# Cours Méthodes Numériques

Dr. Safia RASLAIN Centre Universitaire Abd elhafid boussouf-Mila

Institut des Sciences et de Technologie

Département EM-GM

Email: s.raslain@centre-univ-mila.dz

1.0 Mars 2024

Dr. Safia RASLAIN

# Table des matières

**I - Chapitre 1 : Méthodes de résolution des équations non linéaires** **4**

1. Introduction .......... 4
2. Objectifs .......... 4
3. Les méthodes utilisées .......... 5
   - 3.1. Méthode de la bissection (dichotomie) .......... 5
   - 3.2. Méthode du point fixe (approximations successives) .......... 6
   - 3.3. Méthode de Newton-Raphson .......... 7

**Bibliographie** **9**

# Chapitre 1 : Méthodes de résolution des équations non linéaires

## 1. Introduction

Dans la pratique, la plupart des problèmes se ramenant à la résolution d'une équation de la forme $f(x) = 0$ La résolution de cette équation dépend de la classe à laquelle appartient la fonction $f$($f$ est un polynôme de degré $n \geq 3$ ou l'expression $f$ est complexe). Les méthodes classiques de résolution ne permettent pas de résoudre de tels problèmes, on fait donc appel aux techniques des méthodes numériques. Les méthodes proposées sont : la méthode de la bissection, approximations successives et de Newton-Raphson.

## 2. Objectifs

*Ce chapitre vise à :*

- Identifier les différentes méthodes numériques pour résoudre les équations non linéaires, telles que la méthode de Newton-Raphson, la méthode de la bissection et la méthode du point fixe.
- Expliquer les principes sous-jacents de chaque méthode et les conditions de convergence.
- Résoudre des équations non linéaires simples à l'aide des méthodes apprises.
- Comparer les méthodes en termes de vitesse de convergence et de précision.
- Proposer une stratégie pour choisir la méthode la plus appropriée selon les spécificités du problème.
- Évaluer l'efficacité des solutions obtenues et justifier le choix des méthodes utilisées.

# 3. Les méthodes utilisées

## 3.1. Méthode de la bissection (dichotomie)

### a) Introduction

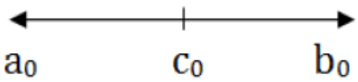
Le but de cette méthode est de construire une suite d'intervalle de plus en plus petites contenants une racine séparée de $f(x) = 0$.

### b) Principe de la méthode

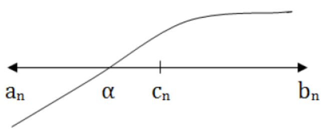
La méthode de dichotomie est basée sur le théorème de la valeur intermédiaire Soit $f(x) = 0$ ,αune racines séparée de $f(x)$ dans $[a, b]$ .

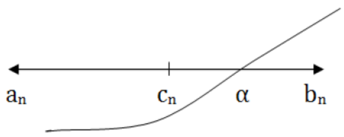
1- On pose $[a, b] = [a_0, b_0]$, on divise $[a_0, b_0]$ en deux on obtient $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$

Si $f(a_0)f(c_0)$<0 Alors $I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, c_0]$ Si non $I_1 = [c_0, b_0]$




et ainsi de suite on construit la suite d'intervalles$I_n = [c_n, b_n]$ et donc $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ Si $f(a_n)f(c_n)$<0 Alors $I_{n+1} = [a_n, b_n]$ Si non $I_{n+1} = [c_n, b_n]$




2- On prend comme approximation de α la valeur $c_n$ en utilisant $n$ itérations. Plus loin, on verra comment déterminer le nombre d'itération nécessaire$n$ en se donnant une erreur d'approximation ε telle que $|c_n - \alpha| \leq \varepsilon$

### c) Test d'arrêt

$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$ D'où α est racine de $f(x) = 0$ donc $c_n - \alpha \leq \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$ Si on désire de calculer le nombre d'itération suffisante $n$ pour approcher α à ε , on procède comme suit : $c_n - \alpha \leq \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \rightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{b_0-a_0}{2\varepsilon}\right)}{ln2}$ Il suffit de prendre $n = \frac{ln\left(\frac{b_0-a_0}{2\varepsilon}\right)}{ln2} + 1$

### d) Exercice

Soit la fonction $f(x) = x - 0.2sin(x) - 0.5$ Calculer la valeur approchée par la méthode de bissection avec $\varepsilon = 0,5.10^{-1}$ dans$[0, 2]$.

### e) Solution

On calcule le nombre d'itérations suffisants : $n \geq \frac{ln\left(\frac{b_0-a_0}{2\varepsilon}\right)}{ln2} \rightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{2-0}{2.0,5.10^{-1}}\right)}{ln2} \rightarrow n \geq 4,32 \rightarrow n = 5$

| n | $a_n$ | $b_n$ | $c_n$ | $f(a_n)$ | $f(c_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 1 | - | + |
| 1 | 0 | 1 | 0.5 | - | - |
| 2 | 0.5 | 1 | 0.75 | - | + |
| 3 | 0.5 | 0.75 | 0.625 | - | + |
| 4 | 0.5 | 0.625 | 0.5625 | - | - |
| 5 | 0.5625 | 0.625 | 0.5938 | - | - |

## 3.2. Méthode du point fixe (approximations successives)

### a) Introduction

Soit $g$ une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, le point qui vérifie $x = g(x)$ est dit point fixe de la fonction $g$ avec $x \in [a, b]$

### b) Principe de la méthode

Le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$, pour chercher le point fixe $x$ de la fonction $g(x)$ on crée la suite : $x_{n+1} = g(x_n)(n = 1, 2, 3, \dots)$, avec une valeur initiale$x_0$ donnée La Méthode des approximations successives utilise une procédure itérative simple On démarre de$x_0$, on calcule $x_1 = g(x_0)$ ensuite $x_2 = g(x_1) \dots x_{n+1} = g(x_n)$ Le problème principal est de savoir si la suite des mesures$x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ converge vers la solution $x$ de $g(x)$

***Exemple*** **:**

Écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ si $f(x) = lnx - x^2 + 2$ On peut écrire

$x = g_1(x) = lnx - x^2 + 2 + x$

$x = g_2(x) = e^{x^2-2}$

$x = g_3(x) = \sqrt{lnx + 2}$

Pour pouvoir choisir la forme de $g$ adéquate pour le calcul, un critère de convergence de cette méthode doit être vérifié.

### c) Critère de convergence

Soit $g$ une fonction dérivable définie sur l'intervalle$[a, b]$ tel que $|\grave{g}(x)| \leq k < 1 \forall x \in [a, b]$ Le processus itératif $x_{n+1} = g(x_n)(n = 1, 2, \dots)$ converge indépendamment de la valeur de$x_0$ vers l'unique point fixe $x$ de $g(x)$. Si plusieurs formes de $g$ vérifient cette condition, on aura plusieurs valeurs de$k$ . On choisit celle avec la valeur minimale de$k$ .

En pratique, la valeur de $k$ est : $k = max_{x \in [a,b]} |\grave{g}(x)|$

### d) Test d'arrêt

On peut arrêter les calcules lorsque la différence absolue entre deux itérations successives est inférieure à une certaine précision ε donnée.

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

### e) Exercice

trouver la première racine de l'équation $f(x) = x^2 + 3e^x - 12$ qui appartient à $[1, 2]$ avec une précision $\varepsilon = 0,01$

### f) Solution

On écrit cette fonction sous la forme $x = g(x)$ . On peut écrire :

$x = g_1(x) = x^2 + 3e^x - 12 + x$

$x = g_2(x) = \sqrt{12 - 3e^x}$

$x = g_3(x) = ln\frac{12-x^2}{3}$

Vérifions la condition de convergence pour la fonction $g_3(x)$

$k = max_{x \in [a,b]} |\grave{g}(x)|$

$k_3 = max_{x\in[1,2]}|\grave{g}_3(x)| = max_{x\in[1,2]}\left|\frac{-2x}{12-x^2}\right|$

On a

$\grave{g}_3(1) = -0.181$

$\grave{g}_3(2) = -0.5$ Donc

$k_3 = max_{x\in[1,2]}|\grave{g}_3(x)| = 0.5 < 1$, cette forme converge.

Donc on écrit : $x_{n+1} = g_3(x_n) = ln\frac{12-x^2}{3}(n = 1, 2...)$

La valeur initiale $x_0 = 1.5$ (le milieu de l'intervalle donné)

| n | $x_i$ | $\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.179 | 0.321 |
| 1 | 1.263 | 0.084 |
| 2 | 1.244 | 0.019 |
| 3 | 1.248 | 0.009 |

$|x_4 - x_3| = 0.009 < 0.01$, la solution est $x_4 = 1.248$

Pour voir la vidéo cliquer ici[1]

## 3.3. Méthode de Newton-Raphson

### a) Introduction

La méthode de Newton est utilisée pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ sous les contions de convergence suivantes :

1- $f(a)f(b) < 0$

2- La fonction $f$ est deux fois dérivable, $f'(x)$ et $f''(x)$

3- Si $x_0$ est une solution de départ : $f(x_0)f''(x_0) > 0$

### b) Procédure de calcul

D'après l'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point $(x_0, f(x_0))$ donnée par $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ Dans

la figure 1 on prend $x_0 = b$. le point $x_1$ constitue une première approximation de $\alpha$ alors:

$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, k = 1, ... n$

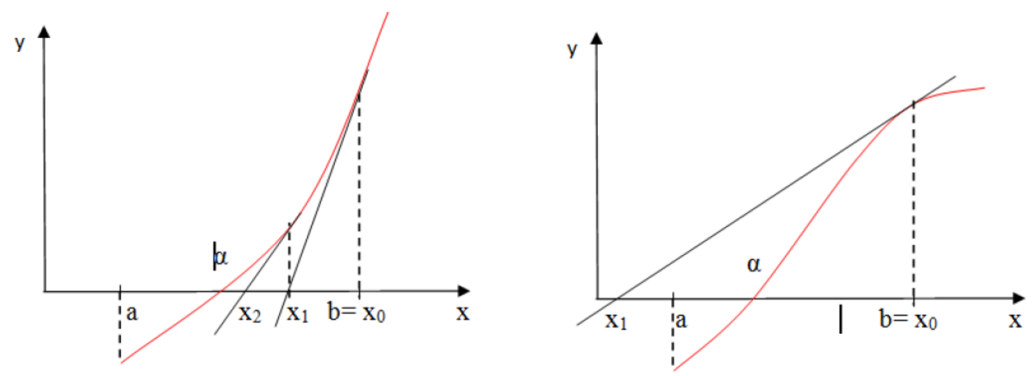



*Figure 2: Convergence et divergence*

***Remarque*** **:**

On constate que le choix de la condition initial $x_0$peut influencer sur la convergence de la méthode

# Bibliographie

K. MEBARKI , Analyse Numérique, Cours, 2éme année licence mathématiques , Université Abderrahmane Mira de Béjaia.

A. Boutayeb , M. Derouich , M. Lamlili et W. Boutayeb , Analyse Numérique : SMA-SMI S4.

P. GOATIN , Analyse Numérique , Université du Sud Toulon-Var ISITV - 1ère année.

Dr BOUSSOUFI Mustapha , Méthodes Numériques , Université des sciences et de technologie MOHAMED BOUDIAF D'oran - Conforme au programme de la 2eme année licence.

1. Méthode de point fixe -partie theorique - https://www.youtube.com/watch?v=a1cJNdlZgDM&ab_channel=doit%21