Chapitre6 : La torsion

1. Définition

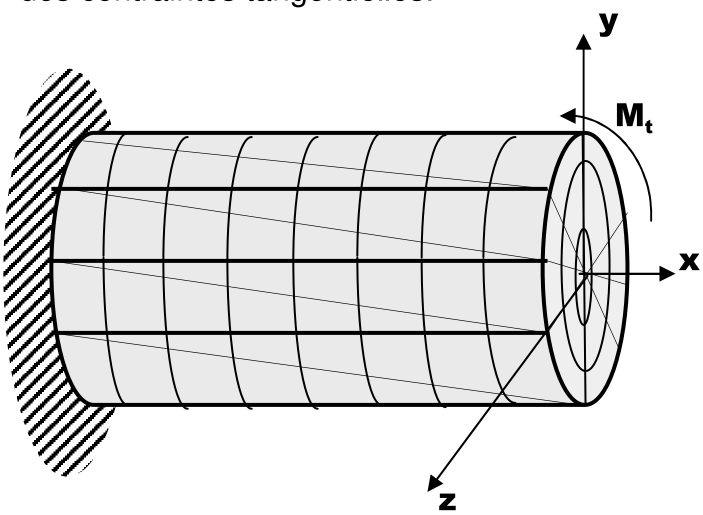
Une poutre ou un tronçon de poutre est dit soumis à la torsion simple si le torseur des efforts intérieur se résume à :

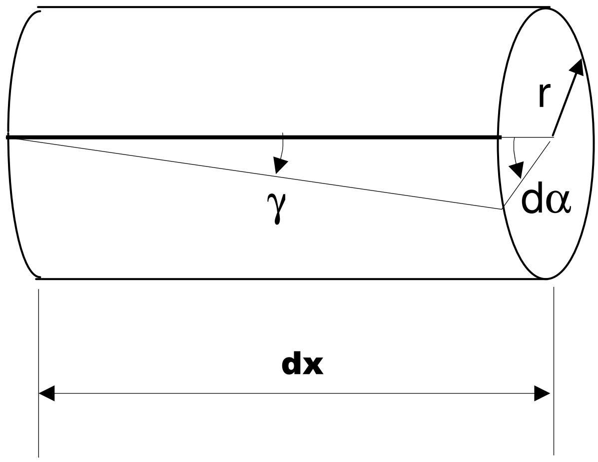
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ avec M_t : Moment de torsion autour de l'axe x.

Remarque : on ne considère dans ce cours que la torsion des poutres de section circulaire

2. Relation contrainte/déformation

Soit une poutre de section circulaire encastrée à une extrémité et soumise à son autre extrémité à un moment de torsion M_t. On constate expérimentalement que chaque section droite de la poutre tourne d'un angle proportionnel à son abscisse. Il n'y a pas de déformation longitudinale, donc pas de contrainte normale, il n'y a que des contraintes tangentielles.





L'angle de déformation γ est appelé distorsion, on tenant compte que γ est petit, on peut assimiler γ a tgγ et on obtient :

$$\gamma = r.\frac{d\alpha}{dx} = r.\theta$$

$\frac{d\alpha}{dx} = \theta$ est la rotation relative de la section droite située à l'abscisse dx

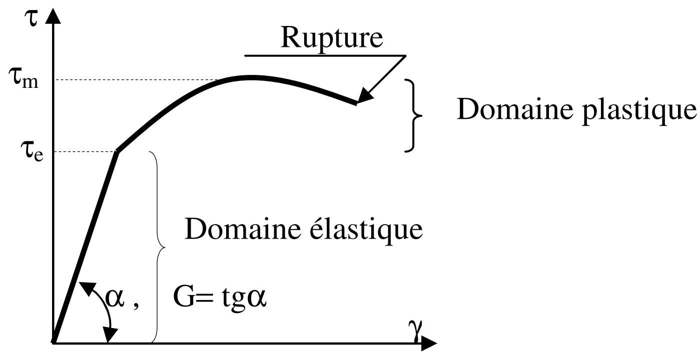
r est le rayon de la section.

Le diagramme issu de l'essai de torsion est semblable à celui issue de l'essai de traction, il comporte un domaine élastique et un domaine plastique.

Le domaine élastique est régit par la loi de Hook en cisaillement :

$$\tau = G.\gamma$$
$$\tau = G.r.\theta$$

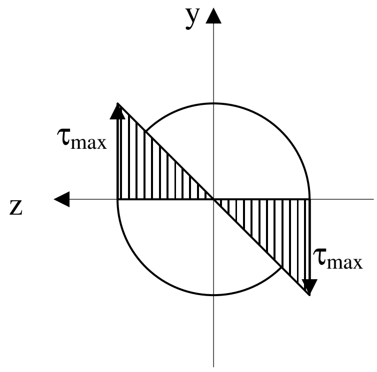
avec τ : la contrainte tangentielle
G : le module de cisaillement du matériau



On note que G est relié à E par la formule :

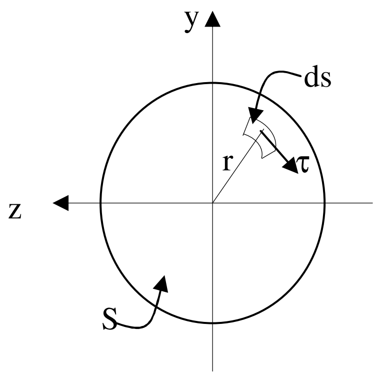
$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

ν est le coefficient de poisson



La formule $\tau = G.r.\theta$ donne aussi la répartition de la contrainte tangentielle sur la section droite de la poutre, la contrainte est nulle au centre et maximale sur la surface extérieure.

3. Relation contrainte/moment



Considérons un élément de surface ds d'une section droite d'une poutre soumise à un moment de torsion. Cet élément de surface situé à r du centre de la section est soumis à la contrainte tangentielle τ.

Le moment de torsion relatif à cet élément de surface ds est :

$$dM_t = \tau.ds.r$$

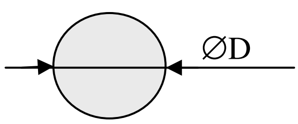
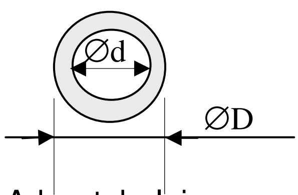
Or $\tau = G.r.\theta$, on obtient alors : $dM_t = G.r^2.\theta.ds$

Le moment total est obtenu en intégrant dM sur la surface S :

$$M_t = \int_S G.r^2.\theta.ds = G.\theta \int_S r^2.ds = \frac{\tau}{r}\int_S r^2.ds$$

Ou $M_t = \frac{\tau}{r}\cdot I_p$

$\int_S r^2.ds = I_p$ est le moment quadratique polaire de la section S et peut être calculé facilement.

Section	I_p
 Arbre plein	$\frac{\pi D^4}{32}$
 Arbre tubulaire	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

On trouve après intégration les expressions de I_p pour les sections les plus utilisées (tableau):

La contrainte maximale est atteinte pour r=R : $\tau_{max} = \frac{M_t.R}{I_p}$

4. Relation angle de rotation/moment

Soit à calculer l'angle de rotation d'une section droite situé à l'abscisse x.

$$\theta = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_t}{G.I_p}$$

Donc $\alpha = \int_0^x \frac{M_t}{G.I_p}.dx$

L'angle de rotation entre les sections droites extrêmes d'une poutre de longueur L est alors : $\alpha = \int_0^L \frac{M_t}{G.I_p}.dx = \frac{M_t.L}{G.I_p}$

5. Critères de dimensionnement

Comme pour la traction, deux critères peuvent être utilisés pour calculer les dimensions transversales d'une poutre soumise à la torsion simple :
Le critère en contrainte et le critère en rotation.
Le critère en contrainte impose que le matériau reste (avec un coefficient de sécurité) dans le domaine élastique.

$$\tau_{max} \leq \frac{\tau_e}{s}$$

Avec τ_{max} : contrainte maximale appliquée
τ_e : limite d'élasticité en cisaillement du matériau
s : coefficient de sécurité (≥ 1)

Quand au critère en rotation, il impose que la l'angle entre les sections extrêmes ne dépasse un angle limite donné.

6. Transmission de puissance

En mécanique, un arbre qui tourne à une vitesse angulaire ω (rad/s) et est sollicité par un moment de torsion M_t, transmet une puissance P telle que :

$$P = M_t.\omega = 2\pi.f.M_t$$

Avec f la vitesse de rotation en (nombre de tours /s)