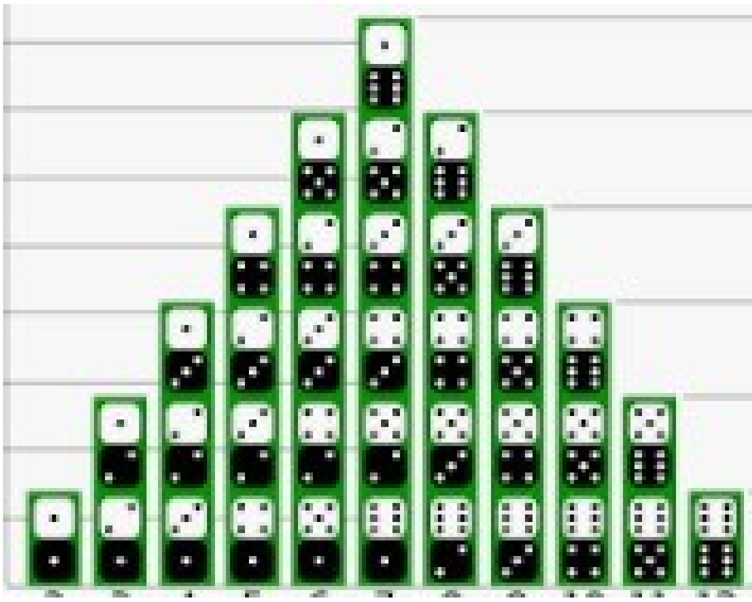
المحور الثاني

تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

مارس 2024

مريم قادري



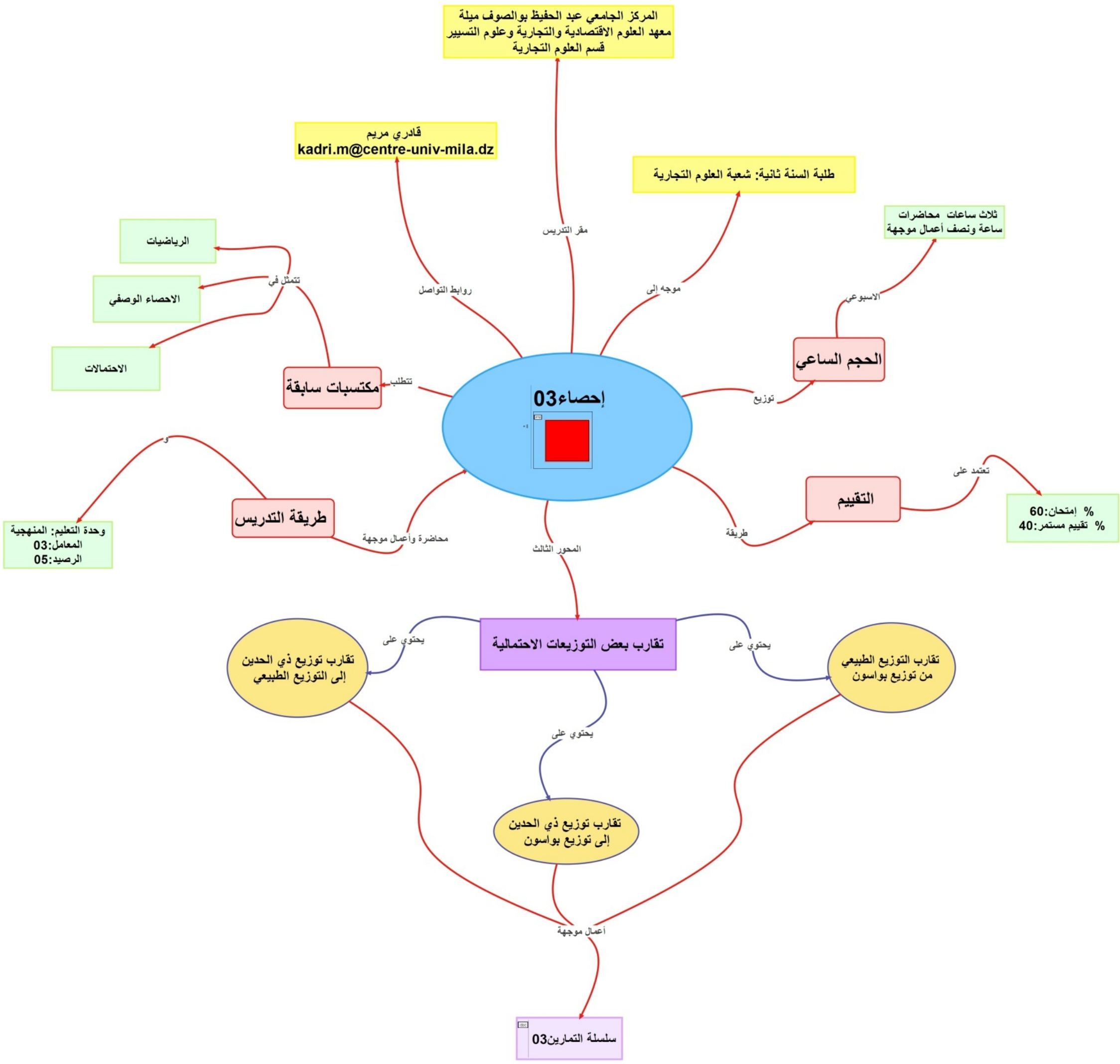
قائمة المحتويات

وحدة

من خلال هذا المحور يمكن للطالبة تحقيق جملة من أهداف هي:

- التعرف على المفاهيم والمصطلحات الأساسية المرتبطة بالتقارب بين التوزيعات الاحتمالية؛
- استعاب شروط التقارب بين التوزيعات الاحتمالية
- اكتساب القدرة على اختيار التقريب المناسب لحل مختلف المسائل

مقدمة



فرنسية

نتناول في هذا المحور بعض حالات التقارب الذي يحصل بين عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة ويقصد بالتقارب بين توزيعين (الثنائي والطبيعي مثلا) أن يعطي التوزيعان نتائج متقاربة بخصوص احتمال معين، مما يعني إمكانية استخدام توزيعين احتماليين وأحيانا أكثر لحساب احتمال معين.

ونتناول في ما يلي بعض حالات التقارب الذي يحصل بين عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة.

تقارب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

آ. نظرية:

حسب نظرية النهاية المركزية بصيغة موافر ولابلاس فإنه(1):[1][1]

اذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية X_n مستقلة ولكل منها توزيع برنولي $B(1,p)$ فإن التوزيع $Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ يتقارب من التوزيع الطبيعي $N(np, npq)$ كلما كان n كبير أي أن: $\lim_{n\to\infty}(np, npq)$

حيث:

μ=np

$\sigma^2=npq$

ب. شروط التقارب بين توزيع ذي الحدين و التوزيع الطبيعي

حسب نظرية النهاية المركزية السالفة الذكر في حالة n كبير يمكن اعتبار التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين) كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي، ويعطيان نتائج اكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر.

- حتى تكون n كبيرة بما فيه الكفاية، يجب ان تستوفي الشرطين التاليين:

$$np \geq 5$$
$$pq \geq 5$$

- عند توفر هذين الشرطين معا، يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي للإجابة على الأسئلة الاحتمالية المتعلقة بالتوزيع ذي الحدين.
- وحتى نتمكن من حساب الاحتمالات المتغيرة العشوائية X التي تتبع توزيع ذي الحدين، نقوم بتحويلها إلى متغيرة عشوائية أخرى Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري من خلال إجراء التحويل التالي:

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

- وبما أن التوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي مستمر، في حين أن توزيع ذي الحدين هو توزيع احتمالي متقطع، فإنه يجب علينا تطبيق مفهوم تصحيح الاستمرارية عند حساب الاحتمالات.

پ. تصحيح الاستمرارية عند الانتقال من توزيع متقطع إلى توزيع مستمر

عند تقريب توزيع احتمالي متقطع إلى توزيع احتمالي مستمر يجب تصحيح الاستمرارية،وذلك لانه سيتم الانتقال من متغيرة عشوائية متقطعة إلى متغيرة عشوائية مستمرة ،ويعني ذلك تحويل كل قيمة

للمتغير العشوائي الى مجال وذلك باضافة أو طرح 0.5 إلى قيمة المتغيرة المتقطعة .
الجدول التالي يوضح متى يجب علينا إضافة أو طرح 0.5 لقيمة ، بناء على نوع الاحتمال الذي تريد الحصول عليه.(2)[4][1]

باستخدام التوزيع الطبيعي مع تصحيح الاستمرارية	باستخدام توزيع منفصل (توزيع بواسون او توزيع ذي الحدين مثلا)
a+0.5 >X> a−0.5	X =a
X<a+0.5	X ≤ a
X<a−0.5	X<a
X >a−0.5	X ≥ a
X >a+0.5	X >a
a+0.5< X< a−0.5	a<X<b

فرنسية

مثال

نرمي قطعة نقدية 20 مرة. ليكن X عدد مرات الحصول على صورة. 

باستخدام نظرية موافر - لابلاس الحساب الاحتمال p(x=8)

الحل:

$$X \sim B(20{,}0.5)$$

أولا: نتأكد من أن **n** كبيرة بما فيه الكفاية، وذلك بالتحقق من الشرطين التاليين:

$$np \geq 5$$

$$pq \geq 5$$

np=10

nq=10

ومنه الشرطين محققين ويمكن استخدام التقريب الطبيعي

ثانيا:تحديد تصحيح الاستمرارية

بالرجوع الى الجدول اعلاه نجد القيمة x=8 يعبر عنها بالمجال (8.5، 7.5) وبالتالي يصبح الاحتمال المطلوب هو: $\star\ p(7.5 \leq X \leq 8.5)$

ثالثا: حساب المتوسط **μ**والتباين لتوزيع ذي الحدين

$$\mu = np = (20)(0.5) = 10$$

فرنسية

$$\sigma^2 = npq = (20)(0.5)(0.5) = 5$$

فرنسية

رابعا: تحديد الاحصاءة **Z**

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X - 10}{\sqrt{5}}$$

فرنسية

خامسا: حساب الاحتمال المطلوب

$$p(7.5 \leq X \leq 8.5) = p\left(\frac{7.5-10}{\sqrt{5}} \leq Z \leq \frac{8.5-10}{\sqrt{5}}\right) = p(-1.12 \leq Z \leq -6.67) = 0.12$$

فرنسية

II تقارب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون

آ. قاعدة التقارب بين توزيع ذي الحدين و توزيع بواسون :

يمكن استخدام التوزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين ويعتبر كتقريب جيد،إذا كان:

$n>20$ و $np<5$ و $nq<5$

فرنسية

مثال

10 % من إنتاج آلة ما يعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من انتاج هذه الآلة عشوائيا.

أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان.

الحل:

$$p(X=2)=\binom{2}{30}(0.1)^2(0.9)^{28}=0.22$$

فرنسية

لدينا: n>20

نحسب أولا قيمة المعلمةλ (معلمة بواسون) ثم الاحتمال المطلوب كمايلي:

$$\lambda=np=30(0.3)=3$$

فرنسية

$$p(X=2)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-3}=3^2\frac{e^{-3}}{2!}=0.22$$

فرنسية

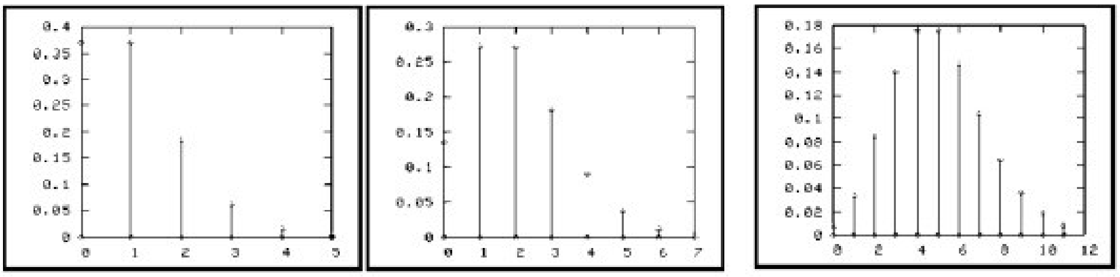
III تقارب التوزيع الطبيعي من التوزيع بواسون

آ. العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون:

عندما $\lambda \to \infty$ فإن التوزيعين الطبيعي وبواسون يعطيان نتائج متطابقة، ونكتب(3)[3][3][2]:

$$\lim_{\lambda \to \infty} p\left(a \le X - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b e^{\frac{z^2}{2}}\, dz$$

فرنسية



سلوك توزيع بواسون عند زيادة المعلمة من 1 إلى 2 إلى 5 (من اليسار إلى اليمين)

ب. قاعدة التقريب:

يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون إذا كان: **$\lambda > 20$**

تنبيه

بما أن التوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي مستمر، في حين أن توزيع بواسون هو توزيع احتمالي متقطع، فإنه يجب علينا تطبيق مفهوم تصحيح الاستمرارية عند حساب الاحتمالات.

مثال

إذا كان معدل عدد الحوادث في أحد المصانع هو 45 حادثا سنويا.

استخدم التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمال وقوع أكثر من 50 حادثا في السنة.

الحل:

$$\sigma^2 = \lambda = 45 \,;\, \mu = \lambda = 45 > 20$$

الشرط **$\lambda > 20$** محقق ومنه يمكننا استخدام التقريب الطبيعي في حساب الاحتمالات

ليكن X المتغير العشوائي للوحدات المعيبة

للحصول على الاحتمال المطلوب نقوم اولا بتصحيح الاستمرارية ويصبح الاحتمال المطلوب هو:

$$\sigma^2 = \lambda = 45 \,;\, \mu = \lambda = 45 > 20$$

فرنسية

$$p\left(X>50.5\right)=p\left(z>\frac{50.5-45}{\sqrt{45}}\right)=0.2061$$

فرنسية

انظرالفيديو 1 (*web*)"

الفيديو 1

IV

تمرين

[23 ص 1 حل رقم]

ماذا قصد بتقارب التوزيعات الاحتمالية؟

○	حساب احتمال معين بتوزيعين احتماليين فقط
○	حساب احتمال معين بتوزيعين احتماليين أو أكثر في ظل توفر شروط معينة

تمرين ٧

[23 ص 2 حل رقم]

في تجربة اختبار صلاحية دواء معين في الحد من فيروس كورونا في أيامها الأولى،اذا علمت ان احتمال صلاحيته 0.01،وقد تم اختيار عينة عشوائية حجمها 300 شخص مصاب بفيروس كورونا لتجريبه.

ماهو احتمال شفاء على الأقل 3 مرضى باستخدام تقريب بواسون؟

VI سلسلة تمارين محلولة

تمرين 1:

أذكر على الأقل 3 توزيعات احتمالية من الممكن أن يحدث التقارب بينها. وأذكر الشروط اللازمة لحدوث هذا التقارب.

الحل:

1.توزيع ذي الحدين مع التوزيع الطبيعي: و يستلزم توفر الشرطين التاليين: $pq \geq 5$ و $np \geq 5$

2.توزيع ذي الحديث مع توزيع بواسون: إذا توفر الشرطين $nq < 5$ و $np < 5$ و $n > 20$

3.قارب التوزيع الطبيعي من التوزيع بواسون: $\lambda > 20$

التمرين 2:

في تجربة اختبار صلاحية دواء معين في الحد من فيروس كورونا، إذا علمت أن احتمال صلاحيته هو 0.53 وقد تم اختيار عينة عشوائية حجمها 300 شخص مصاب بفيروس كورونا لتجريبه، المطلوب:

1. حدد نوع التوزيع المناسب
2. أحسب احتمال شفاء على الأقل 150 مريض
3. إن أمكن استخدم توزيعات أخرى لحساب احتمال شفاء على الأقل 150 مريض

الحل:

P=0,53; q=0,47; n=30

1- التوزيع المتناسب:

نحن أمام تجربة تحتمل نتيجتين النجاح (الدواء صالح) والفشل (الدواء غير صالح) وهذه التجربة ثم تكرارها 300 مرة اذن نحن أمام تجربة ذي الحدين.

$$N(np, npq)$$

فرنسية

$$X \sim b(300, 0.53)$$

فرنسية

$$p(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

فرنسية

$$p(X=x) = c_{300}^x (0.53)^x (0.47)^{300-x}$$

فرنسية

2- حساب احتمال شفاء 150 مريض على الأقل

$$p(X \geq 150) = p(x=150) + p(x=151) + p(x=152) + \ldots + p(x=300)$$

فرنسية

نلاحظ ان حساب الاحتمال صعب وبالتالي نلجأ الى حساب الاحتمال بطرق أخرى.

3- حساب احتمال شفاء 150 مريض على الأقل باستخدام توزيعات أخرى:

باستخدام التوزيع الطبيعي :

•التحقق من الشرطين: $pq \geq 5$ و $np \geq 5$

np =300(0.53)=159

nq=300(0.47)=141

•الشرطين محققين وبالتالي يمكن استخدام التقريب الطبيعي في حساب الاحتمال المطلوب

$$\sigma^2 = npq = 74.73$$

μ=np =159

•حساب Z المعيارية:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}=\frac{X-\mu}{\sqrt{74.73}}$$

فرنسية

•تصحيح الاستمرارية وحساب الاحتمال المطلوب:

$$P(X\geq 150)=p(X>149.5)=p(Z>\frac{149-159}{\sqrt{74.73}})=p(Z>-1.09)=1-p(Z\leq -1.09)=1-0.1378=0.8622$$

فرنسية

التمرين 4:

يصل زبائن مكاتب بريد الجزائر عشوائيا وبشكل مستقل (لا يؤثر وصول أحدهم على وصول الآخر). فإذا كان معدل الوصول هو 25 شخص في الدقيقة الواحدة.

1. حدد نوع التوزيع الاحتمالي المناسب للمتغير العشوائي X
2. بعد تحديد نوع التوزيع الاحتمالي المناسب، أحسب احتمال وصول 30 أشخاص في دقيقة واحدة.
3. أعد حساب الاحتمال في السؤال 2 باستخدام التقريب الطبيعي إن أمكن.
4. إن أمكن استخدم التقريب الطبيعي في حساب احتمال وصول على الأقل 30 شخص خلال 40 ثانية.

الحل:

1- التوزيع المناسب: هو توزيع بواسون

$$X\sim P(\lambda);X\sim P(25)$$

$$p(X=x)=\lambda^x\frac{e^{-\lambda}}{x!}$$

فرنسية

$$p(X=30)=25^{30}\frac{e^{-25}}{30!}=0.48$$

فرنسية

2- حساب احتمال وصول 30 شخص في دقيقة واحدة باستخدام التقريب الطبيعي:

•التحقق من الشرط : $\lambda>20$; λ=25 ومنه الشرط محقق

μ=λ =25

$$\sigma^2=\lambda=25$$

•حساب **Z** المعيارية:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}=\frac{X-25}{\sqrt{25}}$$

•تصحيح الاستمرارية وحساب الاحتمال المطلوب:

$$p(X=30)=(29.5<x<30.5)=p(\frac{29.5-25}{\sqrt{25}}<\frac{30.5-25}{\sqrt{25}})=\phi(1.1)-\phi(0.9)=0.0484$$

4-استخدام التقريب الطبيعي في حساب احتمال وصول على الأقل 30 شخص خلال 40 ثانية.

•نحسب λ الجديدة خلال 40 ثانية

•التحقق من الشرط: $\lambda>20$

λ=16.66

وهي اقل من 20 وبالتالي لا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي في حساب الاحتمال المطلوب.

خاتمة

من خلال هذه المحاور التي تم تقديمها في ايطار مقياس الاحصاء 3،حيث تضمنت ملخصات لاهم محتويات الدرس، كانت مسبوقة باختبارات للمكتسبات القبلية التي تسمح الطالب من استعاب المقرر، كما تم الحرص على تقديم محتويات الدرس بطريقة ملخصة وبسيطة مدعومة بأمثلة وتمارين محلولة بالتفصيل لتمكين الطالب من الفهم والاستعاب أكثر، كما تكسبه القدرة على حل محتلف التمارين حسب ما تتطلبه طبيعة المقياس، كما تم تقديم واجبات وتمارين إضافية من شأنها أن تمكن الطالب من ترسيخ كل ما تعلمه من خلال الدروس، كما تم تقديم اختبارات في نهاية كل محور تمكن الطالب من تقييم مدى استعابه للدروس،كم تم الحرص على تدعيم المحتوى بفديوهات ومراجع مختلفة تمكن الطالب من الرجوع اليها وقت الحاجة.

حل التمارين

< 1 (ص 15)

- ○ حساب احتمال معين بتوزيعين احتماليين فقط
- ◉ حساب احتمال معين بتوزيعين احتماليين أو أكثر في ظل توفر شروط معينة

< 2 (ص 17)

0.58

قاموس

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي (أو توزيع غاوس) يعرف بالمعلمين (المتوسط μ والتباين σ^2) وله دالة كثافة احتمالية .

المتغير (المتغيرة)

خاصية أو سمة يمكن أن تأخذ أكثر من قيمة مثل التحصيل، الذكاء، الوزن...

المعلمة **A parametrer**

قيمة احصائية تصف المجتمع المسحوب منه عينة الدراسة

توزيع ذي الحدين **Binomial Distribution**

توزيعات احتمالية لعدد حالات النجاح في تجارب Bernoulli لـ n المستقلة، حيث يكون لكل تجربة نتيجتين (النجاح -الفشل) ويكون احتمال نجاح أ هو نفسه بالنسبة لكل تجربة

معنى المختصرات

- B(1,p	توزيع برنولي بالمعلمة P
- f(x	دالة الكثافة Density Function
- N(np ;npq	التوزيع الطبيعي بالمعلمتين np و npq
- p	احتمال probability
- μ	المتوسط الحسابي
- v أو σ 2	Variance

مراجع

[1] العابد محمد، دروس ملخصة وتمارين محلولة في الاحتمالات (مقياس الاحصاء (2))، مطبوعة موجة لطلبة سنة اولى علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير،2018-2019

[2] جنيدي مراد، محاضرات في الاحصاء 3،مطبوعة موجهة للسنة الثانية شعبة علوم مالية ومحاسبة،كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة الجزائر،2020-2021

قائمة المراجع

[1] عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، نظرية التقدير (الاحصاء الاستدلالي (1))،مجموعة النيل العربية، 2000.

[2] بوعبد الله صالح، محاضرات الاحصاء الرياضي لطلبة كلية العلوم الاقتصادية،2005-2006

[3] بوعبد الله صالح مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي دروس وتمارين، 2006.

[4] عبد الحميد ربيع غيطان،نظرية الاحتمالات، الجزء الثاني،دار الكتب الأكاديمية، مصر، 2004،ط 1

[5] عدنان بن ماجد عبد الرحمان بري وآخرون، أساسيات طرق التحليل الاحصائي،جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية،1998

[5] بوزنورة أسماء،الاحصاء (2)-دروس وتمارين،مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك،جامعة الجزائر 3-دالي ابراهيم،السنة الجامعية 2022-2023.

[6] جلال مصطفى الصياد، نظرية الاحتمالات، ط 6،دار حافظ للنشر والتوزيع،جدة،2008

[7] عدنان بن ماجد الرحمان بري وأخرون،أساسيات طرق التحليل الاحصائي،جامعة الملك سعود،المملكة العربية السعودية،1998.