Chapitre II : Précision des systèmes asservis

II.1 Introduction

La précision d'un asservissement, en régime permanent, est définie par l'écart permanent ε(t) qui existe entre la sortie réelle et la consigne (sortie désirée).

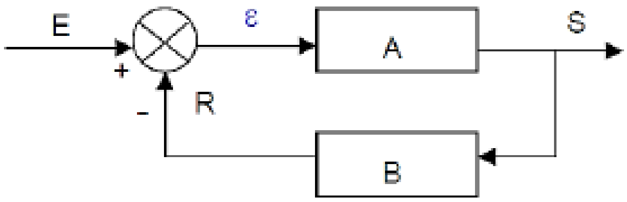


Figure 2.1 : Schéma bloc d'un asservissement.

Plus le signal d'erreur ε(t) est plus faible, plus le systéme est précis. L'idéal serait que l'on ait : $\varepsilon(t) = 0, \forall t$.

Calculons l'erreur statique d'après le schéma de la figure 2.1 :

$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)$ Or $R(p) = S(p) . B(p)$ et $S(p) = \varepsilon(p) . A(p)$

Donc : $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p) . A(p) . B(p) \rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+A(p).B(p)}$

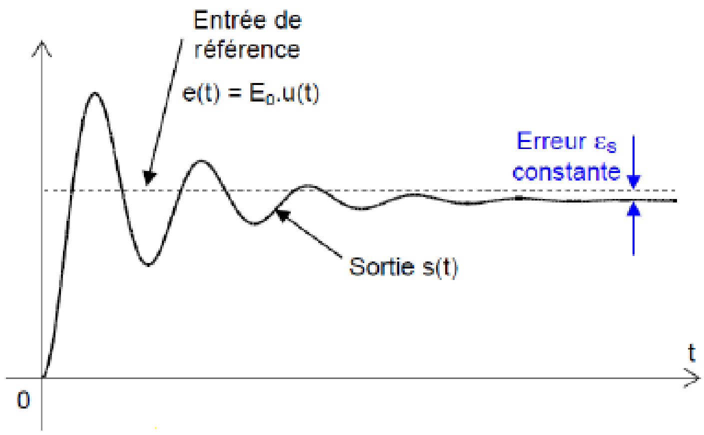
D'après le théorème de la valeur finale :$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p.F(p)$, donc l'erreur statique ε_s sera donnée par : $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p)$.

Ou encore :

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+A(p).B(p)}\right) = \lim_{p\to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)}\right) \qquad \textit{Erreur statique}$$

II.2 Erreur statique (ou de position) pour une entrée échelon

Il s'agit de l'erreur qui subsiste en régime permanent de la réponse indicielle d'un systéme (réponse à un échelon $E(p) = \frac{E_0}{p}$)



Erreur statique pour une entrée échelon

Si l'entrée vaut : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}\right) = \frac{E_0}{1 + \lim_{p \to 0} FTBO(p)}$$

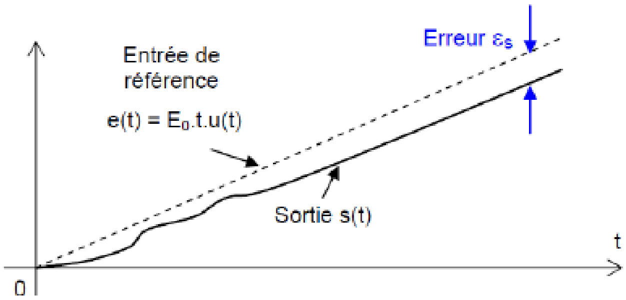
$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K_e}$$

Avec $K_e = \lim_{p \to 0} FTBO(p)$ = *Constante d'erreur statique d'échelon*

ou gain statique en Boucle ouverte

II.3 Erreur statique pour une entrée rampe (erreur de vitesse ou de traînage)

Il s'agit de l'erreur qui subsiste en régime permanent de la réponse à une entrée rampe d'un systéme : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$.



Erreur statique pour une entrée rampe

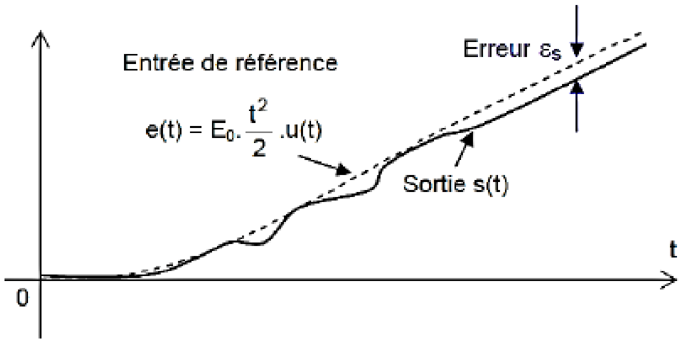
Si l'entrée vaut : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{E_0}{p+p.FTBO(p)}\right) = \frac{E_0}{\lim\limits_{p\to 0} p.FTBO(p)}$$

$\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_v}$ Avec $K_v = \lim\limits_{p\to 0} p.FTBO(p)$ = *Constante d'erreur statique de vitesse*

II.4 Erreur statique pour une entrée parabolique (erreur d'accélération)

Il s'agit de l'erreur qui subsiste en régime permanent de la réponse à une entrée du type parabole (accélération) d'un systéme : $E(p) = \frac{E_0}{p^3}$.



erreur statique pour une entrée parabole

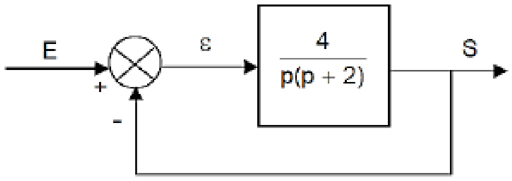
Si l'entrée vaut : $E(p) = \frac{E_0}{p^3}$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{E_0}{p^2+p^2.FTBO(p)}\right) = \frac{E_0}{\lim\limits_{p\to 0} p^2.FTBO(p)}$$

$\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_a} = cte$ Avec $K_a = \lim\limits_{p\to 0} p^2.FTBO(p)$ = *Constante d'erreur statique d'accélération*

<u>Exemple :</u>

Sois le systéme asservis représenté par le schéma bloc suivant :



Calculons ses différentes erreurs statiques pour des entrées en échelon, rampe et parabole. Tout d'abord assurons-nous de la stabilité du systéme, pour cela, nous utiliserons le critere de Routh :

$$FTBO(p) = \frac{4}{p(p+2)} = \frac{2}{p(1+\frac{p}{2})} \quad \rightarrow \quad FTBF(p) = \frac{\frac{2}{p(1+\frac{p}{2})}}{1+\frac{2}{p(1+\frac{p}{2})}} = \frac{1}{\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+1}$$

p^2	:	1/4	1
p^1	:	1/2	0
p^0	:	1	

Tous les termes de la $1^{ère}$ colonne sont de même signe

→ système stable

Calculons les différentes erreurs :

- Gain statique en boucle fermée : $K_s = \lim_{p \to 0} FTBF(p) = 1$
- Entrée échelon : $\varepsilon_s = \lim_{p \to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)}\right) = 0$ avec $E(p) = 1/p$ $(E_0 = 1)$

  Ou alors : $K_e = \infty$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+K_e} = 1/\infty = 0$
- Entrée vitesse : $\varepsilon_s = \lim_{p \to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)}\right) = 1/2$ avec $E(p) = 1/p^2$ $(E_0 = 1)$

  Ou alors : $K_v = K = 2$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_v} = 1/2$
- Entrée accélération : $\varepsilon_s = \lim_{p \to 0}\left(p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)}\right) = \infty$ avec $E(p) = 1/p^3$ $(E_0 = 1)$

II.5 Erreur statique d'un système comportant un (ou plusieurs) intégrateurs (pôles nuls)

Sois un système représenté par une fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placée dans une boucle à retour unitaire, mais cette fois-ci, avec :

$$G(p) = \frac{K}{p^{\alpha}\left(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n\right)}$$

Le paramètre α est un entier positif non nul.

La fonction de transfert en boucle fermée est donc égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + p^{\alpha}\left(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n\right)}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \to 0} \left[1 - \frac{K}{K + p^{\alpha}\left(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n\right)}\right]$$

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{K}{K} = 0$$

- Conclusion : **L'erreur statique en boucle fermée d'un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte comporte au moins un integrateur (pôle nul), est nulle.**

Exercice 1:

Considèrons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{100}{(1 + 10p)(10 + p)}$$

- Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Exercice 2:

Considèrons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{10}{p\,(p+1)^2}$$

- Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Solution :

Exercice 1:

La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{100}{(1 + 10p)(10 + p) + 100}$$

Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{100}{10 + 100} = 0{,}091 = 9{,}1\ \%$$

Par ailleurs, l'erreur de vitesse est définie par :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} \left[\frac{1 - H(p)}{p}\right] = \lim_{p \to 0} \frac{0{,}091}{p} \longrightarrow +\infty$$

Exercice 2:

La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p)=\frac{G(p)}{1+G(p)}=\frac{10}{p\,(p+1)^2+10}$$

Vu que le systéme posséde un intgrateur, vérifions que l'erreur statique est nulle :

$$\varepsilon_p=\lim_{p\to 0}[1-H(p)]=1-\frac{10}{10}=0$$

Par ailleurs, l'erreur de vitesse a pour expression :

$$\varepsilon_v=\lim_{p\to 0}\left[\frac{1-H(p)}{p}\right]=\lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{p}-\frac{10}{p^2\,(p+1)^2+10p}\right]$$

soit :

$$\varepsilon_v=\lim_{p\to 0}\left[\frac{p^2\,(p+1)^2+10p-10p}{p^3\,(p+1)^2+10\,p^2}\right]=\lim_{p\to 0}\left[\frac{(p+1)^2}{p\,(p+1)^2+10}\right]$$

d'où :

$$\varepsilon_v=0{,}1$$