التمرين 01: ليكن امامك الجدول الذي يمثل تغيرات الانفاق الاستهلاكي Y بدلالة الدخل X

$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})\times(Y-\bar{Y})$	$Y-\bar{Y}$	$X-\bar{X}$	Y	X
39,828	18921,83	776,434	0,00	0,00	1574,8	2817,9

أولا نقوم بحساب $\bar{X}$ و $\bar{Y}$:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{20}X_i}{n}=\frac{2817.9}{20}=140.895 \dots (1)$$

$$\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{20}Y_i}{n}=\frac{1574.8}{20}=78.74 \dots (1)$$

ثانيا نقوم بحساب المقدرات $\hat{\beta}_1$ ثم $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})^2}=\frac{776,434}{18921,83}\approx 0.041 \dots 1.5$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}=78.74-0.041\times 140.895=72.96 \dots (1)$$

ومنه؛ يمكننا كتابة النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_1X_i+\hat{\beta}_0$$

$$\hat{Y}_i=0.41X_i+72.96 \dots (1)$$

وبما أن $Y_i=\hat{Y}_i+\hat{\mu}_i$، يعني ذلك اننا نستطيع أن نستنتج من ذلك أن:

$$\hat{\mu}_i=e_i=Y_i-\hat{Y}_i$$

وهذا ما يسمح لنا بحساب القيم المقدرة لـ $\hat{Y}_i$، و ذلك فقط بتعويض قيم X_i في $\hat{Y}_i=0.041X_i+72.96$:

$\hat{Y}_i$	$\sum \hat{\mu}_i^2=7.9682$
$\hat{\mu}_i$	
$\hat{\mu}_i^2$	

نحسب الآن تباين البواقي بالاعتماد على القانون التالي كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}_i^2}{n-2}=\frac{\sum_{i=1}^{20}\hat{\mu}_i^2}{20-2}=\frac{7.9682}{18}\approx 0.44 \dots (1)$$

والان وباستخدام قيمة تباين البواقي $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2$، نستطيع حساب تباين المقدرات $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_0$ على التوالي كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2=var(\hat{\beta}_1)=\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}=\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2}{\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}=\frac{0.44}{776,434}$$

$$=0.000566 \dots (1)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2=var(\hat{\beta}_0)=\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2}{n}+\bar{X}^2\times\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2=\frac{0.44}{20}+(140.895)^2\times 0.000566=11.257$$

$$\approx 11.26 \dots (1)$$

وبعدما حسبنا التباينات الخاصة بكل من البواقي والمقدرات، نستطيع الأن حساب الأخطاء المعيارية، والذي يمثل الجذر التربيعي للتباينات كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{var(\hat{\beta}_1)}=\sqrt{0.000566}=0.237\approx 0.24 \dots (1)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}=\sqrt{var(\hat{\beta}_0)}=\sqrt{11.26}=3.355\approx 3.36 \dots (1)$$

وبعدنا حصولنا على الأخطاء المعيارية للمقدرات، نستطيع أخيرا بناء مجالات الثقة للمعالم كما يلي:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-2\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0};\ \hat{\beta}_0 + t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-2\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right] \dots (1)$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-2\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1};\ \hat{\beta}_1 + t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-2\right)} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right] \dots (1)$$

وبالتعويض في المجالين السابقين نجد:

$$\beta_0 \in [72.96 - 2.101 \times 3.36;\ 72.96 + 2.101 \times 3.36] \dots (1)$$

$$\beta_0 \in [65.9;\ 79.71] \dots 1/2$$

$$\beta_1 \in [0.041 - 2.101 \times 3.36;\ 0.041 + 2.101 \times 3.36] \dots (1)$$

$$\beta_1 \in [-7.02;\ 7.1] \dots 1/2$$

اختبار الفرضيات: بعدما تحصلنا على مجالات الثقة للمعلمات، نقوم الآن بإختبار الفرضيات كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases} \dots 1/2$$

حيث أن H_0 تسمى فرضية العدم، و H_1 تسمى الفرضية البديلة

لدينا:

$$t_c = \frac{0.041}{0.24} = 0.17 \dots 1/2$$

نلاحظ ما يلي:

$$|t_c| = 0.17 \leq 2.101 \dots 1/2$$

وعليه نقوم بقبول فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة والتي مفادها ان β_1 غير معنوي في النموذج..... (1)

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$$

$$t_c = \frac{72.96}{3.36} = 21.71 \dots 1/2$$

ولدينا:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-2\right)} = t_{\left(\frac{0.05}{2};20-2\right)} = t_{(0.025;18)} = 2.101$$

وعند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 2 = 20 - 2 = 18$ نلاحظ ما يلي:

$$|t_c| = 21.71 > 2.101 \dots 1/2$$

وعليه نقوم برفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 والتي مفادها ان β_0 معنوي في النموذج..... (1)