Chapitre 01. Généralités

1- Définitions

a- Un signal

Est la représentation d'une grandeur physique (signal sismique, mesure du pouls, déplacement, intensité de courant, tension, champ, etc.), qu'il convoie de sa source à sa destination. C'est une expression d'un phénomène qui peut être mesurable par un appareil de mesure. Bien que la plupart des grandeurs physiques sont aujourd'hui converties en signaux électriques puis codées en signal numérique binaires, la théorie du signal reste valable quelle que soit la nature physique du signal.

- **Exemple de signaux :**

– Signal électrique : mesure de la tension ou de l'intensité (oscilloscope, voltmètre, ...)

– Signal audio : mesure avec un microphone. Dans le cas de la prise de son musical, les différentes pistes captées avec les différents microphones sont d'abord mixées puis rediffusées par des enceintes, ou bien codées en stéréo sur un support audio.

– Signal électroglottographique (EGG) : mesure de la fermeture/ouverture des cordes vocales.

– Signal numérique : suite binaire (0 ou 1) convertie en suite d'impulsions (0 ou A en volts).

- **Signal analogique et numérique** Le signal analogique est continu dans le temps. Pour pouvoir le traiter avec la puissance de calcul des ordinateurs, le signal analogique est échantillonné et quantifié pour être ensuite converti en suite binaire.

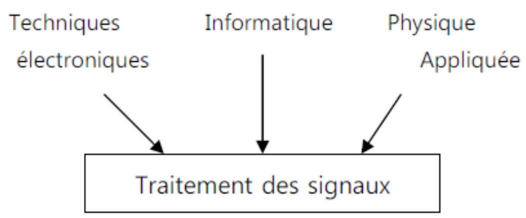
b- La théorie du signal

L'objectif fondamental de la théorie du signal est la description mathématique (ou modélisation) des signaux. Elle fournit les moyens de mettre en évidence, sous forme mathématique commode les principales caractéristiques d'un signal : la distribution spectrale de son énergie ou la distribution statistique de son amplitude par exemple.

Elle offre également les moyens d'analyser la nature des altérations ou modifications subies par les signaux lors de leur passage au travers de blocs fonctionnels (dispositifs généralement électriques ou électroniques).

c- Le traitement de signal

Le traitement des signaux est la discipline technique qui, s'appuyant sur la théorie du signal et de l'information, les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information. Elle trouve son application dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation de ces informations.



- **Domaines d'application du traitement du signal**

Télécommunication ; Technique de mesures ; Etude de vibrations mécaniques ;

Surveillance de processus industriels ; Radar ; Acoustique ; Reconnaissance de formes.

Traitement d'images ; Analyses biomédicales ; Géophysique ; Astronomie, etc.

- **Principales fonctions du traitement de signal**

Les principales fonctions du traitement de signal sont :

- **L'analyse** : On cherche à isoler les composantes essentielles d'un signal de forme complexe, afin d'en mieux comprendre la nature et origines.
- **La mesure** : mesurer un signal, en particulier aléatoire, c'est essayer d'estimer la valeur d'une grandeur caractéristique qui lui est associée avec un certain degré de confiance.
- **Le filtrage** : c'est une fonction qui consiste à éliminer d'un signal certain composant indésirable.
- **La régénération** : c'est une opération par laquelle on tente de redonner sa forme initiale à un signal ayant subis diverses distorsions.

Traitement des signaux

- **La détection** : par cette opération on tente d'extraire un signal utile du bruit de fond qui lui est superposé.
- **L'identification** : c'est un procédé souvent complémentaire qui permet d'effectuer un classement du signal observé.
- **La synthèse** : opération inverse de l'analyse, consiste à créer un signal de forme appropriée en procédant, par exemple, à une combinaison de signaux élémentaires.
- **Le codage** : outre sa fonction de traduction en langage numérique, est utilisé soit pour lutter contre le bruit de fond, soit pour tenter de réaliser des économies de largeur de bande ou de mémoire d'ordinateur.
- **La modulation et le changement de fréquence** : sont essentiellement des moyens permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission, d'un filtre d'analyse ou d'un rapport d'enregistrement.

2- Modèles et mesure des signaux

2-1- Modèle mathématique

Le modèle mathématique d'un signal est une fonction d'une, deux ou trois variables : x(t) ; x (i, j) ; x(i, j, t). Le premier cas est le plus courant : la variable t est usuellement le temps mais elle peut aussi représenter une autre grandeur (une distance par exemple). La fonction représente l'évolution d'une grandeur électrique ou traduite sous cette forme par un capteur approprié : microphone → signal acoustique, caméra → signal vidéo…

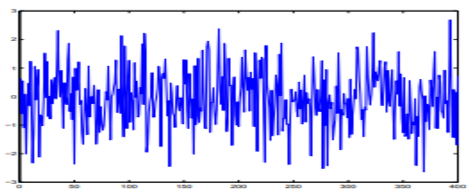
3- Classifications des signaux

3-1- Classification phénoménologique

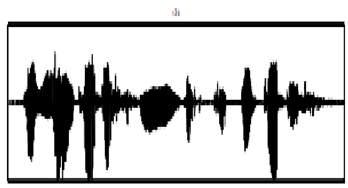
On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

- **Les signaux déterministes** : ou signaux certains, leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe :
    - les signaux périodiques (on peut ajouter les signaux continus considérés comme périodiques de période infini et donc d'une fréquence faible
    - les signaux pseudo aléatoires
    - les signaux transitoires, etc…

- **Les signaux aléatoires** : leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires sinon ils sont non stationnaires



Signal statiotionnaire



Signal non statiotionnaire

3-2- Classification énergétique

On distingue ici les signaux satisfaisant à une condition d'énergie finie à ceux présentant une puissance moyenne finie et une énergie infinie.

On appellera énergie d'un signal x(t) sur l'intervalle [-T/2, T/2] la quantité :

$$E_x(-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}) = \int_{-T/2}^{+T/2} |x^2(t)|dt$$

Et son énergie totale est :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)|dt$$

La puissance moyenne de x(t) la quantité :

$$P_x(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)|dt$$

Et son puissance totale est

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)|dt$$

Signaux à énergie finie

Un signal x(t) est dit à énergie finie s'il est de carré sommable ou de carré intégrable, c'est-à-dire si

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)|dt < +\infty$$

Ce qui implique que $P_x = 0$

Cette catégorie comprend les signaux de type transitoire qu'ils soient déterministes ou aléatoires (exemple une impulsion carré)

Signaux à puissance moyenne finie (et une énergie infinie)

Un signal x(t) est dit à puissance moyenne finie si

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)|dt < +\infty$$

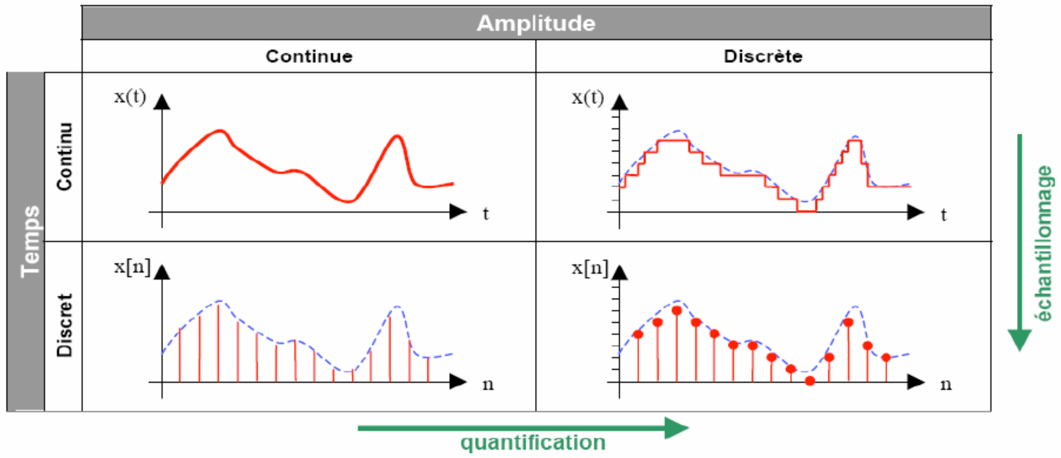
Si $P_x \neq 0$, alors $E_x = \infty$ (signal à énergie totale infinie)

Cette catégorie englobe les signaux de type permanent, périodique, déterministe et les signaux aléatoires permanents.

3-3- Classification morphologique

Selon que le signal x(t) ou la variable t est continu ou discret (t_k=kT) on distingue quatre types de signaux :

- Le signal à amplitude et temps continus appelé couramment **signal analogique**.
- Le signal à amplitude discret et temps continu appelé **signal quantifié**.
- Le signal à amplitude continue et temps discret appelé **signal échantillonné**.
- Le signal à amplitude discret et temps discret appelé **signal numérique**.



3-4- Classification spectrale

L'analyse spectrale d'un signal (ou la répartition énergétique en fonction de la fréquence) conduit à une classification :

- Signaux de basses fréquences.
- Signaux de hautes fréquences.
- Signaux à bande étroite.
- Signaux à large bande.

La largeur de bande B d'un signal est le domaine principale des fréquences occupé par son spectre. Elle est définie par la relation : f_2 - f_1 avec $0 \leq f_1 < f_2$, où f_1 et f_2 sont des fréquences caractéristiques dénotant respectivement les limites inférieure et supérieure prises en compte.

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquences spécifiée B est appelé signal à bande limité ou de spectre à support borné.

On distingue aussi :

- **Signaux de durée finie**

Les signaux dont l'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle de temps T, x(t) = 0 pour $t \notin T$ sont appelés signaux de durée limitée ou à support borné.

- **Signaux bornée en amplitude**

C'est le cas de tous les signaux physiquement réalisable pour lesquels l'amplitude ne peut pas dépasser une certaine valeur limite, souvent imposée par des dispositifs électronique de traitement. On a dans ce cas : $|x(t)| \leq K \; pour \; -\infty < t < +\infty$

- **Signaux pairs et impairs**

Un signal est pair si x(t) = x (-t) ; il est impair si : x(t) = - x (-t)

- **Signaux causals**

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps :

x(t) = 0 pour t<0.

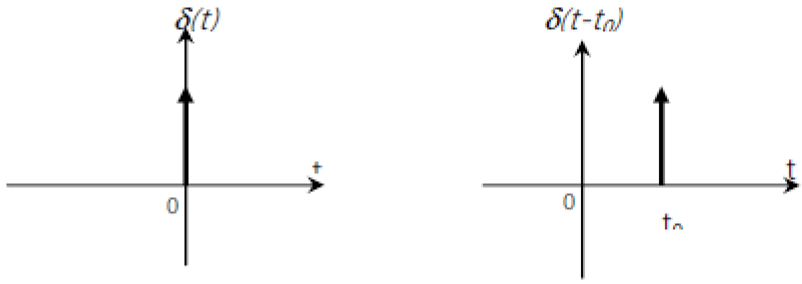
Et par conséquent un signal x(t) est dit anti-causal ssi x(t) = 0, ∀ t > 0.

4- signaux particuliers

4-1 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac d(t), aussi appelée impulsion unité ou distribution delta, est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & pour\ t = 0 \\ 0 & pour\ t \neq 0 \end{cases}$$



Propriétés :

- Intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) = < x, \delta >; (produit\ scalaire)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

- Soit x(t) une fonction continue en t = 0 ou t = t_0

x(t). δ(t) = x(0). δ (t)

x(t). δ (t- t0) = x (t_0). δ (t- t_0)

- Identité :

$x(t) * \delta(t) = x(t)$

- Translation :

$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$

$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$

- Changement de variable :

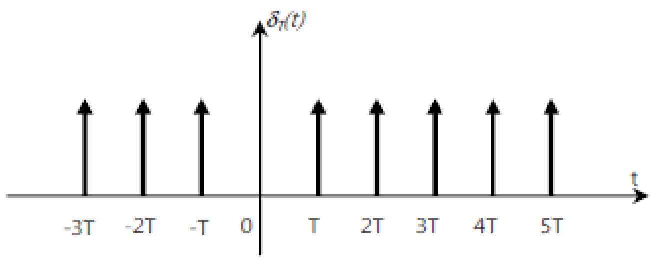
$\delta(at) = |a|^{-1} \delta(t)$ avec en particulier, si $w = 2\pi f$

$\delta(w) = 1/(2\pi).\delta(f)$

- Suite périodique d'impulsion de Dirac : (Peigne de Dirac)

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

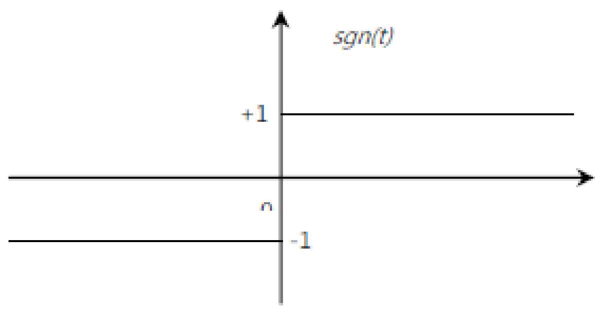
$$x(t).\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT).\delta(t - kT)$$



4-2- Fonction signe

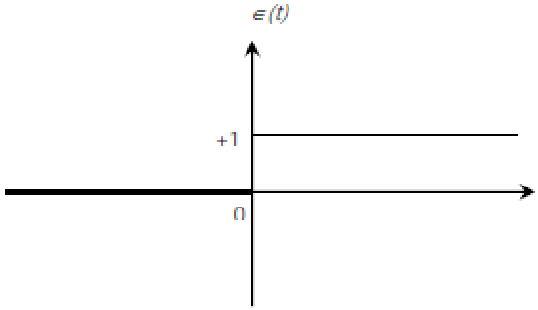
$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases} = \frac{t}{|t|} \quad pour\ t \neq 0$$

Par convention la valeur à l'origine est nulle.



4-3- Fonction saut unité (ou Echelon)

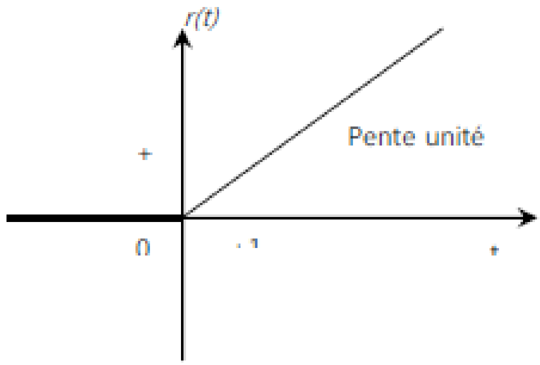
$$\in(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



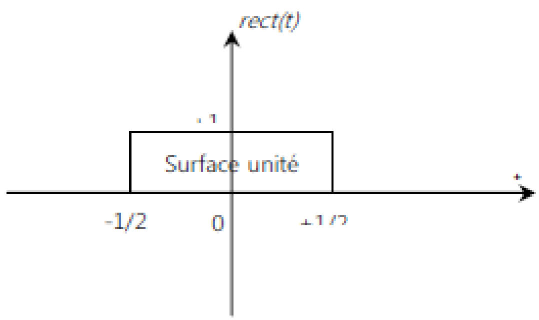
4-4- Fonction rampe

La fonction rampe peut se définir à partir de la fonction saut unité :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \in(\tau)\, d\tau = t. \in(t) \Rightarrow \in(t) = d\, r(t) \quad pour\ t \neq 0$$



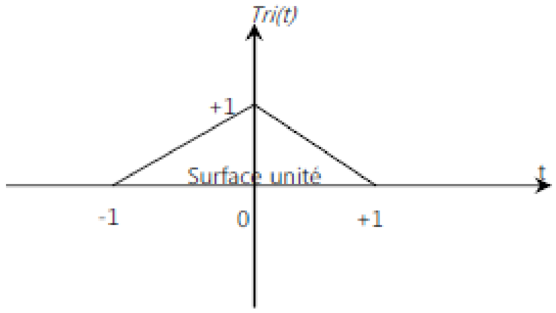
4-5- Fonction porte (rectangulaire) $rect(t) = \in\left(t+\frac{1}{2}\right) - \in\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$



4-6- Fonction triangulaire

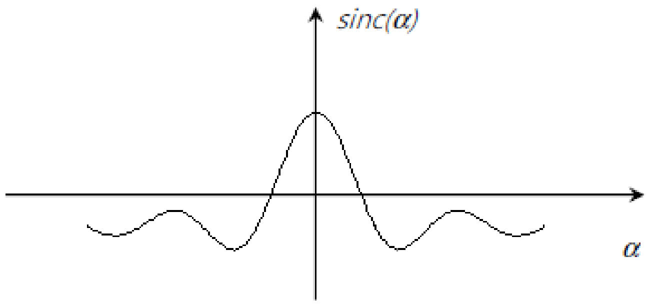
La fonction triangulaire normalisée $Tri(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| \le 1 \\ 0 & |t| \ge 1 \end{cases}$

On peut l'écrire aussi : Tri (t) = rect (t) * rect (t)



4-7- Fonction sinus cardinal

Sincα=sinα/α =sin $sinc\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} \rightarrow sinc(0) = 1$



5- Représentation fréquentielle des signaux

5-1- Domaine temporel, domaine fréquentiel (ou spectral)

Un signal analogique est défini à tout instant t et est donc représentable mathématiquement par une fonction continue du temps f(t).

La **Représentation fréquentielle (spectrale)** d'un signal est la représentation en fonction de la fréquence des amplitudes des différentes composantes présentes dans ce signal.

Le spectre d'un signal est une interprétation de la fréquence du signal est parfois plus utile que la forme de sa variation au cours du temps. Il nous renseigne donc sur les différentes composantes fréquentielles qu'il contient.

Notion de fréquence :

La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée.

C'est donc l'inverse de la période f = 1/T, elle est mesurée en hertz (= 1/seconde)

5-2- La représentation fréquentielle de quelques signaux :

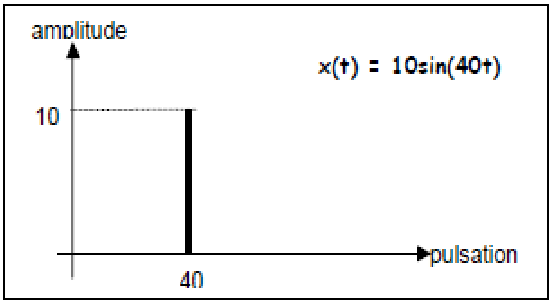
Le signal le plus simple du point de vue fréquence est le signal sinusoïdal.

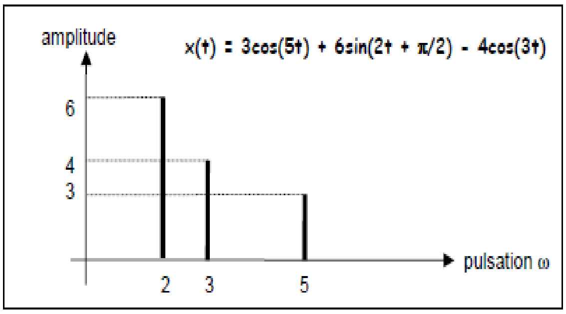
Par exemple, x(t) = E sin (ωt) ne contient qu'une seule fréquence : f = ω /2π

Un signal parlé ou musical est plus complexe, puisque son allure varie constamment au cours du temps. Il contient des fréquences graves, moyennes et aiguës. Son spectre s'étend de 20 Hz à 20 kHz et varie en permanence entre ces deux fréquences extrêmes.

Le signal vidéo est encore plus complexe et son spectre s'étend du continu à quelques mégahertz.

Prenons quelques exemples de spectres théoriques et réels :

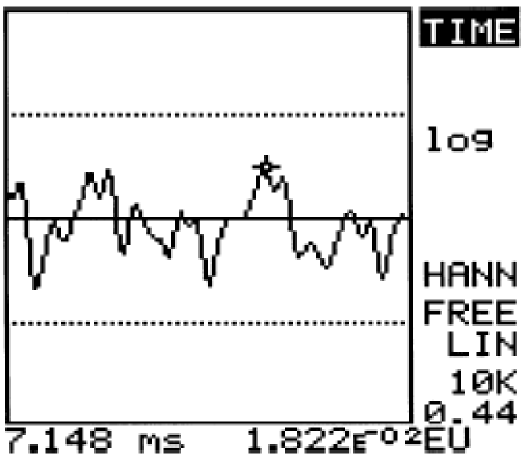


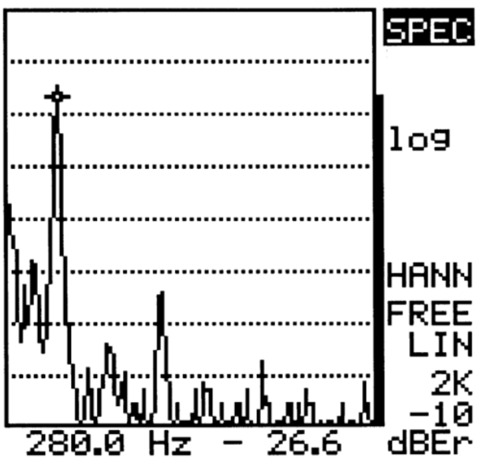


Spectre d'un signal sinusoïdal **Spectre d'un signal composite**

Exemples de spectres de signaux réels

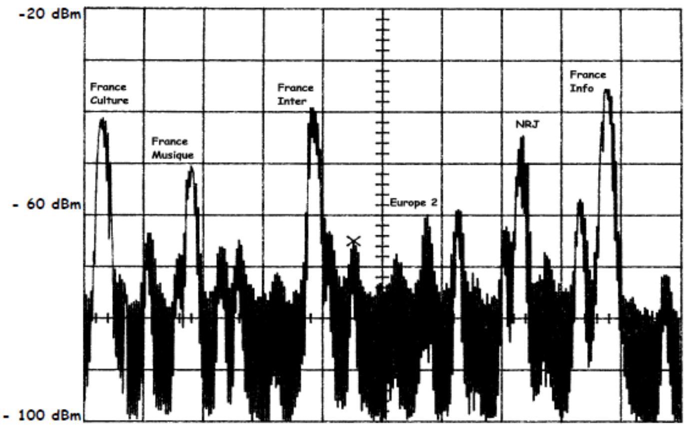
Pour un signal musical, le spectre a une allure un peu différente.





Allure temporelle d'un signal audio **Spectre du signal précédent**

C’est un spectre continu qui contient une infinité de raies entre 20 Hz et 20 kHz. De plus l’amplitude de ces raies varie au cours du temps. Le spectre d’un signal audio est donc une courbe qui évolue constamment.



Spectre du signal capté par

une antenne (bande FM)

On voit clairement émerger du plancher de bruit à – 80 dBm (22 µV) les spectres des différents émetteurs de la bande FM. On peut y reconnaître différents émetteurs de la région de Mulhouse :

France-Musique : 91,6 MHz France-Inter : 95,7 MHz

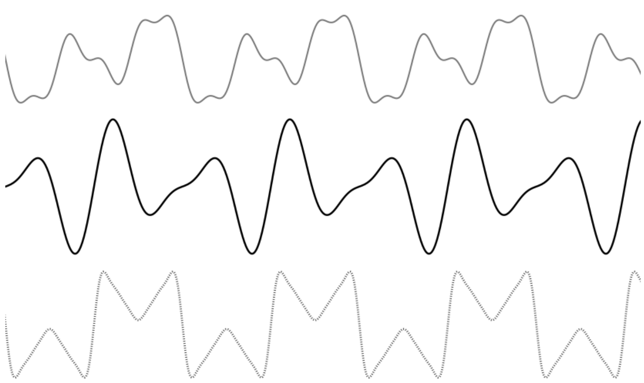
Radio NRJ : 102,1 MHz France-Info : 105,5 MHz

L’observation du spectre permet de surveiller le bon fonctionnement des différents émetteurs, de mesurer leur puissance.

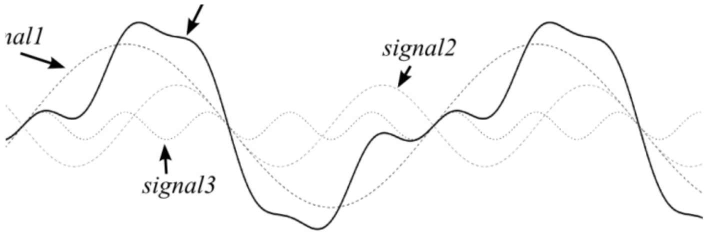
La composition en fréquence d’un signal

- Pour un signal sinusoïdal $x(t) = X_0 \sin(2\pi f_0 t) \rightarrow$ La fréquence = f_0

- pour les autres signaux : Si on ajoute plusieurs signaux monochromatiques (sinusoïdes simples) de fréquences différentes, on obtient par exemple



Donc les signaux complexes peuvent être représentés par une somme de sinus



5-3- Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique de période T peut se décomposer en une somme de fonctions sinus et cosinus de fréquences multiples de f_0 = 1=T. C'est la décomposition en série de Fourier.f_0 est la fréquence fondamentale.

Cette décomposition constitue le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle.

5-4- Forme trigonométrique d'un signal :

Signal x(t) périodique, de période T peut s'écrire

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)]$$

On peut calculer les coefficients de la série :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

5-5- Forme complexe d'un signal :

Utilise l'expression des sinus et cosinus sous forme d'exponentielles (formule de Moivre

exp (jθ) = cos θ + j. sinθ) :

$\cos\theta = \frac{exp\ (j\theta) + exp\ (-j\theta)}{2}$ $\qquad$ $\sin\theta = \frac{exp\ (j\theta) - exp\ (-j\theta)}{2j} = j\frac{exp\ (-j\theta) - exp\ (j\theta)}{2}$

Desquelles on peut déduire la décomposition de x(t) en somme d'exponentielles :

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[(A_n - jB_n)\ \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) + (A_n + jB_n)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)]$$

Si on pose

$$C_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \qquad si\, n > 0$$

$$C_n = \frac{A_{(-n)} + jB_{(-n)}}{2} \qquad si\, n < 0$$

On peut écrire une forme simple de cette décomposition :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Avec une expression des coefficients C_n :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right) dt$$

On appelle les C_n **les coefficients de Fourier** de x(t). C'est leur ensemble qui forme la **représentation fréquentielle du signal x(t).**