المحور الأول

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

مارس 2024

مريم قادري

قائمة المحتويات

وحدة

الأهداف العامة لمقياس إحصاء 3

الهدف العام لهذا المقياس هو التمهيد التطبيقي للنماذج الاقتصادية النظرية وإعطائها صيغة رياضية ويمكن تقسيم الأهداف العامة إلى أهداف خاصة مصنفة حسب نوعية المعرفة المكتسبة كمايلي:

- مستوى المعرفة:

- التعرف على المفاهيم والمصطلحات الأساسية المتعلقة بأهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة؛

- التعرف على المفاهيم والمصطلحات الأساسية المرتبطة بالتقارب بين التوزيعات الاحتمالية؛

- استيعاب المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة والمتصلة وأهم خواصها.

- التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين.

- مستوى الفهم والادراك:

- أن يفرق الطالب بين مختلف قوانين التوزيعات الاحتمالية وكيفية استعمالها؛

- اكساب الطالب القدرة على اختيار قانون التوزيع الاحتمالي المناسب لحل المسائل المختلفة

- استعاب شروط التقارب بين التوزيعات الاحتمالية

- اكتساب القدرة على اختيار التقريب المناسب لحل مختلف المسائل

- مستوى التحليل:

- اكساب الطالب القدرة على التحليل الاحصائي لعدد من الظواهر باستخدام مختلف قوانين التوزيعات الاحتمالية وخصائصها للوصول إلى نتائج دقيقة.

- مستوى التطبيق:

- اكتساب القدرة على تطبيق قوانين التوزيعات الاحتمالية لمعالجة وحل مختلف المشكلات الاقتصادية والادارية والاجتماعية.

مقدمة

الاحصاء علم يهتم بجمع وعرض ووصف البيانات وتحليلها بهدف اتخاذ القرارات والتوصل إلى نتائج دقيقة،كل هذا يجعله ذو أهمية تطبيقية واسعة في شتى مجالات الحياة خاصة مع التطورات التكنولوجية الحديثة ودخول عصر المعلومات،حيث يساعد على توفير فهم أفضل ووصف دقيق لمختلف الظواهر والمشكلات المدروسة عن طريق مختلف الطرق والاساليب الإحصائية التي يوفرها الاحصاء كنظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية التي تستخدم لمعالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية.

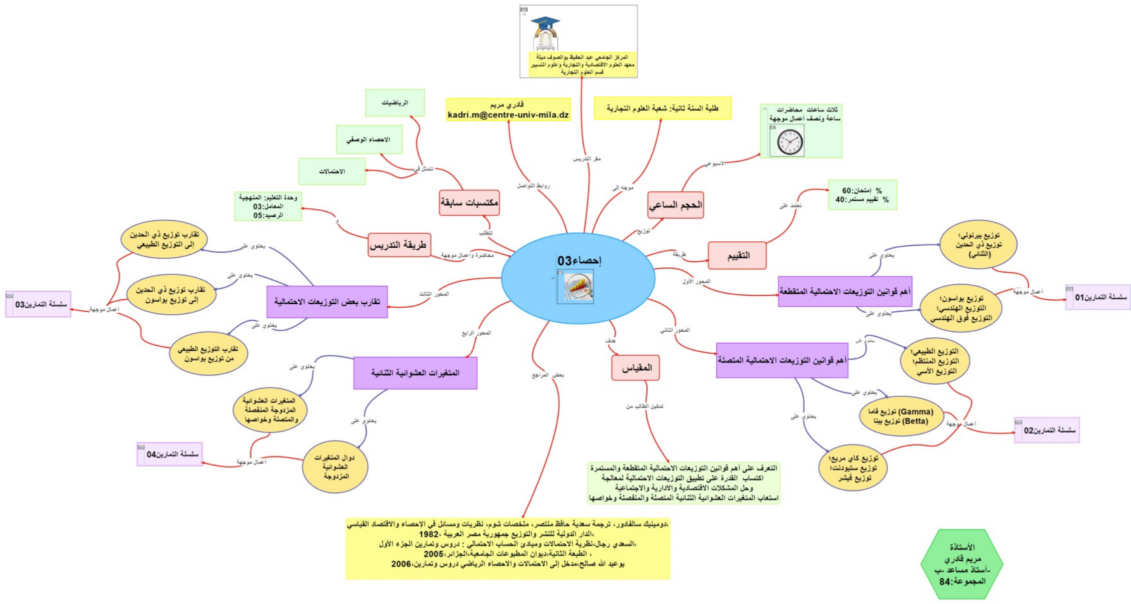
يعد مقياس الاحصاء 3 من أهم المقاييس الاحصائية التي تدرس في الجامعات ويتناول المحاور الآتية:

المحور الأول:أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

المحور الثاني:أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

المحور الثالث:تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

المحور الرابع:المتغيرات العشوائية الثنائية



الخريطة الذهنية -مادة الاحصاء 3

المكتسبات القبلية

حتى يتمكن الطالب من دراسة واستعاب مقرر الاحصاء 3، يجب أن تكون لديه خلفية نظرية وتطبيقية عن بعض المفاهيم في الرياضيات،الاحصاء الوصفي والاحتمالات نذكر منها:

- المفاهيم الأساسية المتعلقة بالإحصاء الوصفي
- مصطلحات ومفاهيم خاصة بالإحصاء الرياضي كالمتغيرات العشوائية، الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية.

II اختبار المكتسبات القبلية

وحدة

يهدف هذا الاختبار الى قياس مدى تحكم الطالب في المكتسبات القبلية

تمرين 1:تمرين 1

[33 ص 1 حل رقم]

1.لتوقع الرياضي للمتغيـر(E(X للمتغيـر العشـوائي المتقطـع (X) هـو عبـارة عـن حاصـل القيم المختلفة (x) مضروبا في المقابلة لها.

2.التباين يعبر عن مدى تشتت مختلف القيم حول

3.الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي الموجب لـ

4.دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع هو احتمـال أن يأخـذ Xأيـة قيمـة معينـة xوهـو مايعرف بالتكرار المتجمع

تمرين 2:تمرين 2

[33 ص 2 حل رقم]

عند رمي قطعة نقدية مرتين،وإذا عرفنا المتغير X بأنه عدد الصور الظاهرة،ماهي قيم هذا المتغير؟

تمرين 3:تمرين 3

[33 ص 3 حل رقم]

اذا اعتبرنا x متغير عشوائي يمثل عدد السيارات المباعة خلال يوم ما ، حيث يمكن تمثيل قانون التوزيع الاحتمالي له كمايلي:

x_i	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.02	0.08	0.1	0.3	0.4	0.1

المطلوب:

أوجد دالة التوزيع $F(X)$ ماهو احتمال ان يكون عدد السيارات المباعة لا بتعدى 3 سيارات؟

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; ; & si\ x < 0 \\ 0.02 \; ; & si\ 0 \le x < 1 \\ 0.1 \; ; & si\ 1 \le x < 2 \\ 0.2 \; ; & si\ 2 \le x < 3 \\ 0.5 \; ; & si\ 3 \le x < 4 \\ 0.9 \; ; & si\ 4 \le x < 5 \\ 1; & si\ 5 \le x < 6 \end{cases}$$

$$F_\chi(x) \begin{cases} 0; & \chi < 0 \\ \frac{1}{8}; & 0 \le \chi < 1 \\ \frac{4}{8}; & 1 \le \chi < 2 \\ \frac{7}{8}; & 2 \le \chi < 3 \\ 1; & \chi \ge 3 \end{cases}$$

تمرين 4:تمرين 4

[34 ص 4 حل رقم]

اذا اعتبرنا x متغير عشوائي يمثل عدد السيارات المباعة خلال يوم ما ، حيث يمكن تمثيل قانون التوزيع الاحتمالي له كمايلي:

x_i	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.02	0.08	0.1	0.3	0.4	0.1

المطلوب:

ماهو احتمال ان يكون عدد السيارات المباعة لا يتعدى 3 سيارات؟

تمرين 5:تمرين 5

[34 ص 5 حل رقم]

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا دالة توزيعه الاحتمالي F هي:

X	0	1	2
F(x	0.25	0.5	0.25

فإن التوقع الرياضي له يساوي:

تمرين 6:تمرين 6

[34 ص 6 حل رقم]

ذا كان متغير عشوائي يخضع للقانون الاحتمالي المعرف في الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	0.10	0.16	0.25	0.30	0.13	0.05	0.01

فإن التباين والانحراف المعياري له هو:

- ☐ v(x)=1.83
- ☐ الانحراف المعياري =1.35
- ☐ الانحراف المعياري =1.5
- ☐ التباين =2.3

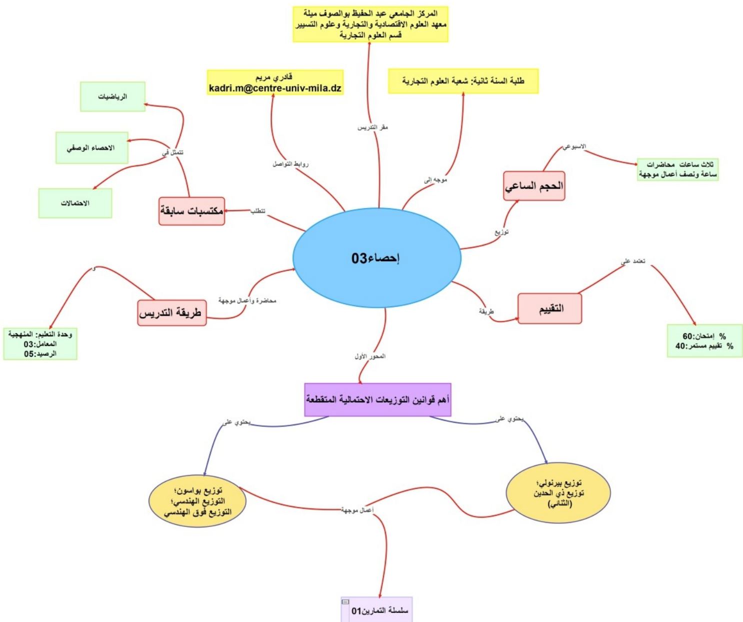
III المحور الأول:أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

الاهداف الخاصة بالمحور الأول

في نهاية هذا المحور يتوقع من الطلبة أن يحققوا جملة من الأهداف هي:

- التعرف على المفاهيم والمصطلحات الأساسية المتعلقة بأهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة؛
- أن يفرق الطالب بين مختلف قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة وكيفية استعمالها؛
- اكساب الطالب القدرة على اختيار قانون التوزيع الاحتمالي المتقطع المناسب لحل المسائل المختلفة
- اكساب الطالب القدرة على التحليل الاحصائي لعدد من الظواهر باستخدام مختلف قوانين التوزيعات الاحتمالية وخصائصها للوصول إلى نتائج دقيقة
- اكتساب القدرة على تطبيق قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة لمعالجة وحل مختلف المشكلات الاقتصادية والادارية والاجتماعية.

يتناول هذا الفصل التوزيعات الاحتمالية المتقطعة االتالية: توزيع ذو الحدين ،توزيع بواسون والتوزيع الهندسي باعتبارها من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما.



الخريطة الذهنية-المحور الأول

IV

قانون برنولي
Bernoulli Distribution

آ. تعريفه:

نقول عن تجربة أنها "برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و B،نسمي A نجاح و B فشل.

نعتبر المتغير X الذي يمثل عدد مرات النجاح، يأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A والقيمة 0 في الحالة المعاكسة.

نرمز بـ p احتمال النجاح لاحتمال تحقق الحدث A و q=1-p احتمال الحدث المعاكس (الفشل)،[1][1][1] يعين توزيع برنولي كما يلي:

x	0	1
$P(X=x)$	q	p

فرنسية

ونكتب: $X \sim B(1, p)$

حيث:

و p+q =1، أي حالة تجربة ثنائية مكررة n=1 مرة

والقانون الاحتمالي لهذا التوزيع هو:

$$p_x = p(X=x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & si\ x=0,1 ;\ p+q=1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

فرنسية

ب. المميزات العددية:

التوقع الرياضي: $E(X) = p$

التباين: $V(X) = p(1-p)$

V توزيع ذو الحدين : Binomial Distribution

آ. تعريفه:

يعرف توزيع ذو الحدين بانه عبارة عن جمع لعدد n من متغيرات برنولي المستقلة لها نفس احتمال التحقق (p متساوية)

ونكتب: x≈binom (n,p)

يستعمل هدا القانون عندما تتوفر الشروط التالية:

- تؤول كل محاولة الى نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين
- تعاد التجربة في نفس الظروف n مرة ويتحقق من خلالها حدث معين عدد k من المرات $0 \leqslant k \leqslant n$
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتائج المحاولات الأخرى وبالتالي فان احتمال النجاح (الفشل) يساوي حاصل ضرب احتمالات مختلف النجاحات (الفشل)
- يبقى احتمال التحقق ثابتا من محاولة الى اخرى.

ب. دالة كثافته الاحتمالية:

يمكن للحدث A أن يتحقق عدد x من المرات ولكن بأشكال مختلفة وعدد هذه الأخيرة هو عبارة عن عدد التوفيقات لعدد x من العناصر المأخوذة من عناصر عددها n التي يمكن تشكيلها أي:

$$C_n^x$$

فرنسية

وبالتالي يكون القانون الاحتمالي بالشكل التالي:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(X=x)=C_n^x \mathrm{P}^x q^{n-x}; \quad 0 \ll x \ll n$$

فرنسية

مثالـ

في عائلة مكونة من 4 أولاد، ماهو احتمال أن يكون بينهم 3 ذكور ، ذكر واحد

الحل:

نضع x متغير عشوائي يمثل عدد الأولاد الذكور في هذه العائلة

لدينا :

n =5 ; p=0.5 ; q=1-p =0.5

ومنه: $x \sim$ (4;0.5)

أما الاحتمال فيحسب بالعلاقة التالية:

$$p(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$$

فرنسية

$$p(X=3)=C_4^3 0.5^3 0.5^{4-3}=0.25$$

فرنسية

$$p(X=1)=C_4^1 0.5^1 0.5^{4-1}=0.25$$

فرنسية

ب. تابع التوزيع للتوزيع ذو الحدين:

$$f(x)=p(X\leq x)=\sum_{i=1}^{n} C_n^{xi} p^n q^{n-xi}$$

فرنسية

ت. الخصائص العددية:

التوقع(E(X:

$$E(x)=np$$

فرنسية

التباين (V(X

$$V(X)=npq$$

فرنسية

مثال

في المثال السابق حدد الخصائص العددية للمتغير x الذي يمثل عدد الأولاد الذكور في اسرة مكونة من 4 أولاد

الحل:

$$E(X)=np=4*0.5=2\,;V(X)npq=4*0.5*0.5=1$$

VI

توزيع بواسون The Poisson Distribution

أ. تعريفه:

يستخدم هذا التوزيع لتحديد احتمال عدد معين من الاحداث(النجاحات) في وحدة من الزمن، وذلك عندما تكون الاحداث مستقلة عن بعضها البعض ويبقى متوسطها ثابتا لوحدة من الزمن ، مثل:عدد حوادث السيارات خلال السنة،عدد المكالمات خلال الشهر...

شروط هذا التوزيع هي:

- أن يكون احتمال النجاح ثابت وكذلك احتمال الفشل في كل محاولة ويرمز لهما بالرمز p,q
- ان يكون احتمال النجاح صغيرا ويقترب من الصفر واحتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح
- ان يكون عدد المحاولات كبير جدا على ان تكون $\lambda = n.p$ مقدار ثابت

ب. قانون توزيع بواسون

$$p(x)=\frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!}; x=1,2,\ldots n$$

فرنسية

حيث أن:

X : العدد المعين من النجاحات

P(x : احتمال عدد x من النجاحات

λ : متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن

e=2.71828

نلاحظ ان هذا التوزيع معرف فقط في المعلمة λ أي يكفي معرفتها لتطبيق هذا التوزيع ويعرف كما يلي:

X≈p (λ✯)

پ. الخصائص العددية لتوزيع بواسون:

- التوقع الرياضي :التوقع الرياضي المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع بواسون هو معلمة هذا التوزيع

M

$$E(X)=\lambda$$

- التباين

$$V(X)=\lambda$$

مثال

اذا كان عدد حوادث السيارات في مدينة معينة يتبع توزيع بواسون بمتوسط 5 حوادث خلال اسبوع ، اذا افترضنا ان x متغير عشوائي يمثل حوادث السيارات خلال اسبوع.

المطلوب:

- حدد شكل دالة الاحتمال - f✯(x) لهذا المتغير.
- ماهو احتمال حدوث حادث واحد على الاقل خلال اسبوع ؟
- ماهو احتمال حدوث - 3 حوادث على الاكثر خلال اسبوع؟
- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لعدد الحوادث.
- حدد شكل التوزيع

الحل:

شكل دالة الاحتمال:

بما ان متوسط عدد حوادث السيارات خلال اسبوع هو $x=5$ وبالتالي تكون دالة الاحتمال:

$$f(X)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!};x=0,1,2,\ldots n$$

فرنسية

$$f(X)=\frac{\lambda^{x}e^{-5}}{x!};x=0,1,\ldots 5$$

فرنسية

حساب الاحتمالات:

احتمال حدوث حادثين خلال اسبوع هو:

$$f(2)=\frac{5^{2}e^{-5}}{2!}=0.08$$

احتمال حدوث حادث واحد على الاقل خلال اسبوع هو:

$$f(X\geq 1)=1-f(0)=0.99$$

احتمال حدوث 3 حوادث على الاكثر خلال اسبوع هو:

$$f(X\leq 3)=f(3)+f(2)+f(1)+f(0)=0.25$$

حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\lambda=5$$

التباين:

$$V(X)=\lambda=5$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{\lambda}=\sqrt{5}=2.23$$

تحديد شكل التوزيع:

توزيع بواسون دائما موجب الالتواء.

لمزيد من التوضيح يرجى مشاهدة الفيديو [1]

"(web_01) انظرالفيديو 1

الفيديو 1

1 - https://www.youtube.com/watch?v=XLlvqSxB4Fo

VII التوزيع الهندسي

أ. تعريفه:

التوزيع الهندسي ينتج من تكرار محاولة برنولي المستقلة حتى الحصول على أول نجاح باحتمال (p) وعلى هذا الأساس فإن المتغير العشوائي المنفصل X في حالة تجارب التوزيع الهندسي هو عبارة عن عدد مرات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فإن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة x تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها x-1

ويرمز له بالرمز: $X \sim G(p)$

ب. شروط تطبيق قانون التوزيع الهندسي

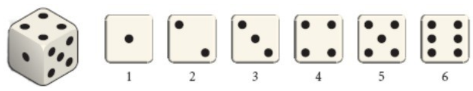
تتمثل شرط تطبيق التوزيع الهندسي فيما يأتي:

محاولات متكررة ومستقلة.

- لكل محاولة نتيجتين ممكنتين فقط.
- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
- التوقف عند أول نجاح.

مثلل

تجربة إلقاء قطعة نرد بشكل متكرر والتوقف عند ظهور أحد الأوجه المطلوبة



هذه التجربة هي تجربة هندسية لتوفر الشرو ط السابقة

پ. دالة الكثافته الاحتمالية:

دالة الكثافته الاحتمالية للتوزيع الهندسي معرفة بالشكل الآتي:

$$f(X)=p(X=x)=(1-p)^{x-1}, x=0,1,2,\ldots ; p+q=1 ; 0<p<1$$

فرنسية

ت. المميزات العددية:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

فرنسية

التباين:

$$V(X)=\frac{q}{p^2}$$

فرنسية

ث. تمرين

[35 ص 7 حل رقم]

في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة بشكل متكرر والتوقف عند ظهور الصورة.
ما هو قانون هذه التجربة؟

☐	قانون فوق الهندسي
☐	قانون برنولي
☐	قانون ذي الحدين
☐	قانون التوزيع الهندسي
☐	قانون بواسون

VIII التوزيع فوق الهندسي: The Hypergeometrice Distribution

آ. شروط استعمال القانون

يعتبر استقلال التجارب عن بعضها البعض من بين لشروط الضرورية لاستعمال القانون الثنائي ولكن في الواقع يصعب تحقيق هذا الشرط لانه عند سحب عينة حجمها n عنصر من مجتمع حجمه N عنصر $n<N$ لانجد عنصر معين اكثر من مرة واحدة ضمن هذه العينة وبالتالي يعتبر السحب بدون ارجاع وهذا يعني ان التجارب غير مستقلة في هذه الحالة نطبق القانون فوق الهندسي.

يرمز له بالرمز: $X \sim H(N, n, p)$

ب. ..قانون التوزيع الفوق الهندسي:

$$p(X=x)=\frac{card(X=x)}{card\Omega}=\frac{C_M^x . C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \qquad q=1-p$$

$$\sum_{x=1}^{n} p(X=x)=1 ; p(X=x)\geq 1$$

فرنسية

پ. المميزات العددية:

$$E(X)=np$$

فرنسية

$$V(X)=npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

فرنسية

للمزيد من التوضيح يرجى مشاهدة الفديو 2

انظرالفديو 2 (*web2*)"

الفديو 2

IX سلسلة تمارين محلولة

التمرين الأول:

اذا كان من المعلوم ان نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام دوء معين هي 60 % اذا تناول هذا الدواء 5 مصابين بهذا المرض واذا عرفنا المتغير العشوائي X بانه عدد المصابين الذين يستجيبون لهذا الدواء(حالات الشفاء).

المطلوب:

- ماهو نوع المتغير العشوائي؟ وماهو قانون التوزيع الاحتمالي له؟
- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X ثم احسب الاحتمالات التالي :

استجابة 3 مرضى لهذا الدواء

استجابة مريض واحد على الاقل

استجابة مريضين على الاقل

- أحسب الامل الرياضي والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة

حل التمرين الاول:

- تحديد نوع المتغير X :

X : متغير عشوائي منفصل كمي يمثل عدد حالات الاستجابة

- قانون التوزيع الاحتمالي ل X :

بما ان المصاب بعد تناوله للدواء هناك نتيجتين متنافيتين : شفاء/ عدم شفاء فاننا امام تجربة برنولي مكررة 5 مرات أي توزيع ثنائي الحدين، حيث:

$$n=5\,;\ p=0.6\,;\ q=1-p=1-0.6=0.4$$

ونكتب: $X \sim B(5,0.6)$ و $X=\{0,1,2,3,4,5\}$

- ايجاد التوزيع الاحتمالي لهذا التغير:

$$p(X=x)=C_n^x\, p^x q^{n-x}$$

فرنسية

$$P(X=0)=C_5^0(0.6^0)(0.4^5)=0.01$$

فرنسية

$$p(X=1)=C_5^1(0.6^1)(0.4^4)=0.0768$$

فرنسية

$$p(X=2)=C_5^2(0.6^2)(0.4^3)=0.2304$$

فرنسية

$$p(X=3)=C_5^3(0.6^3)(0.4^2)=0.3456$$

فرنسية

$$p(X=4)=C_5^4(0.6^5)(0.4^1)=0.2592$$

فرنسية

$$p(X=5)=C_5^5(0.6^5)(0.4^0)=0.07776$$

فرنسية

X	0	1	2	3	4	5	Σ px
P(X=x)	0.0102	0.0768	0.2304	0.3456	0.2592	0.07776	1

فرنسية

• حساب الاحتمالات:

استجابة 3 مرضى:

$$p(X=3)=0.3456$$

فرنسية

استجابة مريض واحد على الاقل:

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-0.0102=0.9897$$

فرنسية

استجابة مريضين على الاقل:

$$p(X\leq 2)=0.0102+0.0768+0.2304=0.31744$$

فرنسية

حساب الامل الرياضي والانحراف المعياري:

$$E(X)=np=5*0.6*0.4=1.2$$

فرنسية

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=1.095$$

فرنسية

التمرين الثاني

اذا علم أن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الوحدات التي تستهلكها اسرة ما من سلعة معينة خلال الشهر يخضع لتوزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا.

المطلوب:

أ. احسب الاحتمالات الاتية:

- احتمال ان تستهلك الاسرة وحدتين خلال الشهر.

احتمال ان تستهلك الاسرة وحدة واحدة على الاقل خلال الشهر

- احتمال ان تستهلك الاسرة 3 وحدات على الاكثر خلال الشهر

ب . حدد معلمة هذا التوزيع واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

حل التمرين الثاني

نعلم أن : $X\sim P(\lambda=3)$

أ. نوع المتغير X هو متغير عشوائي متقطع

ب . كتابة قانونه الاحتمالي:

$$p(X=3)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

فرنسية

ب . حساب الاحتمالات:

- احتمال ان تستهلك الاسرة وحدتين خلال الشهر

$$p(X=2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=0.22$$

فرنسية

احتمال ان تستهلك الاسرة وحدة واحدة على الاقل خلال الشهر

$$p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(x=0)=1-\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=1-0.049=0.95$$

فرنسية

احتمال ان تستهلك الاسرة 3 وحدات على ا لاكثر خلال الشهر

$$p(x\leqslant 3)=p(x=3)+p(x=2)+p(x=1)+p(x=0)=0.64$$

فرنسية

•تحديد معلمة هدا التوزيع ، وحساب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

من المعطيات معلمة هذا التوزيع هي التوقع الرياضي وتساوي 3

الانحراف المعياري: نعلم ان:

$$\mu=\lambda=\sigma^2=3 \text{ ومنه } \sigma=\sqrt{\lambda}=\sqrt{3}=1.73$$

فرنسية

التمرين الثالث:

في تجربة القاء حجر النرد، نرمي الحجر حتى ظهور أحد الأوجه المطلوبة

المطلوب:

ماهو احتمال ظهور الرقم 5 بعد 6 محاولات لالقاء النرد؟

احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل:

X: يمثل عدد مرات القاء حجر النرد حتى ظهور أحد الأوجه المطلوبة

احتمال النجاح (ظهور الرقم 5) P=1/6

احتمال الفشل (عدم ظهور الرقم 5) 5/6= 1/6 -q=1

ومنه:

$$X\sim G(p);\, X\sim G(\frac{1}{6})$$

وقانون التوزيع هو:

$$p(X=x)=p(1-p)^{x-1}$$

فرنسية

احتمال ظهور الرقم 5 بعد 6 محاولات لالقاء النرد، أي في المحاولة السابعة وبالتالي x=7

$$p(x=7)=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})^{x-1}=0.0558$$

فرنسية

حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{1}{p}=6$$

فرنسية

التباين:

$$V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{5}{6}}{(\frac{1}{6})^2}=30$$

فرنسية

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{q}{p^2}}=\sqrt{\frac{5/6}{(1/6)^2}}=5.48$$

فرنسية

التمرين الرابع:

تحتوي مزهرية على 5 أزهار حمراء و 4 أزهار صفراء، نختار بدون إرجاع 3 أزهار

المطلوب:

الحصول على زهرة واحدة حمراء

الحصول على زهرتين حمراوين
الحصول على 3 زهرات حمراء
أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري ؟
الحل:
نلاحظ أن :
النتائج الممكنة تكون ثنائية (كل زهرة مسحوب اما حمراء أو صفراء)
السحب دون ارجاع (أي السحبات غير مستقلة واحتمال النجاح p غير ثابت)
الترتيب غير مهم ومنه X متغير عشوائي يخضع للتوزيع فوق الهندسي أي: $X \sim H(N, n, p)$
حيث:

$$P(X=x)=\frac{c_M^x \, c_{N-M}^{n-x}}{c_N^n}$$

فرنسية

احتمال الحصول على ولا زهرة حمراء:

$$p(X=0)=\frac{c_5^0 \, c_4^3}{c_9^3}=\frac{1}{3}$$

فرنسية

احتمال الحصول على زهرة واحدة حمراء:

$$p(x=1)=\frac{\binom{1}{5}\binom{2}{4}}{\binom{3}{9}}=\frac{5}{2}$$

فرنسية

احتمال الحصول على زهر تين حمراء:

$$p(x=2)=\frac{\binom{2}{5}\binom{1}{4}}{\binom{3}{9}}=\frac{10}{3}$$

فرنسية

احتمال الحصول على 3 زهراء حمراء:

$$p(x=3)=\frac{\binom{3}{5}\binom{0}{4}}{\binom{3}{9}}=\frac{5}{6}$$

فرنسية

حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري

$$E(X)=np=n(\frac{M}{N})=3(\frac{5}{9})=\frac{5}{3}$$

فرنسية

$$V(X)=npq\frac{N-n}{N-1}=3(\frac{5}{9})(\frac{4}{9})(\frac{9-3}{9-1})=\frac{360}{648}=\frac{5}{9}$$

فرنسية

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=0.74$$

فرنسية

حل التمارين

< 1 (ص 13)

1التوقع الرياضي للمتغير(E(X للمتغير العشوائي المتقطع (X) هو عبارة عن حاصل جمع القيم المختلفة (x) مضروبا في الاحتمالات المقابلة لها.
2التباين يعبر عن مدى تشتت مختلف القيم حول القيمة المتوسطة
3الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي الموجب لـالتباين
4دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع هو احتمال أن يأخذ Xأية قيمة معينة xوهو مايعرف بالتكرار المتجمع الصاعد

< 2 (ص 13)

0،1،2

فراغ العينة	عدد الصور الظاهرة (x)
(ص ص)	2
(ك ك)	0
(ك ص)	1
(ص ك)	1

< 3 (ص 13)

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; ; & si\ x < 0 \\ 0.02 \; ; & si\ 0 \le x < 1 \\ 0.1 \; ; & si\ 1 \le x < 2 \\ 0.2 \; ; & si\ 2 \le x < 3 \\ 0.5 \; ; & si\ 3 \le x < 4 \\ 0.9 \; ; & si\ 4 \le x < 5 \\ 1 ; & si\ 5 \le x < 6 \end{cases}$$

$$F_{\chi}(x) \begin{cases} 0; & \chi < 0 \\ \frac{1}{8}; & 0 \le \chi < 1 \\ \frac{4}{8}; & 1 \le \chi < 2 \\ \frac{7}{8}; & 2 \le \chi < 3 \\ 1; & \chi \ge 3 \end{cases}$$

- ايجاد دالة التوزيع F(x)

نوضح دالة التوزيع في الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.02	0.08	0.1	0.3	0.4	0.1
F(x)	0.02	0.1	0.2	0.5	0.9	1

التوزيع نلاحظ انها تراكمية كالتكرار التجمعي الصاعد ونكتبها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; ; & si\ x < 0 \\ 0.02 \; ; & si\ 0 \le x < 1 \\ 0.1 \; ; & si\ 1 \le x < 2 \\ 0.2 \; ; & si\ 2 \le x < 3 \\ 0.5 \; ; & si\ 3 \le x < 4 \\ 0.9 \; ; & si\ 4 \le x < 5 \\ 1; & si\ 5 \le x < 6 \end{cases}$$

< 4 (ص 14)

0.5

حساب احتمال ان يكون عدد السيارات المباعة لا يتعدى 3 سيارت

$$p(X \le 3) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) = F(3) = 0.5 = 50\%$$

< 5 (ص 14)

1

< 6 (ص 14)

- [x] v(x)=1.83
- [x] الانحراف المعياري =1.35
- [ ] الانحراف المعياري =1.5
- [ ] التباين =2.3

لدينا:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نحسب أولا:

التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.P(X = x_i) = [(0 \times 0.10) + (1 \times 0.16) + \cdots (6 \times 0.01)]$$

$$E(X) = 2.39$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 .P(X = x_i) = [(0^2 \times 0.10) + (1^2 \times 0.16) + \cdots + (6^2 \times 0.01)]$$

$$E(X^2) = 7.55$$

$$V(X) = 7.55 - (2.39)^2 = 1.83$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.83} = 1.35$$

< 7 (ص 24)

☐	قانون فوق الهندسي
☐	قانون برنولي
☐	قانون ذي الحدين
☑	قانون التوزيع الهندسي
☐	قانون بواسون

قاموس

Expectation

التوقع للمتغير العشوائي(E(X هو عبارة عن أخذ جميع النتائج الممكنة لذلك المتغيروالوزن المقابل لها والمتمثل باحتمال وقوع كل من هذه النتائج.

Variance

التباين (Variance) (في مجال الإحصاء ونظرية الاحتمالات) لمتغير عشوائي أو توزيع احتمالي أو عينة، هو مقياس للتشتت الإحصائي للقيم الممكنة حول القيمة المتوقّعة، وهو مساوٍ للقيمة المتوقّعة (أو لمتوسّط الحسابي) لتربيع انحرافات القيم المقاسة عن القيمة المتوقّعة (أو المتوسّط).

المتغير (المتغيرة)

خاصية أو سمة يمكن أن تأخذ أكثر من قيمة مثل التحصيل، الذكاء، الوزن...

تجارب (عملية) برنولي **Bernulli trials**

تتابع لتجارب متطابقة (n) لتجربة عشوائية لدرجة أن كل تجربة (1) ينتج عنها نتيجة واحدة من نتيجتين متكاملتين محتملتان يطلق عليها اسم النجاح والفشل.(2) تكون كل تجربة مستقلة لدرجة أن احتمال النجاح أو الفشل يكون ثابتا من تجربة إلى أخرى وسميت عملية برنولي على اسم عالم الحساب السويسري جيمس بيرنولي.

توزيع ذي الحدين **Binomial Distribution**

توزيعات احتمالية لعدد حالات النجاح في تجارب Bernoulli لـ n المستقلة، حيث يكون لكل تجربة نتيجتين (النجاح -الفشل) ويكون احتمال نجاح أ هو نفسه بالنسبة لكل تجربة

معنى المختصرات

- E	Expectation
- $f(x$	Density Function دالة الكثافة
- $X \sim B(1,p)$	تقرا أن المتغير العشوائي x يتبع توزيع بيرنولي بمعلمة p
- $\sigma 2$ أو v	Variance
- $X \sim P(\lambda$	تقرا أن المتغير العشوائي x يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ

مراجع

[1] سلطان محمد الصلخدي،مقرر الاحصاء الرياضي، السنة الثالثة، الفصل الثاني للعام الدراسي 2013-2014،جامعة دمشق-كلية العلوم الاحصاء الرياضي، ص 2.

قائمة المراجع

[1] بوعبد الله صالح، محاضرات الإحصاء الرياضي لطلبة كلية العلوم الاقتصادية، 2005-2006

[2] علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، الاحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، دار الحكمة

[3] Y.Velenik, Probabilités et Statistique, Université de Genéve, 2011

[4] سيمور ليبشتز، ترجمة سماح داوود، نظريات ومسائل في الاحتمال، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 200

[5] أمطير مفتاح عثمان،حساب الاحتمالات،مركز الكتاب الاكاديمي،2020.

[6] موسى عبد النور، بركان يوسف، الاحصاء 2 دار العلوم للنشر والتوزيع، 201

[7] السعدي رجال، نظرية الاحتمالات : مبادئ الحساب الاحتمالي دروس وتمارين، ج 1 ،ط 1، ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر، 1995

[8] علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، الاحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، دار الحكمة

[9] دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الاحصاء والاقتصاد القياسي، ملخصات شوم ، ط 2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2011