Abdelhafid Boussouf University Center- Mila
Institute of Sciences and Technology
Module: Analysis 2

Academic Year: 2023/2024
First Year Engineering
Semester 2

Tutorial exercises set 1: Analysis 2

Exercise 01:

From the following functions (as $x \to 0$), what are those of the same order as x, and also of higher order and lower order than x:

من بين الدوال التالية (لما $x \to 0$) ما هي تلك التي لها نفس الرتبة مع x ، و أيضا التي لها رتبة أعلى و رتبة أدنى من x :

1) x^2 2) $\sqrt{x(1-x)}$ 3) $\sin 3x$ 4) $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}$ 5) xe^{2x}

Exercise 02:

From the following infinitesimal functions, what are those which equivalent to x as $x \to 0$:

من بين الدوال المتناهية في الصغر التالية، ما هي تلك التي تكافئ x لما $x \to 0$:

1) $2\sin x$ 2) $\frac{1}{2}\tan 2x$ 3) $x-3x^2$ 4) $\sqrt{2x^2+x^3}$ 5) $\ln(1+x)$ 6) x^3+3x^4

Exercise 03:

Check that, the infinitesimal functions $1-x$ and $1-\sqrt[3]{x}$ are of the same order. Are they equivalent?

إفحص إن كانت الدالتان $1-x$ و $1-\sqrt[3]{x}$ عند نفس الرتبة. هل هما متكافئتان؟

Exercise 04:

Using equivalent functions, calculate the following limits:

باستعمال الدوال المتكافئة، أحسب النهايات التالية:

1. $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{\sin(2x)}$,
2. $l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2(x))}{\tan(\frac{x}{2})}$,
3. $l_3 = \lim\limits_{x\to \pi/2} e^{\frac{1}{2x-\pi}\ln(\sin(x))}$,
4. $l_4 = \lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,
5. $l_5 = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercise 05:

- Expand, in powers of $x-2$, the polynomial $x^4-5x^3+5x^2+x+2$.

⋆ أنشر، بدلالة قوى $x-2$ ، كثير الحدود $x^4-5x^3+5x^2+x+2$.

- Expand, in powers of $x+1$, the polynomial $x^5+2x^4-x^2+x+1$.

⋆ أنشر، بدلالة قوى $x+1$ ، كثير الحدود $x^5+2x^4-x^2+x+1$.

Exercise 06:

Give Taylor's formula for the function $f(x)=\sqrt{x}$ when $a=1$, $n=3$.

أعطي صيغة تايلر للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ لما $a=1$ ، $n=3$.

Exercise 07:

1. Give the Maclaurin formula for the function $f(x)=\sqrt{1+x}$ when $n=2$.

1. أعطي صيغة ماكلورين من أجل الدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ لما $n=2$.

2. Give the error of the approximation $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ when $x=0.2$.

2. أعطي قيمة الخطأ للتقريب $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ لما $x=0.2$.

Exercise 08:

1. Show that (بين أن)

$$\sin x=\sin a+(\cos a)(x-a)-\frac{(\sin a)(x-a)^2}{2!}-\frac{(\cos\xi)(x-a)^3}{3!}$$

where $a<\xi<x$.

2. Evaluate $\sin 49^o$ and give the error of the approximation.

2. أعطي قيمة $\sin 49^o$ و الخطأ في التقريب.

Exercise 09:

Write the Maclaurin series expansion of $e^x\sin x$.

Exercise 10:

1. (a) Using the Maclaurin formula of order n, show that for all $x\geq 0$:

⋆ باستعمال صيغة ماكلورين ذات الرتبة n ، بين أنه من أجل كل $x\geq 0$:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\leq e^x$$

(b) Using the Maclaurin formula of order 2, show that:

⋆ باستعمال صيغة ماكلورين ذات الرتبة 2 ، بين أن:

$$\frac{8}{3}<e<3$$

(c) Conclude that:(استنتج أن)

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$$

2. Using the Taylor formula, show that:

باستعمال صيغة تايلر، بين أنه:

(a) For all $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

(b) For all $x > 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

.

Exercise 11:

The magnetic field strength H of a bar magnet at a point P on the axis at a distance x from its center O is given by:

شدة الحقل المغناطيسي H لمغناطيس عند نقطة P تقع على مسافة x من مركز المغناطيس O ، تعطى بـ

$$H = \frac{M}{2l}\left(\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{(x+l)^2}\right)$$

where $2l$ is the length of the magnet and M is its dipole moment. Show that if $l << x$ then $H \approx \frac{2M}{x^3}$.

حيث $2l$ يمثل طول المغناطيس و M هو عزم ثنائي القطب الخاص به. بين أنه إذا كان $l << x$ فإن $H \approx \frac{2M}{x^3}$.

Exercise 12:

Using Taylor's formula, find the following limits:

(a) $l_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$ (b) $l_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$ (c) $l_3 = \dfrac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}$

(d) $l_4 = \lim\limits_{x \to 0} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$ (e) $l_5 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cot x}{x}\right)$ (f) $l_6 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$

Exercise 13:

Find the Taylor expansion of the following quotients of functions:

$$f_1 = \frac{1}{1-x} \qquad f_1 = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1} \qquad f_2 = \frac{e^x}{x+e^x} \qquad f_2 = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Exercise 14:

Let f be a real-valued function of the variable x defined by

$$f(x) = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2-1}$$

- Determine, as x tends towards $-\infty$, the asymptote of f.
- Determine the position of the function f relative to the asymptote.

لتكن f دالة متغير حقيقي x معرفة بـ

$$f(x) = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2-1}$$

* عين، عندما يؤول x نحو $-\infty$ ، الخط المقارب لـ f .
* عين وضعية الدالة f بالنسبة إلى الخط المقارب.

Exercise 15:

Find the numbers a and b such that the function f defined by

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

tends to infinity near zero with the highest order possible. Then find its main part.

أوجد العددين a و b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

لا متناهية في الصغر في جوار الصفر، برتبة أعلى ما يمكن. أوجد عندئذ جزءها الرئيسي.

Exercise 15: