Centre Universitaire de Mila

Institut des Mathématiques et Informatique

LMD: Math + MI (1er année)

Analyse I

Année universitaire 2023/2024

Semestre I

Durée 1 h 30

09/06/2024

Examen de rattrapage

Exercice 1: (7.5 pts)

1) Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \text{ avec } a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$$ 2

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x\leq 1 \\ ax^2+c & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \\ \dfrac{dx^2+1}{x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

- Déterminer les nombres réels a, b, c et d pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$. 5,5

Exercice 2: (6 pts)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ definie par: $A=\left\{x_n\in\mathbb{R} \ / \ x_n=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}; \ n\in\mathbb{N}\right\}$.

1) Ecrire x_n sous la forme $x_n=a+\dfrac{1}{n+2}, (a\in\mathbb{R})$. 1,5

2) Montrer que A est une partie bornée dans $\mathbb{R}$. 1

3) Déterminer s'ils existent $\sup A$ et $\inf A$. Justifier la réponse. 3,5

Exercice 3: (6.5 pts)

1) a - Montrer que: $\forall x>0; \quad \dfrac{1}{x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$. 2

b - En déduire d'abord que: $\forall x>0; \quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$. 1

c - Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ où $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. 1,5

2) On considère les deux suites réelles suivantes:

$$u_1=\frac{1}{4} \text{ et } u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n, \quad \forall n\geq 2.$$

$$v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et qu'elles admettent la même limite, notée l. 2

Bon courage

Centre Universitaire de Mila

Analyse I Semestre I

Corrigé de l'examen de Rattrapage

Exercice 01 :

1) Calculer la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$, $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$

pour tout réel u : on a : $u - 1 < E(u) \leq u$, d'où

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$ 0,5 et par suite :

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $b - x < x E\left(\frac{b}{x}\right) \leq b$ et

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $b - x > x E\left(\frac{b}{x}\right) \geq b$. 0,5 On en déduit :

$\lim_{x \to 0} x E\left(\frac{b}{x}\right) = b$ 0,5 puis $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$.

Alors : $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$ 0,5

2) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + c & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{dx^2 + 1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ 0,5

on a : $f(x)$ est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

Dérivabilité f en $x_0 = 1$:

f continue en $1 \Leftrightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) = a + b$

$\Leftrightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} 1} (ax + b) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} (ax^2 + c) = a + b$

$\Rightarrow a + c = a + b \Rightarrow c = b$ 0,5

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{ax + b - a - b}{x - 1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{a(x-1)}{x - 1} = a$ 0,5

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{ax^2 + c - a - b}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{ax^2 - a + c - c}{x - 1}$

$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{a(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{a(x-1)(x+1)}{x - 1} = 2a$ 0,5

f dérivable en $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$\Rightarrow a = 2a \Rightarrow a = 0$ 0,5

Dérivabilité de f en $x_0 = 2$:

f continue en 2 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = f(2) = 4a + c = c$

$$\Rightarrow \lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{dx^2+1}{x} = \lim_{x \underset{<}{\to} 2} (ax^2+c) = c$$

$$\Rightarrow c = \frac{4d+1}{2} \quad (\text{Car } a = 0) \quad 0{,}5$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{ax^2+c-c}{x-2} = 0 \quad (\text{Car } a=0) \quad 0{,}5$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{\frac{dx^2+1}{x} - c}{x-2} = \lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{\frac{dx^2+1}{x} - \frac{4d-1}{2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{2dx^2+2-4dx-x}{2x(x-2)} = \lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2dx-1)}{2x\cancel{(x-2)}}$$

$$= \frac{4d-1}{4}. \quad 0{,}5$$

f dérivable en $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$\Rightarrow \frac{4d-1}{4} = 0 \Rightarrow 4d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{4} \quad 0{,}5$$

On a : $c = \frac{4d+1}{2} \Rightarrow c = \frac{4 \times \frac{1}{4} + 1}{2} = 1 = b$. Alors
0,5 0,5

$$a = 0,\ b = 1,\ c = 1 \text{ et } d = \frac{1}{4}.$$

Exercice 02 : $A = \{x_n \in \mathbb{R},\ x_n = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\}$

1) Ecrire x_n sous la forme $x_n = a + \frac{1}{n+2}$

On a : $x_n = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} = a + \frac{1}{n+2} \Rightarrow \frac{n+2-2n-2}{2(n+2)} = a + \frac{1}{n+2}$ 0,5

$$\Rightarrow \frac{-n}{2(n+2)} = a + \frac{1}{n+2} \Rightarrow a = \frac{-n}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2}$$
0,5

$$\Rightarrow a = \frac{-n-2}{2(n+2)} = -\frac{1}{2}. \text{ Alors :}$$

0,5

$$x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$$

2) Montrer que : A est bornée : 0,5

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq 0 \Rightarrow n+2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \leqslant 0 \quad 0{,}5$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$; $-\frac{1}{2} < u_n \leq 0$. Donc A est bornée.

3) Déterminer $\operatorname{Sup} A$ et $\inf A$:

On a : A bornée $\Longrightarrow \operatorname{Sup} A, \inf A$ existent, et on a 0,5

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0 \Longrightarrow 0$ est un majorant de A et 0,5

$u_0 = 0 \in A \Longrightarrow \operatorname{Max} A = 0 \Longrightarrow \operatorname{Sup} A = 0$ 0,5

Montrons que $\inf A = -\frac{1}{2}$ 0,5. En utilisant la suite (u_n)

On a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$= \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)} < 0$ 0,5, Alors

la suite (u_n) est décroissante, de plus elle est minorée par $(-\frac{1}{2})$ $(u_n > -\frac{1}{2}) \Longrightarrow (u_n)$ est convergente vers l

et $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \inf(u_n) = \inf(A)$ 0,5 mais $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

Alors : $\inf A = -\frac{1}{2}$ 0,5

Exercice 03 :

1) a- Montrer que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

On considère la fonction $f(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$.

La fonction f est continue 0,5 sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, on a : $\exists c \in]x, x+1[$ 0,5, $f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$

$\Longrightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x)$ 0,5

$\Longrightarrow \frac{1}{c} = \ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(1 + \frac{1}{x})$

et on a : $c \in]x, x+1[\Longrightarrow x < c < x+1$

$\Longrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ 0,5

$\Longrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$

b- En déduire que : $\forall x > 0$, $(1+\frac{1}{x})^x < e < (1+\frac{1}{x})^{x+1}$

de (a), on a : $\forall x > 0$: $\frac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

$\Longrightarrow x < \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})} < x+1$ 0,5

$\Rightarrow n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 < (n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n})^n < 1 < \ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 0,5

$\Rightarrow e^{\ln(1+\frac{1}{n})^n} < e < e^{\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$

$\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$; $\forall n>0$

c- Calcule la limite :

On a : $\forall n>0$, $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. En particulière

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 0,5

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n < e \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n < e$ ....(*)

et on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow e < (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*$, $e < a_n(1+\frac{1}{n}) \Rightarrow a_n > \frac{e}{(1+\frac{1}{n})}$ 0,5

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{(1+\frac{1}{n})} = e$ ....(**)

de (*) et (**) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$ 0,5

2) i) $U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n-1} + \ln n$

$= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - [\ln(n+1) - \ln n]$

$= \frac{1}{n} - \ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) > 0$ (D'après (1))

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. 0,5

ii) $v_{n+1} - v_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \cdots - \frac{1}{n} + \ln n$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$ (Car $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n})$)

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. 0,5

De plus : $v_n - U_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - U_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. 0,5

Alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

0,5

Par conséquent, elles convergent vers la même limite l ($\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$).