Cours Méthodes Numériques

Dr. Safia RASLAIN Centre Universitaire Abd elhafid boussouf-Mila

Institut des Sciences et de Technologie

Département EM-GM

Email: s.raslain@centre-univ-mila.dz

1.0 Mars 2024

Dr. Safia RASLAIN

Table des matières

Chapitre 2 : Interpolation Polynomiale

1. Introduction

A partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en$(n+1)$ point de la forme $(x_i, f(x_i)), i = 0, \ldots n$, peut on construire une approximation de $f(x)$ pour tout x ?

Les points $(x_i, f(x_i))$ sont appelés points d'interpolation et peuvent provenir des données expérimentales ou d'une table.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ contenant $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Soit P_n un polynôme de degré inferieure ou égale n. On dis que P_n est interpolant de $f$ou interpole $f$on $x_0, x_1, \ldots, x_n$. $P_n(x) = f(x_i), i = 0, 1.. . n$.

2. Objectifs

Le deuxième chapitre vise à :

- Identifier les concepts de base liés à l'interpolation polynomiale, comme les polynômes de Lagrange et de Newton.
- Expliquer comment l'interpolation polynomiale est utilisée pour estimer des valeurs entre des points de données connus.
- Utiliser des méthodes d'interpolation pour trouver un polynôme interpolateur pour un ensemble de données donné.
- Évaluer les erreurs associées à l'interpolation polynomiale et comparer différentes méthodes d'interpolation.
- Juger de la pertinence de l'interpolation polynomiale pour un ensemble spécifique de données ou pour une application pratique.

3. Les méthodes utilisées

3.1. Polynôme de Lagrange

a) Introduction

Soit à calculer $f(x)$ pour $x = 2$, connaissant $f(1) = 3,716$ et $f(3) = 1,623$ (figure 2).

Les propriétés de la droite dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ nous permettent d'écrire : $\frac{y_0 - y}{x_0 - x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} y$ étant la valeur approchée de $f(3)$.

$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$ On peut alors calculer la valeur approchée de $f(2)$ Cette formule est appelée polynôme de Lagrange.

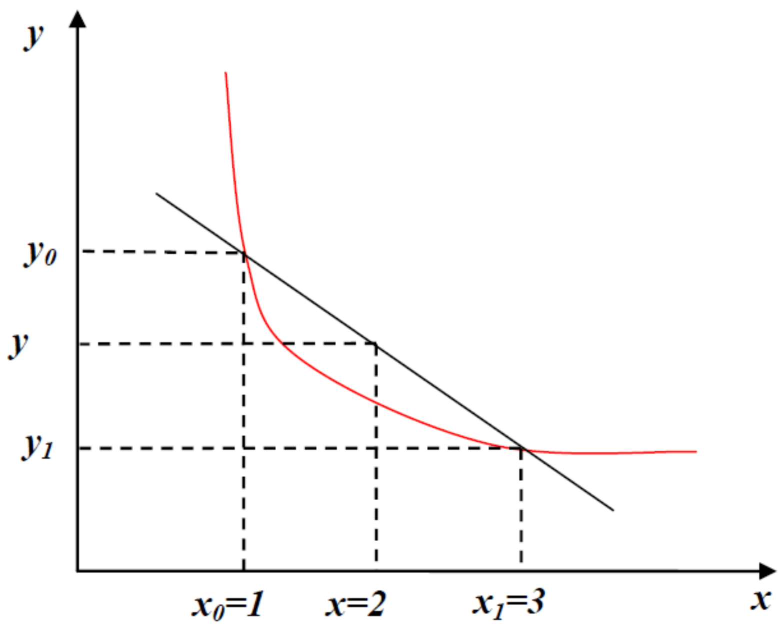

Figure 3

b) Formule générale

On appelle interpolant de Lagrange les polynômes L_i définis pour $i = 0, 1, \dots, n$ par $L_i = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Si on prend $P_x = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).\, f(x_i)$ alors $P_n(x) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$

c) Exercice

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$

$f(x_0) = -4, f(x_1) = 2, f(x_2) = 2$

Calculer le polynôme de Lagrange

d) Solution

On a 3 points donc le degré de polynôme est $n \leq 2$.

$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x).\, f(x_i)$

$=L_0(x).\, f(x_0) + L_1(x).\, f(x_1) + L_2(x).\, f(x_2)$

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2 + 2x$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$

Donc

$P_2(x) = (\frac{x^2-3x+2}{2})(-4) + (-x^2 + 2x)(2) + (\frac{x^2-x}{2})(2) P_2(x) = -2x^2 + 6x - 4 - 2x^2 + 4x + x^2 - x$

$P_2(x) = -3x^2 + 9x - 4$

3.2. Polynôme de Newton

a) Introduction

On appelle interpolant de Newton le polynôme $P_n(x)$ donnée par :

$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

L'aspect intéressant de cette formule apparaît lorsqu'on essaie de déterminer les $(n+1)$ coefficients C_i , de telle sorte que$P_n(x)$passe par les $(n+1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$.

b) Calcul des coefficients

Pour calculer les coefficients C_i, on utilise les différences divisées.

On définit les différences divisées d'ordre$i$ de f au point x_i comme suit :

$C_0 = \delta[f(x_0] = f(x_0)$

$C_1 = \delta[f(x_0, f(x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$C_i = \delta[f(x_0, f(x_1, \dots, f(x_i)]$ pour $i \geq 2$

Pour calculer les différences divisées on peut construire le tableau suivant :

i	x_i	$f(x_i)$	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
0	x_0	$f(x_0)$ C_0	C_1 $\delta[f(x_0), f(x_1)]$	C_2 $\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2)]$	C_3 $\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)]$
1	x_1	$f(x_1)$	$\delta[f(x_1), f(x_2)]$	$\delta[f(x_1), f(x_2), f(x_3)]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$\delta[f(x_2), f(x_3)]$		
3	x_3	$f(x_3)$			
n-2	x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	$\delta[f(x_{n-2}), f(x_{n-1})]$		$\delta[f(x_{n-3}), f(x_{n-2}), f(x_{n-1}), f(x_n)]$
n-1	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$\delta[f(x_{n-1}), f(x_n)]$	$\delta[f(x_{n-2}), f(x_{n-1}), f(x_n)]$	
n	x_n	$f(x_n)$			

c) Exercice

Trouver le polynôme de Newton qui passe par les points suivants :

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$

$f(x_0) = 1, f(x_1) = 4, f(x_2) = 8, f(x_3) = 14$

d) Solution

On a 4 points donc le degré de polynôme est 3

$P_3(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

On construire le tableau pour calcule les coefficients

i	x_i	$f(x_i)$	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
0	$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$ C_0	C_1 $\delta[f(x_0), f(x_1)] = 3$	C_2 $\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2)] = \frac{1}{2}$	C_3 $\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)] = \frac{1}{6}$
1	$x_1 = 1$	$f(x_1) = 4$	$\delta[f(x_1), f(x_2)] = 4$	$\delta[f(x_1), f(x_2), f(x_3)] = 1$	
2	$x_2 = 2$	$f(x_2) = 8$	$\delta[f(x_2), f(x_3)] = 6$		
3	$x_3 = 3$	$f(x_3) = 14$			

$P_3(x) = 1 + 3(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1) + \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1)(x - 2)$

$P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{17}{6}x + 1$

Bibliographie

K. MEBARKI , Analyse Numérique, Cours, 2éme année licence mathématiques , Université Abderrahmane Mira de Béjaia.

A. Boutayeb , M. Derouich , M. Lamlili et W. Boutayeb , Analyse Numérique : SMA-SMI S4.

P. GOATIN , Analyse Numérique , Université du Sud Toulon-Var ISITV - 1ère année.

Dr BOUSSOUFI Mustapha , Méthodes Numériques , Université des sciences et de technologie MOHAMED BOUDIAF D'oran - Conforme au programme de la 2eme année licence.