II- Interpolation et approximation

II-1- Introduction

En pratique on rencontre souvent des problèmes où la fonction décrivant une grandeur physique donnée n'est connue que par des valeurs de mesure en des points donnés $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, ou en d'autres cas connue mais tellement complexe qu'on cherche à la remplacer par un polynôme $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$.

Le problème de l'*interpolation* consiste à chercher des fonctions "simples" (polynômes, polynômes trigonométriques) passant par des points donnés

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

C.-à-d., on cherche p(x) avec $p(x) = y_i$ pour i= 0,1,..., n. Si les valeurs de y_i satisfont $y_i = f(x)$ ou f(x) est une fonction donnée,

- l'erreur de l'*approximation est :* $|E(x)|=|F(x) - p(x)|$
- Les points (x_i,y_i)*,tel que* $yi=f(x_i)$ sont appelés points d'appui
- L'intervalle *[a,b]* est appelé intervalle d'interpolation

Théorème

Etant donnés (n+1) points d'appui (x_i,y_i) (i=0,...,n), il existe un seul polynôme d'interpolation P(x)

II-2- Polynôme d'interpolation de Lagrange.

Soient ***(n+1)*** points distincts $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_1}$, ..., $\boldsymbol{x_n}$ et $\boldsymbol{f}$ une fonction dont les valeurs sont $(\boldsymbol{x_0})$, $(\boldsymbol{x_1})$, ..., $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x_n})$. Alors, il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui coïncide avec les points d'interpolation, i e :

$\boldsymbol{f(x_k) = P_n(x_k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n}$

Ce polynôme est donné par :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$$

Avec

$L_k(x) = \prod_{i=0,\, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)}{(x_k-x_0)} \frac{(x-x_1)}{(x_k-x_1)} \cdots \frac{(x-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})} \frac{(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k+1})} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_k-x_n)}$ *k=0,...,n*

- Le polynôme $\mathbf{P_n}$ (x) est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points x_0, x_1, ...x_n.
- $(\boldsymbol{x})$ sont dits coefficients polynômes de Lagrange, ils sont orthogonaux c'est-à-dire

$(\boldsymbol{x_j})$ = **0** et $(\boldsymbol{x_k})$ = **1**.

Exemple :

Soit une expérience où on enregistre la distance parcourue par un objet en fonction du temps, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t (sec)	0	1	2	3	4
X(t)=F (t) (m)	0	5	15	0	3

Calculer le polynôme de Lagrange pour cette table.

Notons que pour ***n+1*** points le degré du polynôme est inférieur ou égal à ***n***. Pour notre cas on a ***5*** points, cela nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à ***4***.

$$f(t) = p_4(t) = \sum_{i=0}^{4} f(t_i)L_i(t)$$

$$= f(t_0)L_0(t) + f(t_1)L_1(t) + f(t_2)L_2(t) + f(t_3)L_3(t) + f(t_4)L_4(t)$$

Avec les coefficients $f\ (t_i)$ sont les valeurs de la distance aux points donnés t_i, on remplace et on écrit donc :

$\boldsymbol{X(t) \approx P_4(t) = 0 * L_0(t) + 5 * L_1(t) + 15 * L_2(t) + 0 * L_3(t) + 3 * L_4(t)}$

Ensuite, on calcule les coefficients polynômes de Lagrange :

$L_0(t) = \sum_{i=0, i\neq 0}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_1)}{(t_0-t_1)} \frac{(t-t_2)}{(t_0-t_2)} \frac{(t-t_3)}{(t_0-t_3)} \frac{(t-t_4)}{(t_0-t_4)}$

Noter bien qu'il est inutile de calculer les coefficients polynômes $\boldsymbol{L_0\ (t)}$ et $\boldsymbol{L_3\ (t)}$ car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement.

$L_1(t) = \prod_{i=0,i\neq 1}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)} \frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)} \frac{(t-t_3)}{(t_1-t_3)} \frac{(t-t_4)}{(t_1-t_4)} = \frac{(t-0)}{(1-0)} \frac{(t-2)}{(1-2)} \frac{(t-3)}{(1-3)} \frac{(t-4)}{(1-4)} = \frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t)$

$$L_2(t) = \prod_{i=0,i\neq 2}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_2-t_0)} \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)} \frac{(t-t_3)}{(t_2-t_3)} \frac{(t-t_4)}{(t_2-t_4)}$$
$$= \frac{(t-0)}{(2-0)} \frac{(t-1)}{(2-1)} \frac{(t-3)}{(2-3)} \frac{(t-4)}{(2-4)} = \frac{1}{6}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t$$

$$L_4(t) = \prod_{i=0,i\neq 4}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_4-t_0)} \frac{(t-t_1)}{(t_4-t_1)} \frac{(t-t_2)}{(t_4-t_2)} \frac{(t-t_3)}{(t_4-t_3)}$$
$$= \frac{(t-0)}{(4-0)} \frac{(t-1)}{(4-1)} \frac{(t-2)}{(4-2)} \frac{(t-3)}{(4-3)} = \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$\boldsymbol{X(t) \approx P_4(t) = -25.75t + 50.95833t^2 - 23.25t^3 + 3.04167t^4}$

II-3- Polynôme d'interpolation de Newton (Méthode différences divisées)

L'écriture du polynôme d'interpolation P_n dans la base des polynômes de Lagrange {Li} i=0,...n est intéressante d'un point de vue théorique, mais peu du point de vue numérique

- Son évaluation requiert trop d'Opérations élémentaires.
- C'est pourquoi, on lui préfère la formule d'interpolation de Newton (associée aux points $x_0 \ldots x_n$), qui consiste à écrire plutôt

$$P_n(x) = a_0^1 + a_1^n(x - x_0) + \cdots + a_n^n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Remarques

- Tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut se mettre sous cette forme dès que les x_i sont tous distincts
- a_n^n est aussi le coefficient de x^n dans P_n écrit sous sa forme usuelle

Principe

Le calcul du polynôme de Newton commence par la construction d'un polynôme de degré *1*, $\boldsymbol{P}_1\,(\boldsymbol{x})$ qui passe par les deux premiers points. Ensuite, ce dernier sera utilisé pour calculer un autre de degré *2*, $\boldsymbol{P}_2\,(\boldsymbol{x})$ qui passe par les trois premiers points et ainsi de suite jusqu'au polynôme final de degré inférieur ou égal à *n*, $(\boldsymbol{x})$. On a la relation de récurrence suivante entre deux polynômes successifs $\boldsymbol{P}_{i-1}\,(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}\,(\boldsymbol{x})$ *(i=2,3,.., n+1)* :

$$\begin{cases} P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \\ P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{cases}$$

On remarque que les coefficients $\boldsymbol{a_k}$ *(k=0,..., n)* sont les éléments essentiels dans le calcul des polynômes de Newton. Ces coefficients sont les différences divisées d'ordre *k* de la fonction *f*.

- **La formule d'interpolation de Newton**

Théorème

Le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction f aux points distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$ est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k))$$

Où f [.] désigne les différences divisées de f définies récursivement par :

$$f[x_i] = f(x_i) \quad i = 0 \dots n$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{[x_k - x_0]}$$

Propriétés des différences divisées

- $f\,[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est le coefficient dominant dans la forme canonique

$P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n]\, x^n + \dots$

- $f\,[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est invariant par des permutations sur les x_i : en effet, permuter les x_i ne change pas le polynôme d'interpolation et donc ne change pas le coefficient du terme de plus haut degré. si f = Q un polynôme de degré q

$$Q\,[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \begin{cases} 0 \; si \;\; n > q \\ coeff. du\ terme\ de\ plus\ haut\ degré\ de\ Q\ si\ q\ =\ n \end{cases}$$

En effet, si q ≤ n, l'interpolé de Q n'est autre que Q lui-même.

- **Calcul des différences divisées**

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{[x_k - x_0]}$$

Avec

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{[x_1-x_0]}$, $f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$, … … …..

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$, $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$, ……….

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$, $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\,] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4\,-x_0}$

Exemple : Reprenons la table donnée au exemple précédent et essayons de calculer le polynôme de Newton pour cette table. Notons que pour ***n+1*** points le degré du polynôme est inférieur ou égal à ***n***. Pour notre cas on a ***5*** points, cela nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à ***4***. Ecrivons les polynômes de Newton :

$$\begin{cases} P_1(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1(t \;-\; t_0) \\ P_2(t) \;=\; P_1(t) \;+\; a_2(t \;-\; t_0)(t \;- t_1) \\ P_3(t) \;=\; P_2(t) \;+\; a_3(t -\; t_0)(t \;- t_1)(t \;- t_2) \\ \\ P_4(t) = \; P_3(t) + \; a_4(t \;-\; t_0)(t \;- t_1)(t \;- t_2)(t \;- t_3) \end{cases}$$

Les $\boldsymbol{a_i}$ sont les différences divisées d'ordre ***i***

Calculons la table des différences divisées.

t_k	$f(t_k) = f[t_k]$	DD^1	DD^2	DD^3	DD^4
0	0 = a_0				
1	5	5 = a_1	2.5 = a_2		
2	15	10	-12.5	-5 = a_3	3.04167 =a_4
3	0	-15	9	7.1667	
4	3	3			

Remplaçant les a_i et les t_i par leurs valeurs dans les polynômes de Newton, on trouve :

$\boldsymbol{P_1(t)} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1(t - t_0)} = \mathbf{0} + \mathbf{5}(\boldsymbol{t} - \mathbf{0}) = \mathbf{5}\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{P_2(t)} = \boldsymbol{P_1(t)} + \boldsymbol{a_2(t - t_0)(t - t_1)} = \mathbf{5}\boldsymbol{t} + \mathbf{2.\ 5}(\boldsymbol{t} - \mathbf{0})(\boldsymbol{t} - \mathbf{1}) = \mathbf{2.\ 5}\boldsymbol{t_2} + \mathbf{2.\ 5}\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{P_3(t)} = \boldsymbol{P_2(t)} + \boldsymbol{a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)} = \mathbf{2.\ 5}\boldsymbol{t_2} + \mathbf{2.\ 5}\boldsymbol{t} - \mathbf{5}(\boldsymbol{t} - \mathbf{0})(\boldsymbol{t} - \mathbf{1})(\boldsymbol{t} - \mathbf{2}) = -\mathbf{5}\boldsymbol{t_3} + \mathbf{17.\ 5}\boldsymbol{t_2} - \mathbf{7.\ 5}\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{P_4(t)} = \boldsymbol{P_3(t)} + \boldsymbol{a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)} = -\mathbf{5}\boldsymbol{t_3} + \mathbf{17.\ 5}\boldsymbol{t_2} - \mathbf{6}\boldsymbol{t} + \mathbf{3.\ 0417}(\boldsymbol{t} - \mathbf{0})(\boldsymbol{t} - \mathbf{1})(\boldsymbol{t} - \mathbf{2})(\boldsymbol{t} - \mathbf{3})$

$\boldsymbol{P_4(t)} = 3.04167t^4 - 23.25t^3 + 50.95833t^2 - 25.75t$

C'est le même polynôme que celui de Lagrange.