Centre Universitaire de Mila — Année universitaire 2023/2024

Institut des Mathématiques et Informatique — Semestre I

LMD: Math + MI (1^{er}année) — Durée 1 h 30

Analyse 2 — 27/05/2024

Examen

Exercice 1: (6.5 pts)

1) Calculer les développements limités jusqu'à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes:

$$f(x) = \ln(1+\sin x); \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$$ 1,5

$$g(x) = \frac{e^x \cos x - 1}{x}; \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$$ 2

2) Montrer que:

$$\forall x \in [0,1]; \quad \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$ 2

3) Calculer la limite suivante, en utilisant le développement limité:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\sin 3x}{sh(-2x)}.$$ 1

Exercice 2: (6.5 pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $y' + 2xy = x, \qquad y(0) = 1.$ 3

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x - 4, \qquad y(0) = 1, \; y'(0) = 3.$ 3,5

Exercice 3: (7 pts)

1) Calculer les primitives suivantes:

$$I_1 = \int \frac{1}{3+e^{-x}}dx \quad , \qquad I_2 = \int \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}dx.$$ 1,5 — 2,5

2) On considère l'intégrale définie $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) À l'aide d'une intégration par parties trouver une relation entre J_n et J_{n+1}. 2

b) En déduire la valeur de J_2. 1

Bon courage.

Centre Universitaire de Mila

Analyse II — Semestre II

Corrigé de l'examen

Exercice 01:

1) les developpements limités:

*) $f(x) = \ln(1+\sin x)$, $x_0 = 0$, $n = 3$

On a: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 0,5 $\Rightarrow f(x) = \ln(1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))$

$\Rightarrow f(x) = \ln(1+z)$ avec $z = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ (si $x \to 0$, $z \to 0$)

$\Rightarrow f(x) = \ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$ 0,5

$= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{6}x^3)^3 + o(x^3)$

$= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

Alors $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 0,5

*) $g(x) = \dfrac{e^x \cos x - 1}{x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

On a: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ 0,5 et $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. 0,5

$g(x) = \dfrac{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4)(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) - 1 + o(x^4)}{x}$ 0,5

$= \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - 1}{x}$

$= \dfrac{x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. 0,5

Alors: $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

2) Montrer que: $\forall x \in [0,1]$, $\arcsin\sqrt{1-x^2} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Soit $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ 0,5, $\forall x \in [0,1]$

f est définie et dérivable sur $[0,1]$, et on a:

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 0,5

$= \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, alors: $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow f$ est constante sur $[0,1]$. 0,5

$f(0) = \text{Arc}\sin 1 + \text{arc}\sin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$ 0,5 Donc

$\forall x \in [0,1]$, $\text{arc}\sin\sqrt{1-x^2} + \text{arc}\sin x = \frac{\pi}{2}$

3) Calculer la limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\sin 3x}{Sh(-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x+o(3x))(3x+o(3x))}{-2x+o(x)} \quad 0{,}5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{-2x+o(x)} = -\frac{3}{2} \quad 0{,}5$$

Exercice 02:

Résoudre les équations différentielles:

1) $y' + 2xy = x$ ... ①

- La solution homogène (y_H):

$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2x\,dx$ 0,5

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C \Rightarrow y_H = Ke^{-x^2}$, $K = \pm e^C$ 0,5

- La solution particulière (y_p):

posons: $y_p = K(x)e^{-x^2}$ 0,5 $\Rightarrow y_p' = K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2}$

Remplaçons y_p et y_p' dans ①:

$K'(x)e^{-x^2} \cancel{- 2xK(x)e^{-x^2}} \cancel{+ 2xK(x)e^{-x^2}} = x \Rightarrow K'(x)e^{-x^2} = x$

$\Rightarrow K'(x) = xe^{x^2} \Rightarrow K(x) = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Alors

$y_p = \frac{1}{2}e^{x^2}\cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2}$. 0,5

La solution générale y est: $y = y_H + y_p \Rightarrow$

$y = Ke^{-x^2} + \frac{1}{2}$. 0,5

pour $y(0) = 1$: on a $y(0) = K + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$. Alors 0,5

$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x - 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x - 4$ --- ②

On recherche sur y_H:

$y'' + y' - 2y = 0$, on pose $y_H = e^{rx} \Rightarrow y_H' = re^{rx}$ et $y_H'' = r^2e^{rx}$

$(r^2+r-2)e^{rx}=0 \Rightarrow r^2+r-2=0$ On a : $\Delta = 1+8 = 9 > 0$

Donc $r_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ (0,5), $r_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$. Alors

$$y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \text{ (0,5)} ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On recherche : la solution particulière y_p :

$y_p = ax^2+bx+c$ (0,5) $\Rightarrow y_p' = 2ax+b$ et $y_p'' = 2a$.

Remplaçons y_p, y_p' et y_p'' dans (2)

$2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = 2x^2 - 2x - 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = -2 \\ 2a + b - 2c = -4 \end{cases} \text{ (0,5) } \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} . \text{ Alors}$$

$$y_p = -x^2 + 1 \text{ (0,5)}$$

La solution générale de (2) est :

$$y = y_H + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - x^2 + 1 , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ (0,5)}$$

* pour $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \text{ (0,5) } \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

Alors : $y = -e^{-2x} + e^{x} - x^2 + 1$ est la solution pour $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 03 :

1) Calculer les primitives :

*) $I_1 = \int \frac{1}{3+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{3e^x+1}\,dx$ (0,5), on pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ (0,5)

$$I_1 = \int \frac{e^x}{3e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{3t+1}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3t+1}\,dt = \frac{1}{3}\ln|3t+1| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3e^x+1| + c \text{ (0,5)}$$

*) $I_2 = \int \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,dx$, on pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$ (0,5)

$$\Rightarrow I_2 = \int \frac{1}{6-5t+t^2}\,dt \text{ (0,5)} = \int \frac{1}{(t-2)(t-3)}\,dt$$

$$\frac{1}{(t-2)(t-3)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t-3} = \frac{at-3a+bt-2b}{(t-2)(t-3)} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -3a-2b=1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow a=-1$ et $b=1$. Alors 0,5

$$I_2 = \int \frac{1}{(t-2)(t-3)}\,dt = -\int \frac{1}{t-2}\,dt + \int \frac{1}{t-3}\,dt$$

$$= -\ln|t-2| + \ln|t-3| + C = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right| + C \quad 0,5$$

$$= \ln\left|\frac{\sin x - 3}{\sin x - 2}\right| + C. \quad 0,5$$

2) $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) $\begin{cases} f' = 1.\,dx \\ g = \frac{1}{(1+x^2)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = x \\ g' = \frac{-2nx(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}}\,dx = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \end{cases}$ 0,5

$$J_n = \left.\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \quad 0,5$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{\cancel{x^2+1}}{(x^2+1)^{\cancel{n+1}}}\,dx - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \Longrightarrow \quad 0,5$$

$$J_n = \frac{1}{2^n} + 2n\,J_n - 2n\,J_{n+1} \Longrightarrow J_{n+1} = \frac{1}{2n2^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n$$

Alors $J_{n+1} = \frac{1}{2n2^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n$ 0,5

b) $J_2 = \frac{1}{2\times 2} + \frac{1}{2}J_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ 0,5

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left.\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Alors: $J_2 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$. 0,5