

# Résistance Des Matériaux (R.D.M)

Medjaldi Farida

Mai 2024



# Table des matières

<b>Objectifs</b>	<b>3</b>
<b>I - Introduction et généralités</b>	<b>4</b>
1. Objectifs spécifiques .....	4
2. buts et hypothèses .....	4
3. Définition d'une poutre .....	4
4. Hypothèses .....	5
5. Loi fondamentale de l'équilibre .....	5
6. Charges appliquées (forces extérieures) .....	6
7. Les réactions .....	7
7.1. L'appui simple .....	7
7.2. L'appui double .....	8
7.3. L'encastrement .....	8
8. Torseur de cohésion ou efforts de cohésion (efforts intérieurs) .....	9
8.1. Définition .....	9
8.2. Composition du torseur de cohésion .....	10
8.3. Cas particuliers du torseur de cohésion .....	11
8.4. Diagrammes .....	11
9. Application .....	11
<b>Abréviations</b>	<b>13</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>14</b>

# Objectifs

A la fin de ce cours, l'apprenant sera capable de :

- S'entraîner aux calculs et manipuler des équations un peu plus complexes,
- identifier les différents types de sollicitation (traction ; compression ; cisaillement ; flexion et torsion)
- Investiguer adéquatement pour une meilleure conception basée sur des critères.
- Dimensionner tous types d'éléments de structures isostatiques simples réalisés en acier.
- évaluer les contraintes et les déformations élastiques
- Vérifier la résistance des structures soumises aux sollicitations externes
- Réaliser des structures stables, résistantes et économiques.
  - appliquer la loi de comportement élastique

# I Introduction et généralités

## 1. Objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- Appréhender les hypothèses de la résistance des matériaux et de l'élasticité.
- Identifier les liaisons mécaniques.
- Reconnaître les actions extérieures.
- Comprendre la notion du torseur cohésion.

## 2. buts et hypothèses

En statique nous étudions l'équilibre de systèmes supposés indéformables, sans se préoccuper de l'importance des actions mécaniques auxquels ils étaient soumis or, en réalité, nous savons que les systèmes ne peuvent supporter en toute sécurité que des actions limitées sous peine de se déformer dangereusement ou même de rompre. La science qui permet d'étudier la résistance et les déformations des structures est appelée : La résistance des matériaux (RDM). Outil de l'ingénieur et du technicien c'est une science qui est âgée de 400 ans environ ; Galilée, Hooke, Bernoulli, Coulomb et Navier en furent les fondateurs principaux.

La RDM poursuit trois buts essentiels :

- La connaissance des caractéristiques des matériaux,
- L'étude de la résistance des pièces et des structures,
- L'étude des déformations des pièces et des structures.

La résistance des matériaux est un processus de fabrication entre les étapes de conception et de réalisation d'une pièce. Cette conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

La RDM est couramment utilisée dans de différents domaines d'applications tels que :

- Génie mécanique (piston, essieu, Jante, tambour, .....).
- Génie maritime (piston, bielle, .....).
- Génie civil (bâtiments, turbine, structures métalliques...).
- Aéronautique ( aile).
- La physique du solide (acier, cuivre .....).
- Génie électrique (câbles, pylônes, centrales, .....).

## 3. Définition d'une poutre

On appelle poutre le solide engendré par une surface (S) (figure1.1) dont le centre de gravité décrit une courbe appelée fibre moyenne La poutre est dite :

- Plane si sa fibre moyenne est totalement contenue dans un plan.
- Gauche si sa fibre moyenne suit une courbe gauche.
- Droite si sa fibre moyenne est une droite.

- A section constante ou variable selon que l'aire  $S$  est constante ou variable le long de la fibre moyenne (figure I.1)

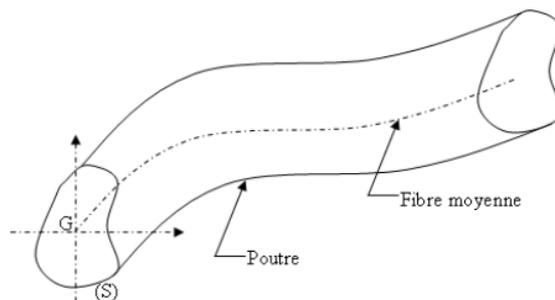


Figure I.1

## 4. Hypothèses

La RDM impose pour son utilisation correcte des hypothèses simplificatrices concernant la géométrie et les matériaux des objets étudiés.

Ces hypothèses permettent de réduire la complexité des développements mathématiques tout en conservant une certaine généralité.

Ces hypothèses de base concernent la continuité, l'homogénéité, l'isotropie, les déformations et les forces internes du matériau étudié.

- Homogénéité, isotropie et continuité du matériau : on suppose que le matériau a les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions et que le matériau est assimilé à un milieu continu (pas de défaut macroscopique tels que fissures, criques).
- Elasticité linéaire du matériau : On suppose qu'en chaque point, les contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.
- Déformations : Les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.
- Forces internes : Aucune force interne n'agit dans le matériau avant l'application des charges externes (état initial).

En plus des hypothèses citées, les solides étudiés doivent vérifier les hypothèses supplémentaires suivantes :

- Hypothèses de Navier-Bernoulli Les sections droites planes le long de la fibre moyenne doivent rester planes après déformation.
- Principe de Saint-Venant Les résultats obtenus par un calcul  $RDM^*$  ne s'appliquent qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des forces concentrées et des liaisons.
- Hypothèses des petites déformations Les déformations doivent être faibles devant les dimensions de la poutre.

## 5. Loi fondamentale de l'équilibre

Pour qu'un corps solide indéformable soit en équilibre sous l'action de plusieurs forces, il faut et il suffit que :

- La somme géométrique de toutes les forces soit nulle  $\sum \vec{F} = 0$  (équation vectorielle).
- Le moment résultant par rapport à un point quelconque soit nul  $\sum M/pt = 0$ .

Finalement, les conditions d'équilibre du solide s'écrivent analytiquement comme suit :

$$\sum F/x = 0.$$

$$\sum F/y = 0.$$

$$\sum MF/o = 0.$$

Ce sont les équations universelles fondamentales d'équilibre.

## 6. Charges appliquées (forces extérieures)

\* Forces extérieures : On appelle forces extérieures toutes forces appliquées sur un système donné.

\* Définition statique : une force est une cause capable de maintenir un corps au repos ou de le déformer.

\* Définition dynamique : une force est une cause capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps.

Une poutre est soumise à des charges extérieures qui peuvent être :

- Concentrées en un point : elles peuvent être centrées (fig.I.2-a) ou excentrées (fig.I.2- b).
- Réparties sur un tronçon (fig.I.2-c) ou sur toute la longueur de la poutre (fig.I.2-d).
- Des moments (fig.I.2-e).
- La charge répartie  $q$  se mesure par unité de force sur unité de longueur (t/m, kN/m, etc).
- Dans les calculs, la charge répartie  $q$  est remplacée par sa résultante  $R^{\rightarrow}$  qui est égale numériquement à l'aire de son diagramme et son point d'application se trouve au niveau du centre de gravité de celui-ci.
- Pour une charge uniformément répartie, le diagramme est rectangulaire, sa résultante  $R^{\rightarrow}$  est égale à l'aire du rectangle ; soit :

$R^{\rightarrow} = q \times a$  et son point d'application se trouve à  $a/2$  (centre de gravité du rectangle).

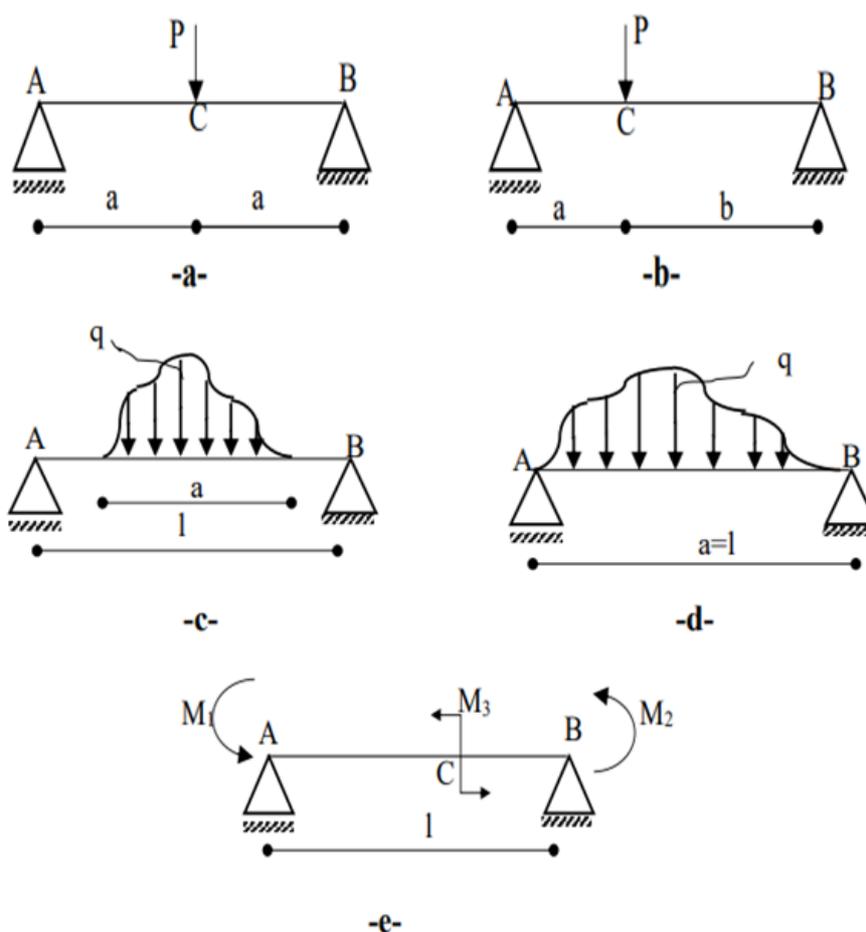


figure 1.2

N.B : Le point C est appelé point d'application de la force concentrée (P).

$M_3$  est un moment concentré en C et tourne dans le sens trigonométrique (sens antihoraire).

## 7. Les réactions

Les poutres étudiées sont reliées à l'extérieur par des liaisons appelées appuis, au droit de ses appuis apparaissent des réactions. Les réactions et les charges exercées constituent un système de forces en équilibre. La classification des appuis se fait d'après le nombre de degrés de liberté ( $ddl^*$ ) (c'est-à-dire les possibilités de mouvement) qu'ils laissent à la poutre et d'après la nature des réactions qu'ils peuvent exercer sur la poutre. En plan, on distingue trois types d'appuis :

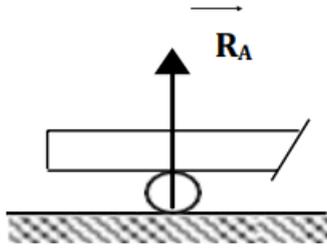
### 7.1. L'appui simple

L'appui simple se caractérise par : 2 degrés de liberté et 1 composante de réaction. Les deux degrés de liberté sont:

- La rotation autour de l'appui,
- La translation parallèlement au support de l'appui.

La réaction est connue par son point d'application (point de contact du système avec l'appui) et par sa direction (elle est perpendiculaire au support).

Seule l'intensité reste à déterminer.



**Appui simple A**

*Appui simple*

### 7.2. L'appui double

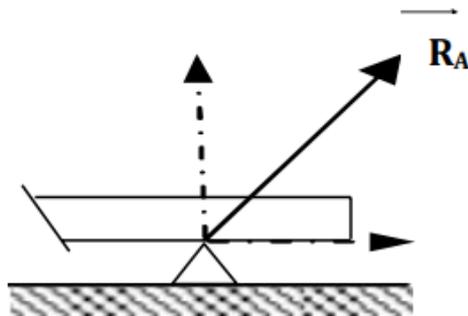
L'appui double ou articulation se caractérise par : 1 degré de liberté et deux composantes de réaction.

Le degré de liberté est:

- La rotation autour de l'appui,

La réaction de l'appui est connue uniquement par son point d'application, le point de contact du système avec l'appui.

La réaction est décomposée suivant deux directions perpendiculaires et les deux composantes sont à déterminer.

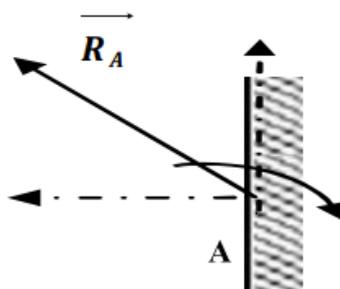


*appui double*

### 7.3. L'encastrement

L'encastrement est caractérisé par : aucun degré de liberté et trois composantes de réaction :

- Deux composantes suivant deux directions perpendiculaires et passant par A,
- Un couple appliqué en A



*Encastrement*

## 8. Tenseur de cohésion ou efforts de cohésion (efforts intérieurs)

### 8.1. Définition

On appelle force intérieure tout effort se trouvant entre les particules d'un corps. Ces forces tendent à s'opposer aux éventuelles déformations du corps dues aux forces extérieures. En résistance des matériaux, les forces intérieures qui apparaissent suite à l'application de forces extérieures s'appellent efforts internes. On distingue les efforts internes suivants :

- Effort normal (N) : c'est la somme algébrique des projections sur la normale de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de la section considérée.
- Effort tranchant (T) : c'est la somme géométrique des projections, sur le plan de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de la section.
- Moment de torsion ( $M_t$ ) : c'est la somme géométrique des moments par rapport à la normale à la section au centre de gravité de toutes les forces extérieures situées d'un même côté.
- Moment de flexion ( $M_f$ ) : c'est la somme géométrique des projections, sur le plan de la section, des moments pris par rapport au centre de gravité des forces extérieures situées d'un même côté de la section

Considérons une poutre en équilibre sous l'effet d'efforts extérieurs.

Effectuons virtuellement une coupure dans cette poutre et analysons l'équilibre des deux tronçons obtenus.

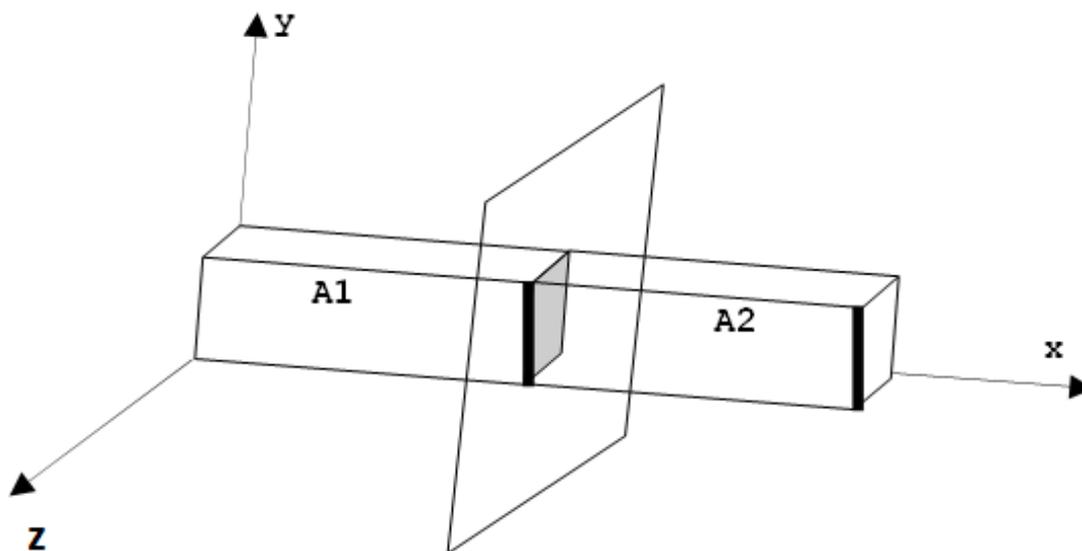


Figure I.3

Les tronçons A1 et A2 exercent l'un sur l'autre des actions qui maintiennent la cohésion entre les deux parties. Ces actions peuvent être représentées par un tenseur appelé tenseur des efforts intérieurs ou tenseur de cohésion

## 8.2. Composition du torseur de cohésion

La liaison entre le tronçon A1 et A2 est supposée parfaite elle est donc modélisé par un encastrement. Le torseur de cohésion prend alors la forme la plus générale:

$$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

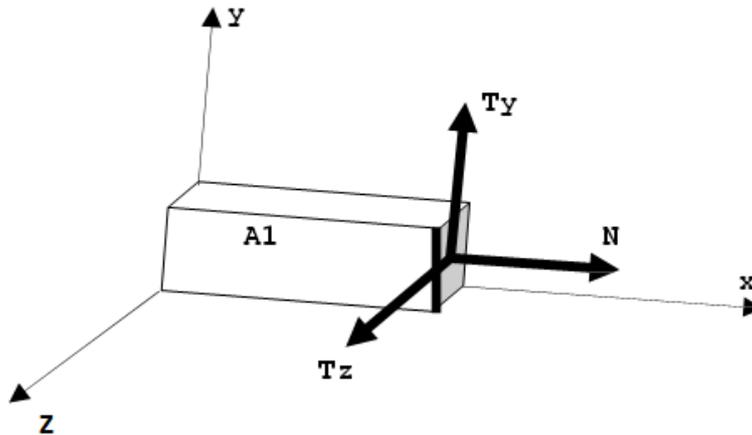


Figure I.4

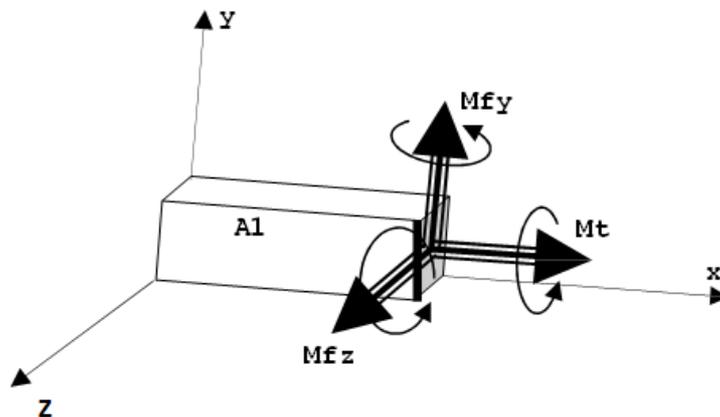


Figure I.5

**Avec :**

- N, effort normal : force de direction tangente à la courbe moyenne ;
- T, effort tranchant : force perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant un cisaillement:
  - o  $T_y$ : effort tranchant selon y,
  - o  $T_z$ : effort tranchant selon z ;
- $M_f$ , moment fléchissant : moment dont le vecteur est perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant une flexion :
  - o  $M_{fy}$  : moment fléchissant selon y,

o  $M_{fz}$  : moment fléchissant selon  $z$  ;

- $M_t$ , moment de torsion : son vecteur a pour direction  $x$ .

### 8.3. Cas particuliers du tenseur de cohésion

Dans la pratique, le tenseur de cohésion est plus simple car plusieurs de ses composantes sont nulles, on est alors en présence de sollicitations élémentaires qui seront traitées en détail dans les chapitres suivants et dont on présente ci-après un résumé.

Tenseur de cohésion	Nature des sollicitations	Valeurs des composantes			
		Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion
$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} \\ \tau_{ji} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Traction (N>0) Compression (N<0)	N?0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} \\ \tau_{ji} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	Cisaillement simple	N=0	$T_y ? 0$ ou/et $T_z ? 0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} \\ \tau_{ji} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Torsion simple	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t ? 0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} \\ \tau_{ji} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	Flexion pure	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy} ? 0$ ou/et $M_{fz} ? 0$

### 8.4. Diagrammes

Le tenseur de cohésion est modifié lorsque la coupure se déplace le long de la poutre. On étudie alors plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre : une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne) ou une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison. Le tracé des différentes valeurs prises par une composante du tenseur de cohésion le long de la ligne moyenne de la poutre en fonction de la position de la coupure est appelé diagramme. Le tracé des diagrammes permet de localiser les sections les plus sollicitées de la poutre et par conséquent de dimensionner la poutre pour résister aux efforts extérieurs, c'est l'un des objectifs de la RDM\*.

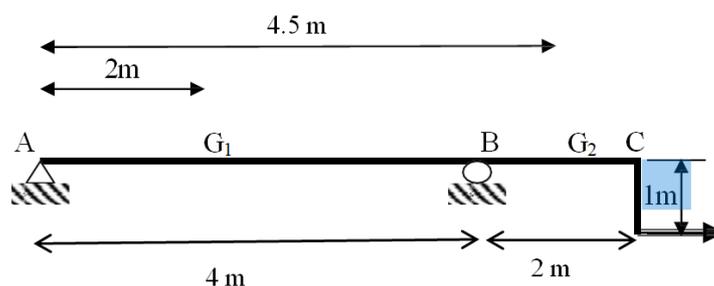
## 9. Application

Une poutre en appui simple en B et articulée en A supporte la force F en D.

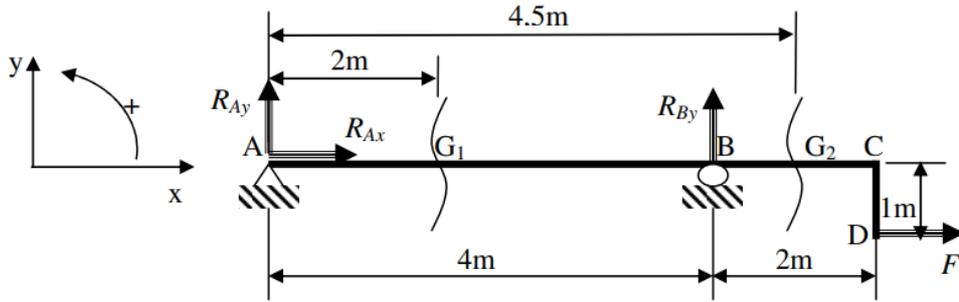
1) Calculer les réactions d'appui.

2) Calculer le tenseur de cohésion dans les sections droites G1.

On donne : F=5000N



**Correction**



1) Calcul des réactions d'appui.

Appliquons le principe fondamental de la statique à la poutre il en résulte :

$\sum F/x = 0 ; R_{Ax} + F = 0 ; R_{Ax} = -F = -5000N$  (le signe - veut dire que le sens de  $R_{Ax}$  est opposé à celui choisit)

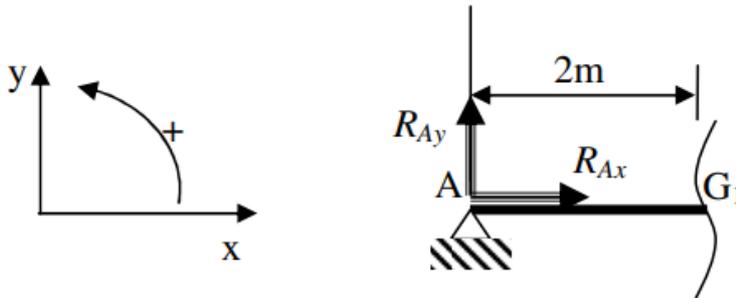
$\sum M/z(A) = 0 ; R_{By} (4) + F (1) = 0 ; R_{By} = -F/4 = -1250N$

$\sum M/z(B) = 0 ; -R_{Ay} (4) + F (1) = 0 ; R_{Ay} = F/4 = 1250N$

Verification

$\sum F/y = 0 ; R_{Ay} + R_{By} = 0 ; 1250 - 1250 = 0$  (condition vérifiée)

**2) Calcul des torseurs de cohésion dans les sections droites G1.**



Par définition on a :  $\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & M_x \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix}$

Ici on a considéré la partie de gauche donc :  $\{\tau_i\} = - \begin{Bmatrix} \sum F/x & \sum M/x \\ \sum F/y & \sum M/y \\ \sum F/z & \sum M/z \end{Bmatrix}$

$$\{\tau_i\}_{G1} = - \begin{Bmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} & 0 \\ 0 & -R_{Ay} \cdot (2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000N & 0 \\ -1250N & 0 \\ 0 & 2500Nm \end{Bmatrix}$$

# Abréviations

**ddl** : degré de liberté

**RDM** : Résistance Des Matériaux

# Bibliographie

G.PISSARENKI, A. Yakovlev, V. Matvéev. Aide mémoire de résistance des matériaux. Edition Mir-Moscou1975. Traduit du russe par M.SEGASAYO-Edidtions Mir 1979.

P.RANDOUR. Résistance des matériaux(catégorie technique). Haute Ecole Louvain en Hainaut 2013-2014

A.ANISSIMOV ; USTHB -Ecole Nationale Polytechnique. Calcul des barres dans les cas de sollicitation composée (Partie 1 de RDM II). Office des Publocations Universitaire Alger-1982.

I.BENAISSA. Polycopie de cours et exercices corriges de Résistance Des Matériau ; Université d'Oran 2019-2020

Zamila HARICHANE «Résistance Des Matériaux Cours, Exercices et Examens corrigés » July 2023