المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة
معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم المالية والمحاسبة

التصحيح النموذجي لمادة الإحصاء 4

السنة الثانية LMD **2024/2023**

1- علاقة الحد الأدنى لكرامرراو بمعلومة فيشر:

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{1}{\boldsymbol{-n.E\left(\frac{\partial^2 Ln\ f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right)}} \quad \dots\dots\dots\dots.\boldsymbol{01pt}$$

2- دالة الكثافة لـ $\boldsymbol{X}$ هي:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} \quad \dots\dots.\boldsymbol{0.5\ pt}$$

وبإدخال اللوغاريتم نجد:

$$lnf(x,\theta) = -ln\theta - \frac{x}{\theta} \quad \dots\dots.\boldsymbol{0.5\ pt}$$

وبالتالي:

$$\frac{\boldsymbol{\partial\ ln\ f(x,\theta)}}{\boldsymbol{\partial\theta}} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{\partial^2 ln\ f(x,\theta)}}{\boldsymbol{\partial\theta^2}} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3} \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

وبذلك قيمة معلومات فيشر هي:

$$\boldsymbol{I(\theta)} = -E\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}\right) = -\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2E(X)}{\theta^3}\right] = -\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2\theta}{\theta^3}\right] = \boldsymbol{\frac{1}{\theta^2}} \quad \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

3-

$$\boldsymbol{X \sim P(\theta) = \frac{e^{-\theta}.\theta^x}{x!}} \quad \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

من توزيع بواسون لدينا: $E(x) = \theta\ , V(x) = \theta$

$$Lnf(x,\theta) = lne^{-\theta} + ln\theta^x - lnx! \quad \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

$$= -\theta + x\ ln\theta - lnx!$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = -1 + \frac{x}{\theta} = \frac{x-\theta}{\theta} \quad \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 = E\left[\frac{x-\theta}{\theta}\right]^2 = E\left(\frac{[x-\theta]^2}{\theta^2}\right) \qquad \boldsymbol{0.5\ pt}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}E[x-\theta]^2$$

$$= \frac{1}{\theta^2}E[x-E(x)]^2$$

$$= \frac{1}{\theta^2}.V(x) \dots\dots\boldsymbol{0.5\ pt}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}.\theta$$

$$= \frac{1}{\theta} \qquad \boldsymbol{0.5\ pt}$$

$$\Longrightarrow V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n.E\left[\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right]^2} = \frac{1}{n\frac{1}{\theta}} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{n}} \quad \ldots\ldots \mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt}$$

وبذلك:

$$V(\hat{\theta}) = V(\bar{x}) = \frac{V(x)}{n} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{n}} \quad \ldots\ldots \mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt}$$

ومنه $\bar{X}$ مقدر كفؤ لـ θ.

4- الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني:

- **الخطأ من النوع الأول:** وهو الخطأ الناتج عن رفض الفرضية $\mathbf{H_0}$ وهي في الأصل صحيحة ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha = P(H_0}\ \text{رفض}\ /\mathbf{H_0}\text{صحيحة}) \ \ldots\ldots \mathbf{0.5\ pt}$$

- **الخطأ من النوع الثاني:** وهو الخطأ الناتج عن قبول الفرضية $\mathbf{H_0}$ وهي في الأصل خاطئة ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{\beta}$.

$$\boldsymbol{\beta = P(H_0}\ \text{قبول}\ /\mathbf{H_0}\text{خاطئة}\ ) \ \ldots\ldots \mathbf{0.5\ pt}$$

-5

شكل الاختبار:

$$\begin{cases} \mathbf{H_0}: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{900} \\ \mathbf{H_1}: \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{900} \end{cases} \qquad \mathbf{0.5\ pt}$$

القيم الحرجة (الجدولية) سوف تكون:

$$-\boldsymbol{Z}_{\frac{\alpha}{2}} = -\mathbf{1.96} \qquad\qquad \boldsymbol{Z}_{\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$$

أما قيمة إحصائية الاختبار تكون مساوية إلى:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{870 - 900}{\sqrt{(15)^2/50}} = \mathbf{-14.4} \quad \ldots\ldots \mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt}$$

قيمة $\boldsymbol{Z}$ المحسوبة أقل من القيم الجدولية، ومنه نرفض الفرضية H_0 (ونقبل الفرضية H_1) وبالتالي إدعاء المستهلكين يعتبر صحيحا. **0.5 pt**

-6 تحديد حجم العينة اللازم:

$$\boldsymbol{\epsilon} \geq \boldsymbol{Z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\boldsymbol{\sigma^2}/\boldsymbol{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.96\sqrt{4/n} \Rightarrow \boldsymbol{n} \approx \mathbf{61} \qquad \mathbf{0.5\ pt}$$

-7 مجال الثقة:

بما أن الأجور تتوزع توزيعا طبيعيا بتباينين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتين لأنّ كل عينة خاصة بفئة معينة من المهندسين فإن مجال الثقة في هذه الحالة هو:

$$(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - \boldsymbol{t}_{\frac{\alpha}{2},\vartheta}\sqrt{\boldsymbol{S_P^2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_2}}\right)} \leq (\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}) \leq (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) + \boldsymbol{t}_{\frac{\alpha}{2},\vartheta}\sqrt{\boldsymbol{S_P^2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_2}}\right)} \qquad \boldsymbol{02\ pt}$$

ولحساب هذا المجال يجب حساب كل من: $\bar{\mathbf{X}}_1$، $\bar{\mathbf{X}}_2$، $\mathbf{S_1^2}$، $\mathbf{S_2^2}$، $\mathbf{S_P^2}$.

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \frac{\sum \boldsymbol{X_{1i}}}{\boldsymbol{n_1}} = \mathbf{31,9} \qquad\qquad \bar{\mathbf{X}}_2 = \frac{\sum \boldsymbol{X_{2i}}}{\boldsymbol{n_2}} = \mathbf{32,1}$$

$$\mathbf{S_1^2} = \frac{\sum(\boldsymbol{X_{1i}} - \bar{\boldsymbol{X}}_1)^2}{\boldsymbol{n_1} - \mathbf{1}} = \mathbf{6.806} \qquad\qquad \mathbf{S_2^2} = \frac{\sum(\boldsymbol{X_{2i}} - \bar{\boldsymbol{X}}_2)^2}{\boldsymbol{n_2} - \mathbf{1}} = \mathbf{3.408}$$

$$\mathbf{S_P^2} = \frac{(\boldsymbol{n_1}-\mathbf{1})\boldsymbol{S_1^2}+(\boldsymbol{n_2}-\mathbf{1})\boldsymbol{S_2^2}}{(\boldsymbol{n_1}-\mathbf{1})+(\boldsymbol{n_2}-\mathbf{1})} = \frac{(7-1)\ 6.806+(6-1)\ 3.408}{(7-1)+(6-1)} = \mathbf{5.261} \qquad \mathbf{01.5\ pt}$$

وحيث أن:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2},\vartheta} = t_{0.025,11} = 2.201 \quad \text{0.5 pt}$$

وبالتالي:

$$-0.2 - 2.201\sqrt{5.261\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)} \leq (\mu_1-\mu_2) \leq -0.2 + 2.201\sqrt{5.261\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$-3{,}008 \leq (\mu_1-\mu_2) \leq 2{,}608 \quad \text{0.5 pt}$$

8- الحالات المختلفة لتوزيع المعاينة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين موزعين توزيعا طبيعيا:

يجب أيضا أن نفرق بين 03 حالات:

❖ **σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:**

يكون توزيع الفرق بين متوسطي عينتين هو:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \quad \text{0.5 pt}$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{0.5 pt}$$

❖ **σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و n_1 و n_2 كبيرين:**

في هذه الحالة نستبدل σ_1^2 و σ_2^2 بـ تبايني العينتين S_1^2 و S_2^2 ، وتوزيع الفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي. 0.5

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right) \quad \text{0.5 pt}$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{0.5 pt}$$

❖ **σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و n_1 و n_2 صغيرين أو أحدهما صغير:**

في هذه الحالة توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $(\vartheta = n_1+n_2-2)$، أي:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \sim t(n_1+n_2-2) \quad \text{0.5 pt}$$

أما إحصائية ستودنت فتكون:

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)}} \sim t(n_1+n_2-2) \quad \text{0.5 pt}$$

- **حالة خاصة: عندما يكون $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$**

عندما يكون حجما العينتين صغيرا أو أحدهما صغير مع العلم أنّ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ فإننا نقدر σ^2 بـ S_p^2 حيث S_p^2 تحسب من العلاقة: 0.5

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \quad \text{0.5 pt}$$

أما إحصائية ستودنت فتكون:

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1+n_2-2) \quad 0.5$$

في حالة السحب بدون ارجاع ندخل معامل التصحيح في حساب التباينات في الحالات السابقة.