosité cinématique		
centi stokes	cSt	10^{-6} m ² .s ⁻¹

Réponses à certains exercices proposés

— Exercices du chapitre 1 —

Exercice 1 (p. 32)

– $V = 10 \text{ m/s}$.

Exercice 2 (p. 32)

– $z_1 - z_2 = 22 \text{ m}$.

Exercice 3 (p. 32)

– $Q_0 = 1,60 \text{ m}^3/\text{s}$.

Exercice 4 (p. 33)

– $V = 2,2 \text{ m/s}$;

– $Q = 7,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ ($= 251 \text{ l/h}$).

Exercice 5 (p. 33)

– $p_s = 3,5 \text{ bar}$;

– $p_s = 5,6 \text{ bar}$.

Exercice 6 (p. 34)

– $Q_0 = 0,80 \text{ m}^3/\text{s}$.

Exercice 7 (p. 34)

– $p_E = 0,67 \text{ bar}$.

— Exercices du chapitre 2 —

Exercice 9 (p. 97)

– $Q = 25 \text{ l/s}$; $H = 58 \text{ m}$.

Exercice 10 (p. 97)

– $Q = 14 \text{ l/s}$; $H = 100 \text{ m}$;

– $Q_{\text{DE,g}} = 6 \text{ l/s}$; $Q_{\text{DE,d}} = 8 \text{ l/s}$.

Exercice 11 (p. 98)

– $Q = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$; $H = 34 \text{ m}$; $\eta = 0,45$.

Exercice 12 (p. 98)

– $Q_1 = 220 \text{ l/s}$; $H_1 = 136 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,62$;

- $Q_2 = 140 \text{ l/s}$; $H_1 = 136 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,48$;
- Puissance absorbée par le système de pompage : 863 kW ;
- $Q_{DE} = 190 \text{ l/s}$, $Q_{DF} = 180 \text{ l/s}$.

Exercice 13 (p. 99)

Étude des points de fonctionnement et de la consommation de la station de pompage :

1. Pompes en parallèle :

- Points de fonctionnement des deux pompes :
($Q_1 = 315 \text{ l/s}$; $H_1 = 77 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,8$) et ($Q_2 = 165 \text{ l/s}$; $H_2 = 77 \text{ m}$; $\eta_2 = 0,76$);
- Puissance absorbée par la station de pompage : $\mathcal{P} \approx 461 \text{ kW}$.

2. Pompes en série

- Points de fonctionnement des deux pompes :
($Q_1 = 480 \text{ l/s}$; $H_1 = 35 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,48$) et ($Q_2 = 480 \text{ l/s}$; $H_2 = 40 \text{ m}$; $\eta_2 = 0,52$);
- Puissance absorbée par la station de pompage : $\mathcal{P} \approx 705 \text{ kW}$.

Étude de la cavitation :

Pour une hauteur d'aspiration de 3 m et en négligeant les pertes de charge dans la conduite d'aspiration, le NPSH disponible vaut 7 m . Lorsque les pompes sont disposées en parallèle, il n'y a pas de cavitation. Par contre, lorsqu'elles sont disposées en série, il peut y avoir de la cavitation sur la pompe 2 si elle est installée en première position.

Pour une hauteur d'aspiration de $4,5 \text{ m}$, le NPSH disponible descend à $5,5 \text{ m}$; le montage des pompes en parallèle ne fait pas apparaître de cavitation, alors que celui avec les pompes en série présente de la cavitation quelle que soit la pompe choisie pour première position.

Exercice 14 (p. 102)

1. $H_m = \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) h = 12,6 \times h$;
2. Courbe de réseau $H_{\text{rés.}} = 12 + r(Q) + 6149,9 \times Q^2$ (Q en m^3 par seconde);
3. **Configuration 1 :**
 - Points de fonctionnement de la pompe : $Q = 15,4 \text{ l/s}$; $H = 13,9 \text{ m}$; $\eta = 0,8$; la puissance absorbée vaut $2,62 \text{ kW}$.
 - $t_1 = 9 \text{ h}$.
4. **Configuration 2 :**
 - Points de fonctionnement des deux pompes : $Q = 10 \text{ l/s}$; $H = 15,5 \text{ m}$; $\eta = 0,81$; la puissance absorbée par le système de pompage vaut $3,75 \text{ kW}$;
 - $t_2 = 6 \text{ h } 57 \text{ min}$.
5. **Configuration 3 :**
 - Le débit vaut $23,15 \text{ l/s}$;
 - La vitesse de rotation de la pompe vaut 1712 tr/min ;

- La puissance absorbée par le système de pompage vaut 5,15 kW.

Exercice 15 (p. 104)

En tenant compte de la marge égale à 1 m, la pompe doit être placée 5,4 m au-dessus de la nappe d'eau.

Exercice 16 (p. 104)

1. ($Q_1 = 500 \text{ l/s}$; $H_1 = 62 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,80$) et ($Q_2 = 600 \text{ l/s}$; $H_1 = 58 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,77$);
2. $\mathcal{P} \approx 800 \text{ kW}$;
3. $Q_R = 420 \text{ l/s}$, $Q_{R'} = 470 \text{ l/s}$;
4. ($Q_1 = 640 \text{ l/s}$; $H_1 = 40 \text{ m}$; $\eta_1 = 0,77$), $\mathcal{P} \approx 326 \text{ kW}$, $Q_R = 160 \text{ l/s}$, $Q_{R'} = 290 \text{ l/s}$

Exercice 17 (p. 106)

- $\xi = 164$.

Exercice 18 (p. 106)

1. $N_2 = 3144 \text{ tr/min}$;
2. $p_2 = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Exercice 19 (p. 106)

1. La nouvelle vitesse de rotation vaut 1250 tr/min.

Exercice 20 (p. 108)

1. $\omega_2 = 1848 \text{ tr/min}$;
2. $D_2 = 293 \text{ mm}$.

Exercice 21 (p. 109)

1. cinq pompes;
2. $D_2 = 434 \text{ mm}$.

Exercice 22 (p. 109)

1. pompe de type radial.

– Exercices du chapitre 3 –

Exercice 23 (p. 153)

1. $\Delta p = -6 \text{ bar}$;
2. $\Delta p = -1,33 \text{ bar}$;

Exercice 25 (p. 155)

1. $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, $h = 100 \text{ m}$;
2. $2L/a > t_f$;
3. Le temps d'établissement vaut environ 30 secondes ;
4. La surpression maximale vaut 3,5 bar, et la dépression maximale – 2,4 bar.

Exercice 26 (p. 157)

Partie 1

1. $Q = 28 \text{ l/s}$, $H = 80 \text{ m}$;
2. $N_2 = 1218 \text{ tr/min}$;
3. Le temps d'établissement vaut environ 5,44 s ;
4. La surpression maximale – 2,7 bar.

Partie 2

1. Le temps d'établissement vaut environ 5,44 s ;
2. La surpression maximale 2,7 bar.

— Exercices du chapitre 4 —

Exercice 29 (p. 172)

- $\pi_1 = D^3 \times \Delta p_l / (\mu Q)$;
- $\Delta p_l = 6092 \times \mu Q / D^3$.

Exercice 30 (p. 173)

- $h = k/D \times \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr})$.

Exercice 31 (p. 173)

- $V = 91,74 \text{ m/s}$; $T = 88,38 \text{ N}$.

Exercice 34 (p. 173)

- $V = 2096,7 \text{ km/h}$.

Exercice 36 (p. 174)

- $H/d = f(\rho_A/\rho, L/d, \text{Fr})$.

Exercice 37 (p. 174)

- $g(\rho_B - \rho_L) = g\Delta\rho$;
- $\pi_1 = (g\Delta\rho)D_B \times t/\mu_L$, $\pi_2 = L/D_B$, $\pi_3 = D_T/D_B$;
- $\mu_L = \text{Cste} \times (g\Delta\rho)$;
- $\mu_L = 1,66 \times 10^{-6} \times (g\Delta\rho) \times t$.

Traduction de termes techniques anglais

Cette annexe propose la traduction de termes techniques anglais souvent utilisés en mécanique des fluides.

Traduction anglais-français

A

Absolute velocity	Vitesse absolue
Absolute viscosity	Viscosité dynamique
Adverse pressure gradient	Gradient de pression adverse
Airflow	Écoulement d'air
Angular velocity	Vitesse angulaire
Area	Surface

B

Blade	Aube
Body force	Effort de volume
Bore diameter	Diamètre interne
Boundary layer	Couche limite
Boundary layer thickness	Épaisseur de couche limite
Buyancy force	Poussée d'Archimède

C

Cavitation	Cavitation
Centrifugal force	Effort centrifuge
Centrifugal pump	Pompe centrifuge
Circulation	Recirculation
Computational Fluid Dynamics	Mécanique des Fluides numérique
Conduction	Conduction
Conservation of mass	Conservation de la masse
Continuity flow equation	Équation de conservation de la masse
Control volume	Volume de contrôle
Cross section	Section
Cylinder	Cylindre

D

Delivery pipe	Conduite de refoulement
---------------	-------------------------

Traduction anglais-français (suite)

Density	Masse volumique
Diffuser	Diffuseur
Dimensional analysis	Analyse dimensionnelle
Discharge	Débit
Downstream	Aval
Drag	Traînée
Duct	Conduite
Dynamic pressure	Pression dynamique

E

Eddy viscosity	Viscosité turbulente
Efficiency	Rendement
Equation of state	Équation d'état

F

Fan	Ventilateur
Flow	Écoulement
Flowmeter	Débitmètre
Flow rate	Débit volumique
Fluid	Fluide
Forced convection	Convection forcée
Free convection	Convection naturelle
Free stream	Écoulement infini (non-confiné)
Fully developed	Régime établi
Friction drag	Traînée de frottement visqueux

G

Gravitational acceleration	Accélération de pesanteur
Grid	Maillage

H

Head	Charge hydraulique
Head loss	Pertes de charge
Heat dissipation	Dissipation thermique
Heat transfer	Échange thermique
Hydraulic diameter	Diamètre hydraulique

I

Impeller	Rotor
Incidence angle	Angle d'incidence

Traduction anglais-français (suite)

Incoming flow	Écoulement entrant
Inlet	Entrée
Inviscid fluid	Fluide parfait
Isothermal	Isotherme
Isotropic turbulence	turbulence isotrope

K

Kinetic energy	Énergie cinétique
----------------	-------------------

L

Laminar	Laminaire
Lift	Portance
Liquid	Liquide

M

Major loss	Pertes de charge régulières
Mass	Masse
Mass flow rate	Débit massique
Material derivative	Dérivée particulière
Material domain	Domaine matériel
Mesh	Maillage
Minor loss	Pertes de charge singulières
Momentum	Quantité de mouvement
Momentum equation	Bilan de quantité de mouvement
Motion	Mouvement
Multi-stage pump	Pompe cellulaire

N

Newtonian fluid	Fluide Newtonnien
No-slip condition	Condition d'adhérence
Nozzle	Tuyère
Numerical prediction	Estimation numérique

O

Outlet	Sortie
--------	--------

P

Particle	Particule
Peripheral velocity	Vitesse orthoradiale
Pressure	Pression

Traduction anglais-français (suite)

Pressure coefficient	Coefficient de pression
Pressure drag	Traînée de pression
Power	Puissance
Pump	Pompe

R

Rate of dissipation	Taux de dissipation
Reciprocating pump	Pompe alternative
Relative velocity	Vitesse relative
Reverse flow	Recirculation
Rotameter	Rotamètre

S

Separation	Décollement
Shaft	Arbre (tournant)
Skin friction coefficient	Coefficient de frottement
Specific heat	Chaleur spécifique
Specific speed	Vitesse spécifique
Stagnation point	Point d'arrêt
Steady	Stationnaire
Streamlines	Lignes de courant
Sublayer	Sous-couche
Suction	Aspiration
Sudden contraction or expansion	Contraction ou élargissement brusque

T

Test section	Veine d'essais
Time rate of change	Dérivée par rapport au temps
Torque	Couple
Transient	Instationnaire
Transition	Transition
Turbomachine	Turbomachine
Turbulent flow	Écoulement turbulent

U

Universal gas constant	Constante universelle des gaz
Upstream	Amont

V

Valve	Clapet
-------	--------

Traduction anglais-français (suite)

Vane	Aube, ailette
Vapour pressure	Pression de vapeur saturante
Velocity	Vitesse
Volute casing	Volute
Vortex, vortices	Tourbillon(s)

W

Wake	Sillage
Wall shear stress	Contrainte pariétale
Water hammer effect	Coup de bélier
Wind tunnel	Soufflerie
Wing	Aile