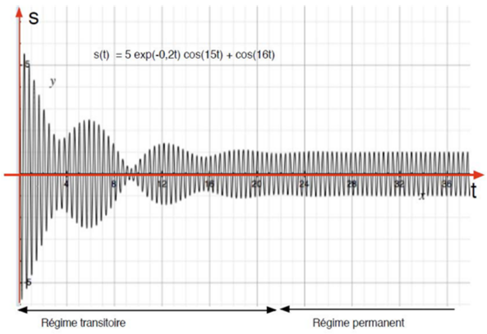
Ondes et Vibrations



Serradj Ismahan

1.0

08-03-2024

Table des matières

I Chapitre 3 : Systèmes libres amortis à un degré de liberté

1. Objectifs

L'objectif de l'étude de ce chapitre est :

- Connaître établir l'équation différentielle qui représente le mouvement de système vibratoire amorti.

2. Introduction :

Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prisent en considération. Les frottements sont visqueux et dépend de la vitesse.

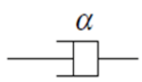
Les forces de frottement ont la forme suivante f=-cv [1][*].

avec :

c: est le coefficient de frottement.

v : est la vitesse.

L'amortisseur est schématisé



On utilise les conditions initiales pour trouver les deux constantes A et B.

3. Équation du mouvement

3.1. Équation de Lagrange

Reprenons l'exemple masse-ressort soumis à une translation dans la direction (x) en présence des forces de frottement, en utilisant l'équation de Lagrange pour aboutir à l'équation différentielle du mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad et \quad D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$$

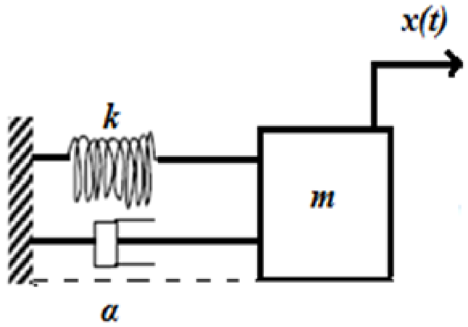


Figure II.2 Exemple d'un système masse-ressort-amortisseur

L:Le Lagrangien du système est donné par L=T- U

q: La coordonnée généralisée, dans ce cas q=x

L'énergie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle du système :

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

L'énergie de dissipation est:.

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$$

La fonction de Lagrange:

$$\mathrm{L} = T - \mathrm{U} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{kx}^2$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = k\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Qui est une équation différentielle linéaire du second ordre Plus généralement, pour une cordonnée généralisée q elle s'écrit

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + {\omega_0}^2 = 0$$

Avec:

δ: est le coefficient d'amortissement.

ω_0: est la pulsation libre.

3.2. Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de δ par rapport àω_0. On distingue trois régimes : le régime apériodique, le régime critique et le régime pseudo périodique.

Le régime est apériodique (fortement amorti)

- si $\delta > \omega_0$ Régime fortement amorti, dans ce cas le système n'effectue plus de mouvement oscillatoire et le système retourne directement vers l'équilibre sans aucune oscillation et solution de l'équation différentielle du mouvement prend la forme suivante[2]* :

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A1 et A2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure III -2 représente la solution q (t) en fonction du temps[3]* .

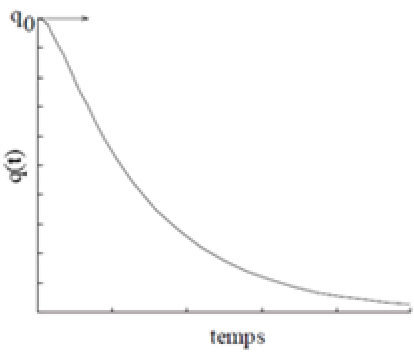


Fig. III -2. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime fortement amorti (sur amorti)

- Si $\delta=\omega_0$ le régime est critique (Figure III -3), et la solution est de la forme:

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\sigma t}$$

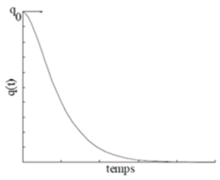


Fig. III-3. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime critique

- Si $\delta<\omega_0$ Régime faiblement amorti , la solution de l'équation différentielle du mouvement prend la forme[2]

$$q(t) = e^{-\sigma t}\cos(\omega_a t - \varphi)$$

Tel que $\omega_a = \sqrt{\omega^2{}_0 - \sigma^2}$. est le battement du système amorti

On définit la période du système T appelé pseudo-période comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

4. Coefficient de frottement critique

Le coefficient de frottement critique est définit comme la valeur du coefficient de frottement qui est à $\Delta=0$ c'est-à-dire

$$\left(\frac{c_c}{m}\right)^2 = 4\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_0$$

5. Rapport d'amortissement

Le rapport d'amortissement est défini comme le rapport du coefficient de frottement au coefficient de frottement critique.

$$\varepsilon = \frac{c}{c_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2m} = \varepsilon\omega_0$$

6. Le facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par[3][*]

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\omega_0}{2\sigma}$$

Avec

E: L'énergie de l'oscillateur harmonique.

ΔE: est l'énergie dissipée pendant un cycle.

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand, à ω_0 donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de facteur de qualité.

7. La période du système pseudo-période

On définit la pulsation du système faiblement amorti comme suit:

$$\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}$$

Donc la période du système est

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

8. Le décrément logarithmique

Le décrément logarithmique est défini comme le taux de diminution de l'amplitude du mouvement vibratoire. Mathématiquement, le décrément logarithmique est donné par le logarithme naturel de deux amplitudes successives.

$$\mathrm{D} = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{Ae^{-\sigma t} \cos(\omega_a t - \varphi)}{Ae^{-\sigma(t+T_a)} \cos(\omega_a (t + T_a) - \varphi)}$$

$$\text{Avec: } \omega_a T_a = 2\pi$$

$$\text{Donc :}\ \cos(\omega_a(t+T_a)-\varphi) = \cos(\omega_a t-\varphi)$$

$$\text{Alors :}\ D = \ln\frac{Ae^{-\sigma t}}{Ae^{-\sigma(t+T_a)}} = \ln e^{-\sigma T_a} \Rightarrow D = \delta T_a$$

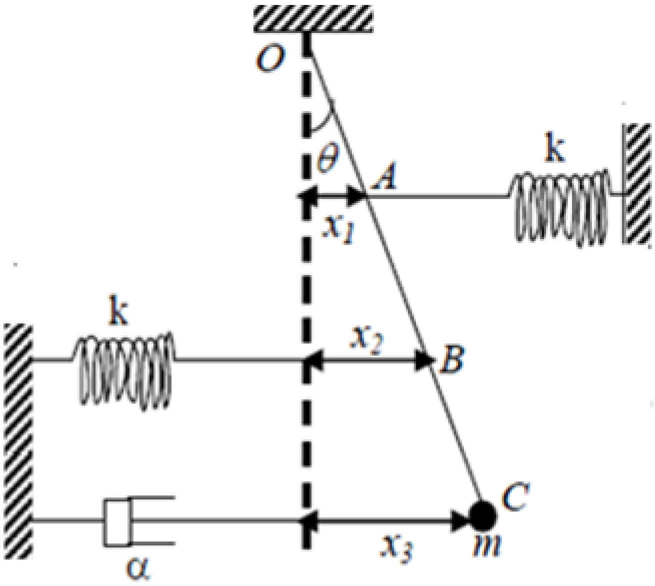
9. L'énergie dissipée

A cause de la force de frottement, le système subit une perte d'énergie totale due au travail des forces de frottement

$$dE_T(t) = -dw_{fr}$$

10. Exemple:

1- Retrouver l'équation différentielle du mouvement la solution de l'équation différentielle dans le cas des petites amplitudes pour le système de la figure ci-contre avec (OA = AB = BC = L/3). [4]*



10.1. Solution

1-L'équation du mouvement de ce système est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

• Le Lagrangien: L=T-U

- $T = \frac{1}{2} m\dot{x}_3{}^2 \quad avec \quad x_3 = l\sin\theta \approx l\theta \Rightarrow \dot{x}_3 = l\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\, ml^2\dot{\theta}^2$

- U =U 1+U 2

U1 est l'énergie potentielle du ressort de raideur k1. U2 est celle du ressort k2 .

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} k_1\, x_1{}^2 \quad avec \quad x_1 = \dfrac{l}{3}\theta \quad \Rightarrow \quad U_1 = k_1 \left(\dfrac{l}{3}\right)^2 \theta^2 \\ U_2 = \dfrac{1}{2} k_2\, x_2{}^2 \; avec \quad x_2 = \dfrac{2l}{3}\theta \quad \Rightarrow U_2 = k_2 \left(\dfrac{2l}{3}\right)^2 \theta^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = k_1 \left(\frac{l}{3}\right)^2 \theta^2 + k_2 \left(\frac{2l}{3}\right)^2 \theta^2$$

• La fonction de dissipation:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_3{}^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$$

Le Lagrangien s'écrit:

$$\frac{1}{2}\, ml^2\dot{\theta}^2 - k_1 \left(\frac{l}{3}\right)^2 \theta^2 - k_2 \left(\frac{2l}{3}\right)^2 \theta^2$$

Donc l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{\theta} + \left(\frac{k}{m}\right)\theta = 0$$

11. Exercice

[solution n°1 p.11*]*

le battement naturel dans un système amorti c'est le même battement dans le système libre

- ○ Vrai
- ○ faux

12. Exercice

[solution n°2 p.11*]*

Pour un amortissement critique ;le système oscillant revient a l'équilibre ______ .

13. Exercice

[solution n°3 p.11]

pour un système amorti ;la pulsation correspondante est

- ῳ0
- ῳa
- ῳ

14. Exercice

[solution n°4 p.11]

dans un système a un degrés de liberté ;les mode propres peuvent être

* *

*

Pour une meilleure compréhension, veuillez regarder cette vidéo explicative et cliquer sur le lien suivant

Cf. "Vidéo1"

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 9

le battement naturel dans un système amorti c'est le même battement dans le système libre

- ○ Vrai
- ⊙ faux

> **Solution** n°2

Exercice p. 9

Pour un amortissement critique ;le système oscillant revient a l’équilibre `lentement`.

> **Solution** n°3

Exercice p. 10

pour un système amorti ;la pulsation correspondante est

- ○ ω_0
- ⊙ ω_a
- ○ ω

> **Solution** n°4

Exercice p. 10

dans un système a un degrés de liberté ;les mode propres peuvent être

complexes

Bibliographie

Polycopié de cours Ondes et Vibrations, Dr. SI SALEM Abdelmadjid ‘; Université des Sciences et de la Technologie Abderrahmane Mira de Bejaia

Vibrations et Ondes Mécaniques cours et exercices Partie I : Vibrations, ‘Dr. Kadri Syham' ; Université des Sciences et de la Technologie Tahri Mohammed Bechar.

Vibrations et Ondes Première Partie Vibrations: ‘Dr: Salim AOULMIT' ; Université des Sciences et de la Technologie Abdelhafid boussouf Mila.

Vibrations et Ondes Mécaniques cours et exercices, ‘H. Djelouah' ; Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene