Centre Universitaire de Mila — Année universitaire 2023/2024

Institut des Mathématiques et Informatique — Semestre 2

LMD: Math + MI (1$^{\text{er}}$année) — Durée 1 h 30

Analyse 2 — 24/06/2024

Examen de rattrapage

Exercice 1: (6 pts)

1) Montrer que:

$$Arc\tan x + Arc\tan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \forall x < 0.$$ 2

2) Trouver les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad (2) \; ; \qquad g(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad (2)$$

Exercice 2: (7 pts)

1) Calculer les primitives suivantes:

$$I_1 = \int \frac{x+3}{x^2 - 3x + 2} dx \quad (2{,}5) \; ; \quad I_2 = \int \arctan x dx \quad (2) \; ; \quad I_3 = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx. \quad (2{,}5)$$

Exercice 3: (7 pts)

On considère l'équation différentielle:

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \tag{E}$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E). 1,5
2) Trouver une solution particulière 1,5 de (E), et la forme générale des solutions de(E). 1
3) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$. 1
4) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie:

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

- On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E). 1
- En déduire une expression de f. 1

Bon courage

Centre Universitaire de Mila

Analyse 2 LMD: MATH + MI

Corrigé de l'examen de Rattrapage

Exercice 01:

1) Montre que: $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\forall x<0$

Soit la fonction $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$, $\forall x<0$ 0,5

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$ 0,5

0,5 Donc f est constante sur $\mathbb{R}^*$ c'est-à-dire

$f(x) = c$, $\forall x<0$.

0,5

et on a: $f(-1) = \operatorname{Arctan}(-1) + \operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Alors $\forall x<0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

2) Développements limités:

* $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, $x_0=0$, $n=4$

on a: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ 0,5

et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$ 0,5 donc

$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)$ 0,5

$= x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$ 0,5

* $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $x_0 = 0$, $n=4$.

0,5

on a: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$

Alors: 0,5

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)}$$

0,5

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}$$

Alors

$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$ 0,5

Exercice 02:

Calcule les primitives:

$* \; I_1 = \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

On a: $\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+bx-2b}{(x-2)(x-1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow b=-4$ et $a=5$. Donc

$I_1 = \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{5}{x-2}\,dx - \int \frac{4}{x-1}\,dx$

$= 5\ln|x-2| - 4\ln|x-1| + c$

$* \; I_2 = \int \arctan x\,dx \quad (I.p.p)$

$\begin{cases} u = \arctan x \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$, Donc

$I_2 = \int \mathrm{Arctan}\,x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

$* \; I_3 = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$ (CH.V), on pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$I_3 = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(t-1)}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt$

$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} = \frac{at+a+bt}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow b=2$

Alors $I_3 = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int -\frac{1}{t}\,dt + 2\int \frac{1}{t+1}\,dt$

$= -\ln t + 2\ln|t+1| + c$

$= -\ln e^x + 2\ln(e^x+1) + c = -x + \ln(e^x+1)^2 + c$

Exercice 3:

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée:

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

on pose $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$ $\Longrightarrow$ 0,5

$r^2 e^{rx} + 2re^{rx} + 4e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Donc

$r_1 = \dfrac{-2 + i2\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ 0,5, $r_2 = \dfrac{-2 - i2\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$

Alors $y_H(x) = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x)$ 0,5

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) La solution particulière de (E):

le second membre est de la forme $e^{\lambda x} P_n(x)$ avec $\lambda = 1$ et $P_n(x) = x$, alors on cherchera une solution de l'équation sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^x$ 0,5

on a: $y_p'(x) = ae^x + (ax+b)e^x$, $y_p''(x) = 2ae^x + (ax+b)e^x$

remplaçons y_p, y_p' et y_p'' dans (E) on obtient

$2ae^x + (ax+b)e^x + 2ae^x + 2(ax+b)e^x + 4(ax+b)e^x = xe^x$ 0,5

$\Rightarrow 2ae^x + axe^x + be^x + 2ae^x + 2axe^x + 2be^x + 4axe^x + 4be^x = xe^x$

$\Rightarrow 4a + 7b + 7ax = x$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 7b = 0 \\ 7a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{4}{7}a = -\frac{4}{49} \\ a = \frac{1}{7} \end{cases}$, Alors

$$y_p = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x = \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$$ 0,5

* la solution générale de (E) est:

$y = y_H + y_p$ 0,5

0,5

$= e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$

3) Déterminer la solution de (E) où $h(0)=1$, $h(1)=0$

$h(0)=1 \Rightarrow c_1 - \frac{4}{49} = 1 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{4}{49} = \frac{53}{49}$ 0,5

$h(1)=0 \Rightarrow e^{-1}\left[\frac{53}{49}\cos\sqrt{3} + c_2 \sin\sqrt{3}\right) + \frac{3}{49}e = 0$

$\Rightarrow c_2 e^{-1}\sin\sqrt{3} = -\frac{3}{49}e - e^{-1}\frac{53}{49}\cos\sqrt{3}$

$\Rightarrow c_2 = \left(-\frac{3e + 53\cos\sqrt{3}\,e^{-1}}{49}\right)\cdot\frac{1}{e^{-1}\sin\sqrt{3}}$

$\Rightarrow c_2 = -\frac{3e^2 + 53\cos\sqrt{3}}{49\sin\sqrt{3}}$ 0,5 Alors

$h(x) = e^{-x}\left(\frac{53}{49}\cos\sqrt{3}x - \frac{3e^2+53\cos\sqrt{3}}{49\sin\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$

4) $t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t\ln t$

* $g(x) = f(e^x)$ on vérifie que g est solution de (E)

On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et 0,5 $g''(x) = e^x f'(x) + e^{2x} f''(e^x)$,

donc : $g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^x f'(x) + e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x)$

$= e^{2x} f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + 4f(e^x)$ 0,5

$= e^x \ln e^x = x e^x$. Alors g est solution de (E)

* déduire une expression de f :

On a : g est solution de (E) alors

$g(x) = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$

et $g(x) = f(e^x)$, on suppose que $t = e^x \Rightarrow x = \ln t$ 0,5

alors $f(t) = g(\ln t)$ donc

$f(t) = \frac{1}{t}\left[c_1\cos(\sqrt{3}\ln t) + c_2\sin(\sqrt{3}\ln t)\right] + \frac{1}{7}\left(\ln t - \frac{4}{7}\right)t$ 0,5

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.