السلسلة رقم 02: الانحدار الخطي المتعدد

التمرين الأول:

لدينا:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1} \; X'Y$$

حيث تساوي كلا من المصفوفتين مايلي:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{pmatrix} ; X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i \end{pmatrix}$$

✓ نقوم بحساب كل عناصر المصفوفة من خلال الجدول الموالي:

1. حساب مقررات المعاملات بطريقة المربعات الصغرى مع التغيرات:

i	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{1i}^2	X_{2i}^2	$X_{1i}X_{2i}$	$X_{1i}Y_i$	$X_{2i}Y_i$
1	10	5	22	25	485	110	50	220
2	11	8	19	64	361	152	88	209
3	09	4	17	16	289	68	36	153
4	07	2	24	4	576	48	14	168
5	13	8	22	64	484	176	104	286
6	15	7	20	49	400	140	105	300
7	12	7	19	49	361	133	84	228
8	10	5	18	25	324	90	50	180
9	6	5	25	25	625	125	30	150
10	14	11	23	121	529	253	154	322
$\sum_{i=1}^{10}$	107	62	209	442	433	1295	715	2216

لدينا:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1} \; X'Y.$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 62 & 209 \\ 62 & 422 & 1295 \\ 209 & 1295 & 4439 \end{pmatrix} ; X'Y \begin{pmatrix} 107 \\ 715 \\ 2216 \end{pmatrix}$$

حساب وتحديد معكوس المصفوفة ولابد من حساب المحدد:

$$det(XX') = +10\begin{pmatrix} 442 & 1295 \\ -1295 & +4433 \end{pmatrix} - 62\begin{pmatrix} 62 & 1295 \\ 209 & 4433 \end{pmatrix} + 209\begin{pmatrix} 62 & 422 \\ 209 & 4433 \end{pmatrix}$$

$$det(XX') = 2823610 - 259842 - 2526342$$

$$det(XX') = 37376.$$

استخراج مرافق المرصوفة:

العمود الأول:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 442 & 1295 \\ 1225 & 4433 \end{pmatrix} = +282361$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 62 & 1295 \\ 209 & 4433 \end{pmatrix} = -4191$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 62 & 422 \\ 209 & 4433 \end{pmatrix} = +12088$$

العمود الثاني:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{pmatrix} 62 & 209 \\ 1295 & 4433 \end{pmatrix} = -4191$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{pmatrix} 10 & 209 \\ 209 & 4433 \end{pmatrix} = +649$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 10 & 209 \\ 62 & 1295 \end{pmatrix} = +8$$

العمود الثالث:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{pmatrix} 62 & 442 \\ 209 & 1295 \end{pmatrix} = +12088$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{pmatrix} 10 & 62 \\ 209 & 1295 \end{pmatrix} = +8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{pmatrix}10 & 62\\ 62 & 442\end{pmatrix} = -576$$

استخراج مرافق المصفوفة:

$$\text{Co}\,(X'X) = \begin{pmatrix}+282361 & -4191 & +12088\\ -4191 & +649 & +8\\ +12088 & +8 & -776\end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}XY' = \frac{1}{37376}\begin{pmatrix}+282361 & -4191 & +12088\\ -4191 & +649 & +8\\ +12088 & +8 & -776\end{pmatrix}\begin{pmatrix}107\\ 715\\ 2216\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11{,}4794\\ 0{,}8916\\ 0{,}3018\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\widehat{Y_t} = 11{,}4794 + 0{,}8916\,X_{1t} - 0{,}3018\;X_{2t}}$$

التفسير:

من خلال المعادلة نلاحظ أن المتغير Y له علاقة طردية مع X_1 حيث كلما ارتفع X_1 ب 10% سيؤدي ذلك إلى ارتفاع Y ب8,916 %.

كما نلاحظ وجود علاقة عكسية بين Y وX_2 حيث كلما ارتفع X_2ب 10% أدى إلى انخفاض Y ب 3.018% .

اختبار جودة النموذج المقدر من خلال جدول تحليل التباين مع حساب معامل التحديد.

i	Y_i	$\widehat{Y_t}$	e_i	e_i^x	$Y_t - \overline{Y}$	$(Y_t - \overline{Y})^2$	$\widehat{Y}_i - \overline{Y}$	$(\widetilde{Y}_t - \overline{Y})^2$
1	0	9.2979	0.7022	0.4930	-0.7	0.49	-1.4022	1.9661
2	11	12.878	-1.878	3.5268	0.3	0.09	2.178	4.7436
3	09	0.9152	-9.152	0.8375	-1.7	2.89	-0.7848	0.6169
4	07	6.0194	0.9806	0.9615	-3.7	13.69	-4.6806	21.9080
5	13	11.9726	1.0274	1.0555	2.3	5.29	1.2786	1.6195
6	15	11.6846	3.3154	10.998	4.3	18.49	0.9846	0.9694
7	12	11.9864	0.0136	0.0001	1.3	1.69	1.2864	1.6548
8	10	10.505	-0.505	0.2550	-0.7	0.49	-0.195	0.0380
9	6	8.3924	-2.3924	5.7235	-4.7	22.09	-2.3076	5.3250
10	14	14.3456	-0.3456	0.1194	3.3	10.89	3.6456	13.2903
$\sum$	107			23.9641		76.1		52.13

تشكيل جدول **ANOIA**

مصدر التغيير	مجموع مربعات الإنحرافات	عدد درجة الحرية	متوسط مربعات الإنحرافات
المتغيرات المستقلةx	**SCE=** $\sum_{t=1}^{n}(\widetilde{Y}_t - \overline{Y})^2 = 52.1306$	**K=2**	**SCE/k=52.1306/2= 26.06**
البواقي	**SCR=** $\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 23.9641$	**n-k-1=7**	**SCE/n-k-1= 3.4234**
المجموع	**SCT=** $\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2 = 76.1$	**n-1=9**	/

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع مربعات الانحراف المتغيرات المستقلة أكبر من مجموع مربعات انحرافات البواقي (SCR=23.9641) أي أن القدرة التغيرية مرتفعة.

ومنه: النموذج جيد.

حساب معامل التحديد R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{23.9641}{76.1}$$

$$R^2 = 1 - 0.3149$$

$$R^2 = 0.6851$$

$$R^2 = 68.51$$

التنبؤ بقيمة t=11، $X_{1,11} = 10$ ، $X_{2,11} = 19$

$$\widehat{Y}_{11} = 11.4794 + 0.8916(10) - 0.3018(19)$$

$$\widehat{Y}_{11} = 14.6612$$