Chapitre I : Fiabilité opérationnelle

I.1 Définition de la fiabilité

La fiabilité est la caractéristique d'un système exprimée par la probabilité qu'il accomplisse la fonction pour laquelle il a été conçu, dans des conditions données et pendant une durée donnée.[1]. La fiabilité est une des composantes de la sûreté de fonctionnement. Elle peut être définie comme : la science des défaillances‖. C'est l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise ou à satisfaire les besoins des utilisateurs, dans des conditions données, pendant une durée donnée [2], [3].

Elle s'appuie sur les fondements mathématiques, la statistique et le calcul des probabilités. Ces dernières sont nécessaires à la compréhension et à l'analyse des données de fiabilité.
La défaillance c'est-à-dire (la non fiabilité) augmente les coûts d'après-vente.
Construire plus fiable augmente les coûts de conception et de production, en pratique, le coût total d'un produit prend en compte ces deux tendances.

La fiabilité est une fonction décroissante du temps (Figure 1.1), de telle manière que $R(t_1)>R(t_2)$ si $t_1< t_2$

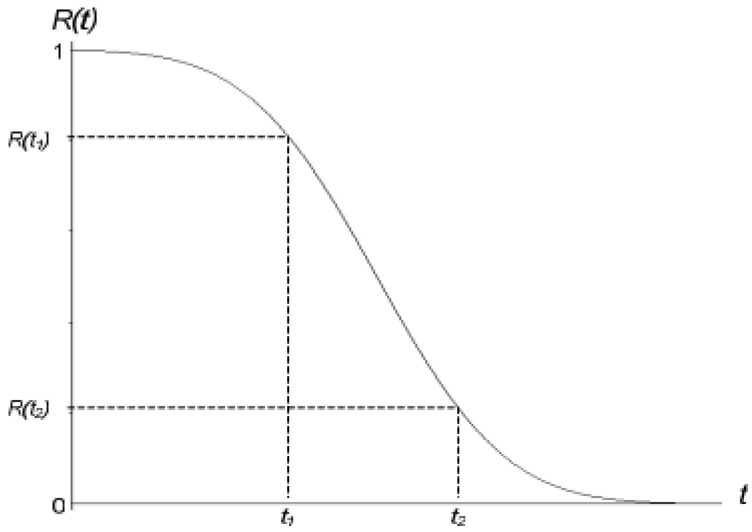


Figure 1.1 la fiabilité décroissante avec le temps [4].

I.2 Fiabilité opérationnelle

Elle résulte de l'observation et de l'analyse du comportement d'un certain nombre de dispositifs identiques, en conditions de fonctionnement réelles. En d'autres termes, il s'agit d'un traitement statistique d'un retour d'expérience. La probabilité moyenne issue de ce retour d'expérience n'a de sens qu'en considérant un nombre important de dispositifs La fiabilité opérationnelle est donc définie par :

$$R(t) = \frac{\text{nombre moyen d'entités non defaillantes à l'instant t}}{\text{nombre total d'entité[o,t]}} \qquad \text{(I.1)}$$

I.3 Indicateurs de fiabilité

I.3.1 Taux de défaillance λ

Le taux de défaillance, noté λ(t), est un indicateur de fiabilité qui représente :

- Soit un taux supposé constant de défaillance par unité d'usage exprimé sous la forme générale :

$$\frac{\text{Nombre de defaillances}}{\text{Durée d'usage}} \qquad \text{(I.2)}$$

- Soit la fonction λ(t) qui représente une proportion de survivants à l'instant t, tirée d'un échantillon.

Le taux de défaillance s'exprime le plus souvent en pannes par heure [6]

C'est la probabilité (0≤ R≤ 1) ; un produit doit accomplir de manière satisfaisante unefonction requise, sous des conditions données et pendant une période de temps donné.

L'écriture mathématique du taux de défaillance à l'instant t, noté λ(t), défini sur R est la suivante :

$$\lambda(t)= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t} . \frac{R(t)-R(t+\Delta t)}{R(t)}\right) \qquad \text{(I.3)}$$

Physiquement le terme λ(t), Δt mesure la probabilité qu'une défaillance d'un dispositif se produise dans l'intervalle de temps [t, +∞] sachant que ce dispositif a bien fonctionné à l'instant Δt.

I.3.2 Temps moyen de bon fonctionnement

Le MTBF (Meam Time Between Failure) est souvent traduit comme étant la moyenne des temps de bon fonctionnement mais représente la moyenne des temps entre deux défaillances. En d'autres termes, il correspond à l'Esperance de la durée de vie t.

$$\text{MTBF}= \int_0^\infty R(t) \qquad \text{(I.4)}$$

Physiquement le MTBF peut être exprimé par le rapport des temps

$$\text{MTBF}= = \frac{\text{Somme des temps de bon fonctionnement entre les n defaillances}}{\text{Nombre d'intervention de maintenance avec immobilisation}} \qquad \text{(I.5)}$$

$$\text{Si } \lambda \text{ est constant : MTBF} = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(I..6)}$$

Par définition le MTBF est la durée de vie moyenne du système [7]

I.4 Les différentes phases du cycle de vie d'un produit

Liée au problème de défaillances, la vie des équipements se présente en trois phases :

Phase de jeunesse : λ(t) décroît rapidement c'est la période de mise en service et de rodage de l'installation. Les défaillances sont dues à des anomalies ou imperfections de montage.

Phase de maturité : λ(t) est pratiquement constant est la période de vie utile ou la défaillance est aléatoire. Le taux de défaillance est constant ou légèrement croissant, correspondant au rendement optimale l'équipement.

Phase de vieillesse : λ(t) croit rapidement. C'est la période d'obsolescence, à dégradation accélérée Souvent, on trouve une usure mécanique de la fatigue, une érosion ou une corrosion. A un certain point de λ(t), le matériel est mort.

Le graphe représentant la variation du taux de défaillance, appelé « courbe en baignoire », possède trois allures différentes selon le matériel mécanique, matériel électrique ou matériel électronique (figure 1.2) [8]

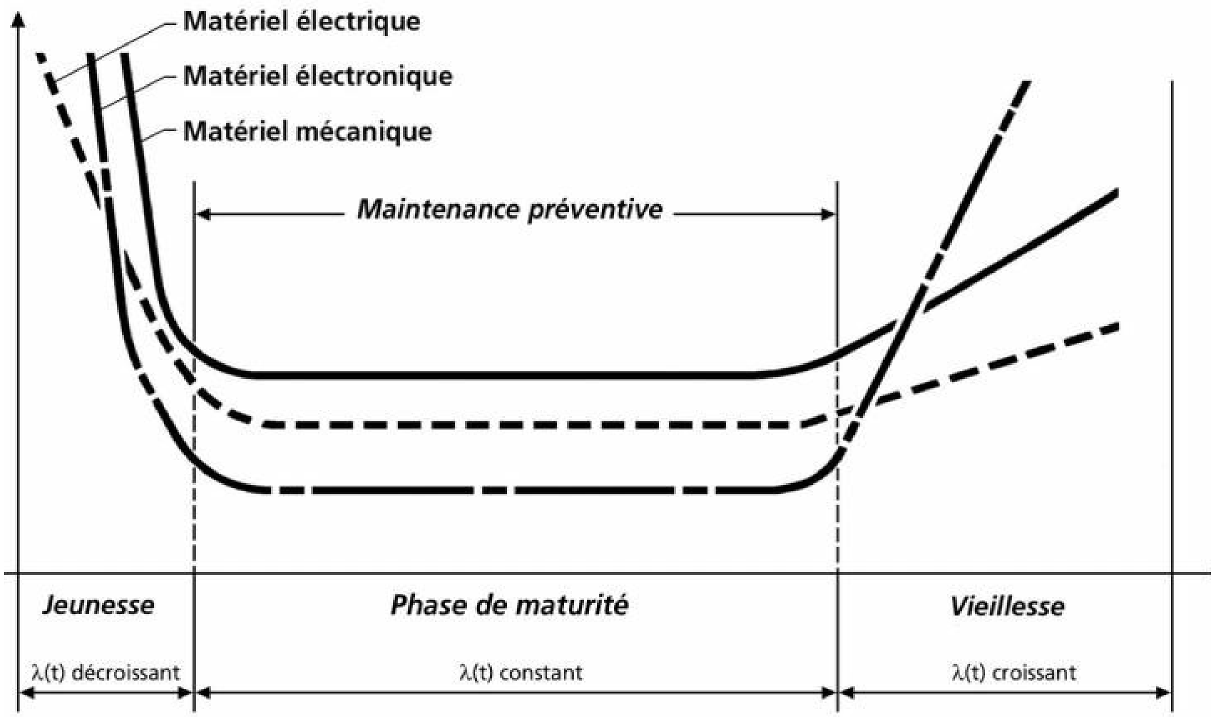


Figure 1.2 : Courbe en baignoire : taux de défaillance [8]

Les courbes du taux de défaillances figure1.2 ont une même forme générale mais présentent néanmoins des différences suivant la technologie du système étudié :

A- Electrique

B- Electronique

C- Mécanique

I.5 Evolution des couts en fonction de la fiabilité

La non fiabilité augmente les couts d'après-vente (garanties, frais judiciaires). Construire plus fiable, augmente les couts de conception et de production. Le cout total prend en compte ces deux contraintes [7].

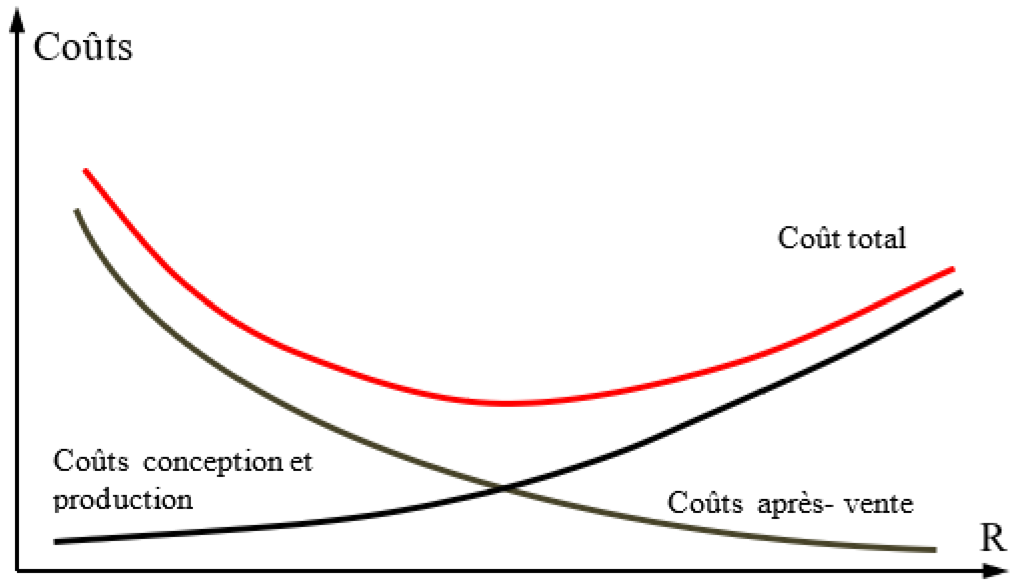


Figure 1.3 : Courbes d'évolution des coûts en fonction de la fiabilité [7]

La fiabilité d'une machine à tendance à diminuer avec le nombre de ses composants ou de leurs complexités. La maîtrise de la fiabilité devient donc plus délicate.

Chapitre II : Méthodes d’évaluation de la fiabilité

II.1 Introduction

Les systèmes complexes nécessitent des entités fiables. L’intégration de ces entités est un problème complexe qui demande un très haut niveau de vérification des propriétés structurelles, fonctionnelles, non-fonctionnelles ainsi que l’interactivité de ses composants et entités, ce qui est important quand on cherche notamment la fiabilité de ce système complexe.

II.2 Evaluation de la fiabilité

Il existe plusieurs techniques pour évaluer la fiabilité de systèmes, les techniques les plus utilisées sont :

II.2 .1 Arbre de défaillance

L’arbre de défaillance est une représentation graphique. Il est construit en recherchant l’ensemble des événements élémentaires ou les combinaisons d’événements, qui conduisent à un événement Redouté (ER). L’objectif est de suivre une logique déductive en partant d’un Evénement Redouté pour déterminer de manière exhaustive l’ensemble de ses causes jusqu’aux plus élémentaires.

Exemple

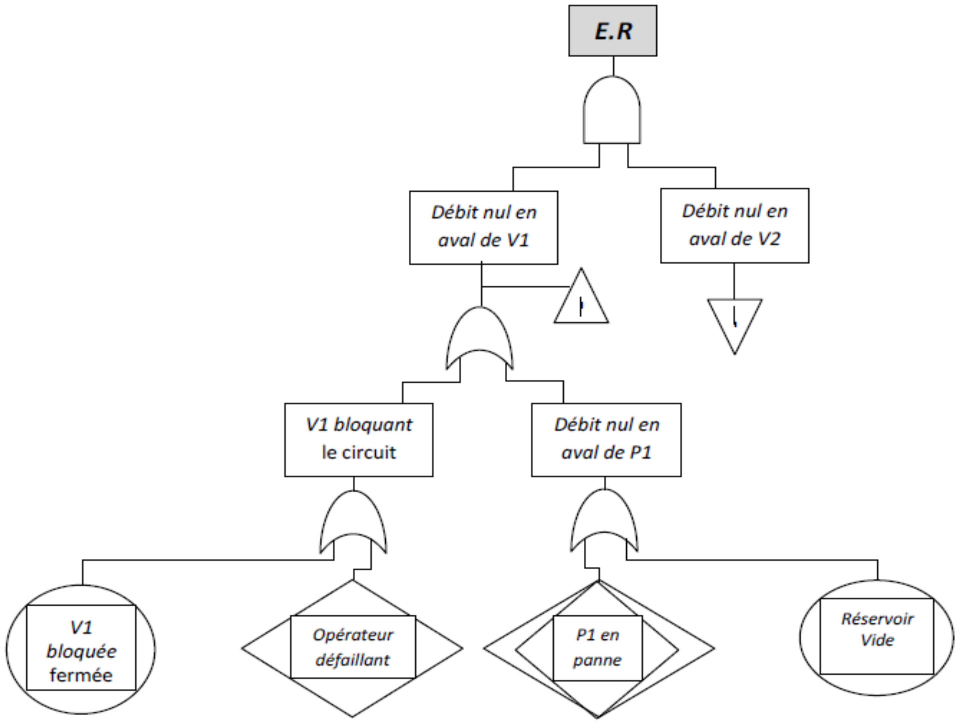


Figure 2.1 Exemple d’un arbre de défaillance [12]

II.2 .2 Bloc-diagramme de Fiabilité (BDF)

Un BDF est un graphe orienté (N, E), dont chaque sommet de N est un bloc représentant un composant du système et chaque arc de E est un lien de causalité (dépendance) entre deux blocs. Dans tout BDF, deux blocs particuliers sont identifiés : ceux sont sa source S et sa destination D. Un BDF représente un système et il est utilisé pour calculer la fiabilité : un BDF est opérationnel S'il existe au moins un chemin opérationnel de S à D. La probabilité qu'un bloc soit opérationnel est sa fiabilité.
Quand le BDF est construit, on distingue trois types de système : série, parallèle ou série parallèle (Mixte) [12].

II.3 Les lois de fiabilité

Selon la définition de la commission électrotechnique internationale (CEI 50191), la fiabilité est la « caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée ». D'un point de vue probabiliste, la fiabilité est la probabilité qu'un système soit non défaillant de manière continue pendant l'intervalle de temps [0, t].

II.3.1 Notions de variable aléatoire, densité de probabilité et fonction de répartition

II.3.1.1 Variable aléatoire

On appelle variable X**,** une variable aléatoire telle qu'à chacune des valeurs de X on peut associer une probabilité F(x).

Une variable aléatoire peut être continue ou discrète

Variable continue : Peut prendre n'importe quelle valeur réelle (ensemble des nombres réels) appartenant à un intervalle donné.

Variable discrète (Discontinue) : Peut prendre n'importe quelle valeur entière (ensemble des nombres naturels).

II.3.1.2 Densité de probabilité f(t)

Soit une loi de probabilité relative à une variable aléatoire continue t. Elle est caractérisée par la fonction de densité f(t) (densité de probabilité). Cette fonction peut être obtenue à partir de données de durées de vie du système observées depuis le début de son exploitation [13]. La fonction de densité f(t) a les propriétés suivantes :

- ✓ $f(t) > 0$
- ✓ $\int_0^{\infty} f(t).dt = 1$
- ✓ $f(t).dt$ exprime la probabilité que le système tombe en panne entre *t* et *t+dt :*

$$f(t).dt = \text{Prob}\ \{t < \text{durée de vie} < t+dt\}$$

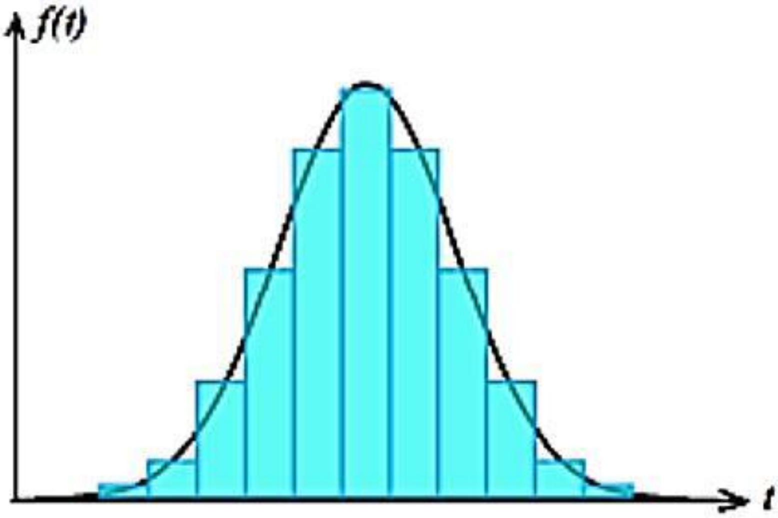


Figure 2.2 Densité de probabilité [13].

II.3.1.3 Fonction de répartition (de défaillance) F(t)

Soit *F(t)* la fonction de distribution (répartition) associée à la variable aléatoire t :

$$F(t) = \int_0^{\infty} f(t).dt \qquad \text{(II.1)}$$

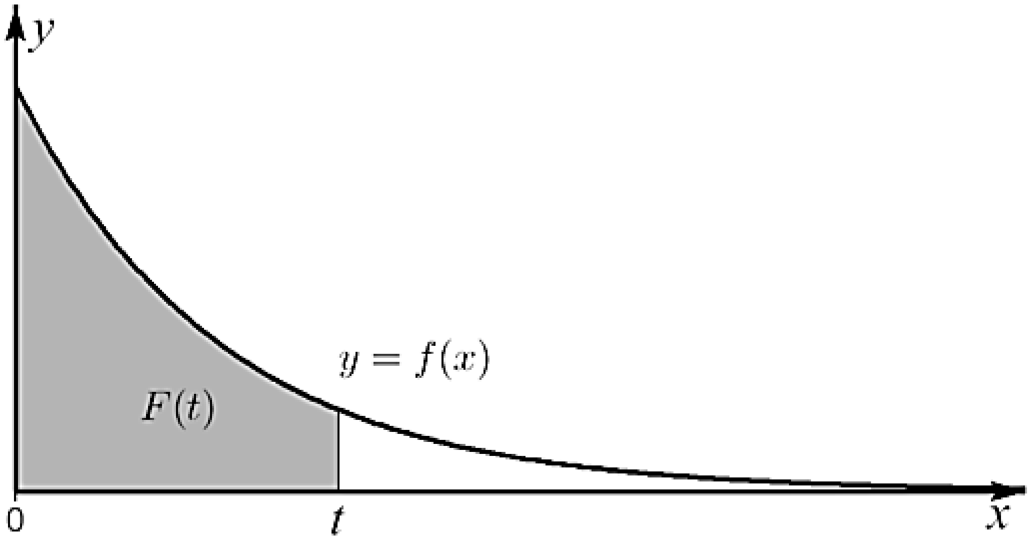


Figure 2.3 Fonction de défaillance [7]

F(t) représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard ait une défaillance avant l'instant t : F(t) = Prob {0 < durée de vie < t)

Propriétés de la Fonction de répartition

- ✓ F(t) ∈ [0 ,1] pour tout t ∈ R
- ✓ F est une fonction croissante

- ✓ $\lim_{t \to -\infty} F(t)$=0 et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$
- ✓ Pour tout a < b dans R. F(b) – F(a) = Prob [a ≤ t ≤ b] = $\int_a^b f(t).dt$

La probabilité P(a ≤ X ≤ b) correspond à l'aire du domaine situé sous le graphe de *f* entre les abscisses a et b.

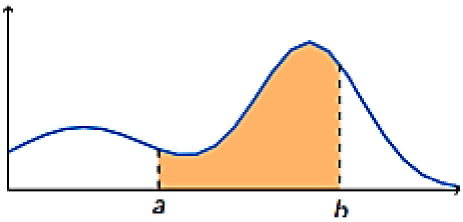


Figure 2.4 probabilité P (a ≤ X ≤ b) [5]

II.3.1.4 Fonction de fiabilité

Soit *R(t)* la fonction de fiabilité du système

R(t) exprime la probabilité que le système survive jusqu'à l'instant t.

R(t)= Prob {durée de vie ≥ t}

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x).dx = 1\text{- } F(t) \qquad \text{(II.2)}$$

La fonction de défaillance nous amène naturellement une fonction associée : la fonction de fiabilité *R* définie pour tout *t* ≥0 par : R(t)= 1-F(t). Le nombre R(t) représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population n'ait pas de défaillance avant l'instant *t*. La figure 3.5 montre les deux fonctions associées (défaillance et fiabilité) [7].

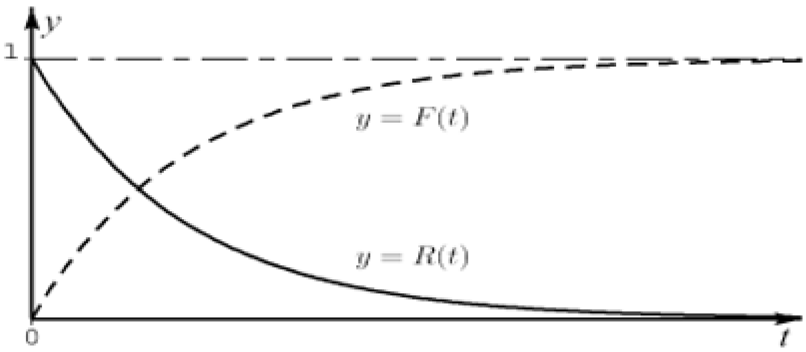


Figure 2.5 Fonction associée

Un dispositif mis en marche pour la première fois à (to) tombera en panne à un instant non connu à priori "t" : date de la panne est une variable aléatoire de la fonction de répartition "$F(t)$». Voir figure 2.6.

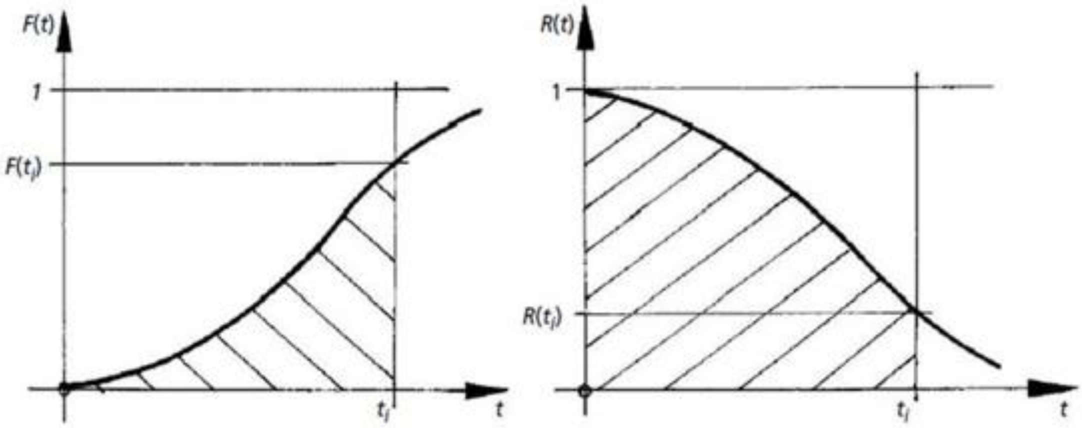


Figure2. 6. Probabilités complémentaires [17]

II.3.2 Analyse de fiabilité à partir des lois de probabilités

II.3.2.1 Lois de probabilité continues

Le tableau 2.1 résume quelques lois de probabilités continues :

Tableau 2.1 : Exemples de lois continues [7]

Loi et Symbole	Densité
Loi Uniforme ***U[a,b]***	$f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$
loi normale $\boldsymbol{N(\mu, \sigma^2)}$	$f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e - \dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$
Loi exponntielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
loi de Weibull $\boldsymbol{W(\eta,\beta)}$	$f_X(x) = \dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$

D‘autres lois de probabilité continue peuvent être rajoutées telles que la loi du Khi deux, la loi Gamma, la loi logistique, la loi de Cauch, la loi Bêta, la loi de Fisher …

II.3.2.2 Lois de probabilité discrètes

Une loi est dite discrète si elle prend ses valeurs dans **N** c'est à dire des valeurs entières comme par exemple celle qui compte le nombre de pannes.

Quelques lois discrètes sont présentées dans le tableau 2.2

Tableau 2.2 : Exemples de lois discrètes [1],[7]

Loi de X	Fonction de probabilité de X
Bernouli ***B(p)***	$P_r(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$
Binomiale ***B(n,p)***	$P(k) = P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$
Géométrique ***G(p)***	$P_r(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$
Poisson ***P(λ)***	$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

En raison de la complexité des lois citées précédemment, nous nous étudierons que celles qui sont largement employées dans le calcul de la fiabilité des systèmes.

II.3.2.2.1 loi binomiale

Si une défaillance a une probabilité (P) de survenir, la probabilité de la voir apparaître k fois en (n) essais est [14] :

$$P(k) = P(X=k) = c_k^n P^k (1-P)^{n-k} \qquad \text{(II.3)}$$

P (X= k) : Probabilité pour que la défaillance se produise (k) fois

P : Probabilité pour que la défaillance se produise au cours d'un seul essai.

c_k^n : Nombre de combinaisons de (k) défaillances pris parmi (n) essais.

Remarques :
1. Un dispositif a une probabilité (P) d'être défaillant donc (1-P) d'être au bon fonctionnement.
2. Nous sommes en présence d'une loi discrète puisque la variable aléatoire (k) ne peut prendre que des valeurs entières.
3. L'espérance mathématique est = n*p
4. La variance V(x)= n.p.(1-p)
5. L'écart type : $\sqrt{n \cdot P}(1-P)$

Exercice
Huit composants électroniques identiques et indépendants sont mis en service simultanément. La probabilité pour qu'un composant soit encore en fonctionnement au bout d'un an est de 0.7.

Quelle est la probabilité pour qu'au bout d'un an il y ait encore quatre composants en fonctionnement ? au moins quatre ?

Solution :
Soit la variable aléatoire X :
X : nombre de composants électroniques encore en service au bout d'un an.
X suit une loi binomiale B (8 ;0.7)

1) On demande P(X=4) = c_4^8 0 .7^{8-4} = 0,136
2) On demande P(X≥4) =1- [P(X=0) +P(X=1) +P(X=2) +P(X=3)]
   = 1- [$0,3^8$+c_1^8 .0,7.$0,3^7$+c_2^8 .$0,7^2$.$0,3^6$+c_3^8.$0,7^3$.$0,3^5$] =0,942

II.3.2.2 .2 loi exponentielle

La loi exponentielle n'est qu'un cas particulier de la loi de Weibull, on l'applique généralement pour un taux de défaillance constant, ce qui correspond à la phase sans usure ni vieillissement. C'est à dire à la phase de maturité ou de bon fonctionnement. C'est l'une des lois les plus appliquées pour différentes disciplines.

Une variable aléatoire *T* suit une loi exponentielle de paramètre t si sa densité de probabilité f(t) est donnée par :

$$f(t)= \lambda e^{- t} \qquad \text{(II.4)}$$

La distribution exponentielle s'exprime ainsi :

$$\text{Fiabilité : } (t) = e^{-\lambda\ t} \qquad \text{(II.5) :}$$

Avec les paramètres de significations :

- **e** : est la base de l'exponentielle (2,718...)
- **λ**: c'est l'intensité.

Densité de probabilité : $f(t) = \lambda e^{- t}$

La fonction de répartition : $(t) = 1 - e^{- t} = \int^{t} \lambda e^{- t}\, dt$ (II.6)

La moyenne des temps de fonctionnement (MTTF) ou de bon fonctionnement (MTBF) un important estimateur de la fiabilité et de la disponibilité des systèmes (voir figure 2.7)

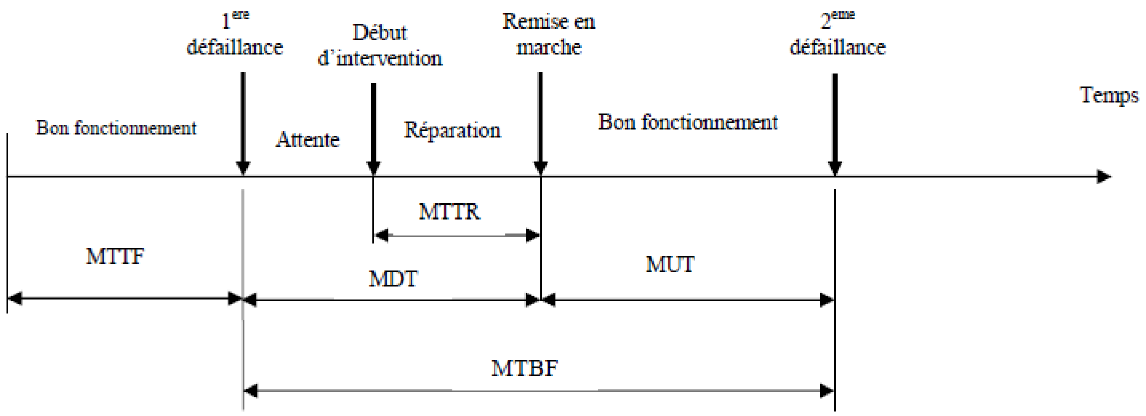


Figure 2.7 les temps de maintenance [14]

MTTF=Mean Time To First Failure=Fonctionnement avant 1ère défaillance
MDT=Mean Down Time =Temps Moyen d'Indisponibilité
MUT=Mean up Time=Temps Moyen de Remise en Etat
MTBF=Mean Time Between Failure=Temps Moyen entre Défaillance
MTBF-MTTR=Fonctionnement Moyen Entre Défaillance.

Le MTTF se calcule par l'expression :

$$MTTF = \int_0^\infty (t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\ t}\, dt = 1 \qquad \text{(II.7)}$$

Les distributions relatives à cette loi sont représentées par les courbes de la figure en fonctiondu taux de défaillance d'un ou plusieurs composants supposés avoir un même λ.

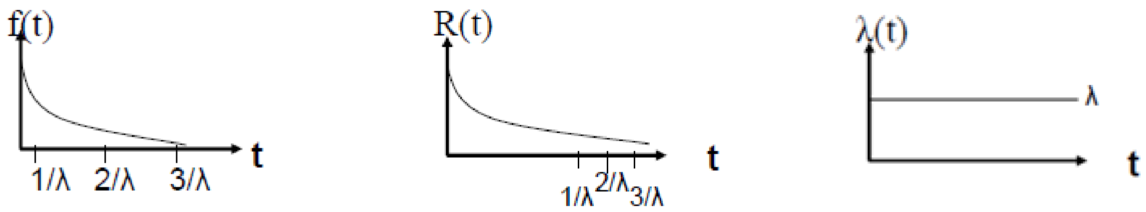


Figure 2.8 Distribution des fonctions de la loi exponentielle [7]

La loi exponentielle a de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénierie en particulier dans l'étude de fiabilité d'un équipement.
La courbe théorique de distribution de la loi exponentielle est donnée à la figure 2.9

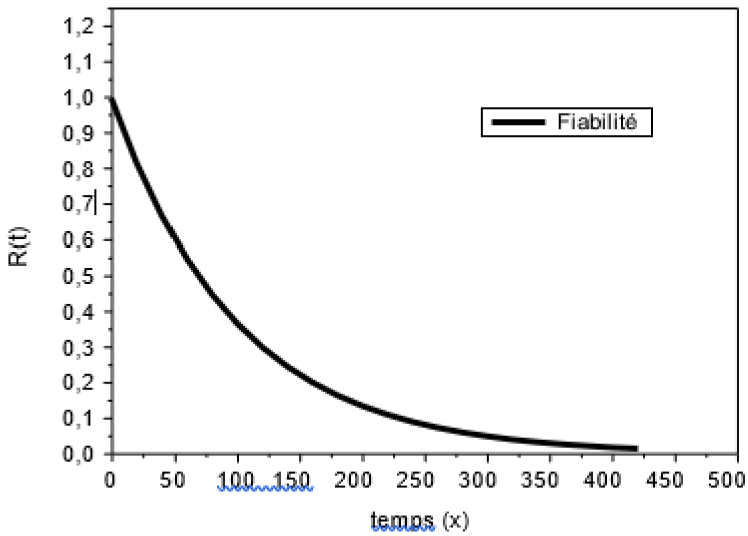


Figure 2.9. Courbe théorique de fiabilité de la loi exponentielle [7]

N.B

Notons que les variables aléatoires décrivant une durée de vie sans usure suivent toutes une loi exponentielle.

Exercice [15]

Sur un système on a observé 05 pannes pour une durée d'observation de 900 heures. Quel est la MTBF de ce système en supposant que le taux de défaillance suit le modèle exponentiel ?
Exercice 2

Un matériel électronique a une durée de vie moyenne de 3200 heures. On a tout lieu de penser que sa fiabilité suit une loi exponentielle.
- Déterminer sa fonction de fiabilité.

- Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore au bout de 2000 heures ? au bout de 4000 heures ?

II.3.2.2.3 loi de Weibull

Contrairement au modèle exponentiel, la loi de Weibull couvre le cas où le taux de défaillance est variable et permet de s'ajuster aux périodes de jeunesse et de vieillesse. L'expression de la fiabilité devient :

$$R(t) = e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} \qquad \text{(II.8)}$$

Avec ses trois paramètres :

β, paramètre de forme (β > 0)
η, paramètre d'échelle (η > 0)
γ, paramètre de position (– ∞ < γ < + ∞).

Sa courbe théorique de distribution est donnée à la figure 3.9

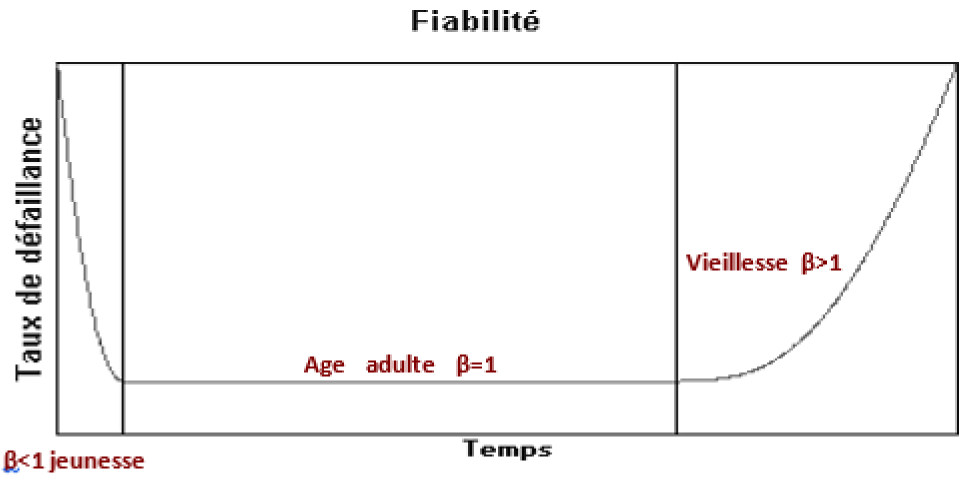


Figure 2.10 Courbe en baignoire

Outre son adaptabilité à toutes les situations, le modèle de Weibull livre d'autres informations en plus de niveau de fiabilité d'un dispositif à un instant t. Il Permet une analyse plus fine et donc une image plus précise de l'état du système.

Paramètre de forme (β)

Le paramètre β fournit des indications à la fois qualitatives et quantitatives du taux de défaillance instantané. Il est dit indicateur de forme de la courbe de densité de probabilité.

- Si sa valeur est $<$ 1, alors $\lambda(t)$ est décroissant, indiquant que le système est en période de jeunesse.
- Maintenant, si β est égal ou très voisin de 1, c'est le signe d'un comportement régulier du système avec un taux de défaillance sensiblement constant. C'est donc la période
- Enfin si la valeur du paramètre de forme β est supérieure à 1, alors le modèle de Weibull est encore plus instructif. Dans ce cas, β révèle d'abord une phase d'obsolescence et c'est l'expression quantitative qui retiendra d'avantage l'attention, car il est possible de lier la valeur au degré d'obsolescence du matériel.

Paramètre d'échelle (η)

Caractérisant le choix d'une échelle. Il s'exprime dans la même unité de temps (heures, cycles…) que le temps de bon fonctionnement (TBF).Ce paramètre est toujours positif.

Paramètre de localisation (y)

Egalement nommé paramètre de décalage ou de position, il s'exprime en unité de temps, il indique la date d'apparition du mode de défaillance.

- ✓ Si y>0, il y'a une survie totale a t=0 et t=y.
- ✓ Si y=0, les défaillances débutent à l'origine de temps.

✓ Si y<0, les défaillances ont débuté avant l'origine des temps relevés.

- La densité de probabilité $f(t)$: C'est la probabilité d'avoir une seule avarie au temps (t). Elle est donnée par la formule :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta-1} e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} \qquad \text{(II.9)}$$

- La fonction de répartition $F(t)$ Elle est donnée par la formule :

$$f(t) = 1 - e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} \qquad \text{(II.10)}$$

- La fiabilité correspondante est R(t) : C'est la probabilité de non défaillance dans l'intervalle du temps (0, t) elle donnée par la formule :

$$R(t) = e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} \qquad \text{(II.11)}$$

- Le taux d'varie (le taux de défaillance) correspondant $\lambda(t)$ parfois noté $z(t)$, c'est la probabilité d'avarie au temps $(t + \Delta t)$, il est exprimée par la formule :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta-1} \qquad \text{(II.12)}$$

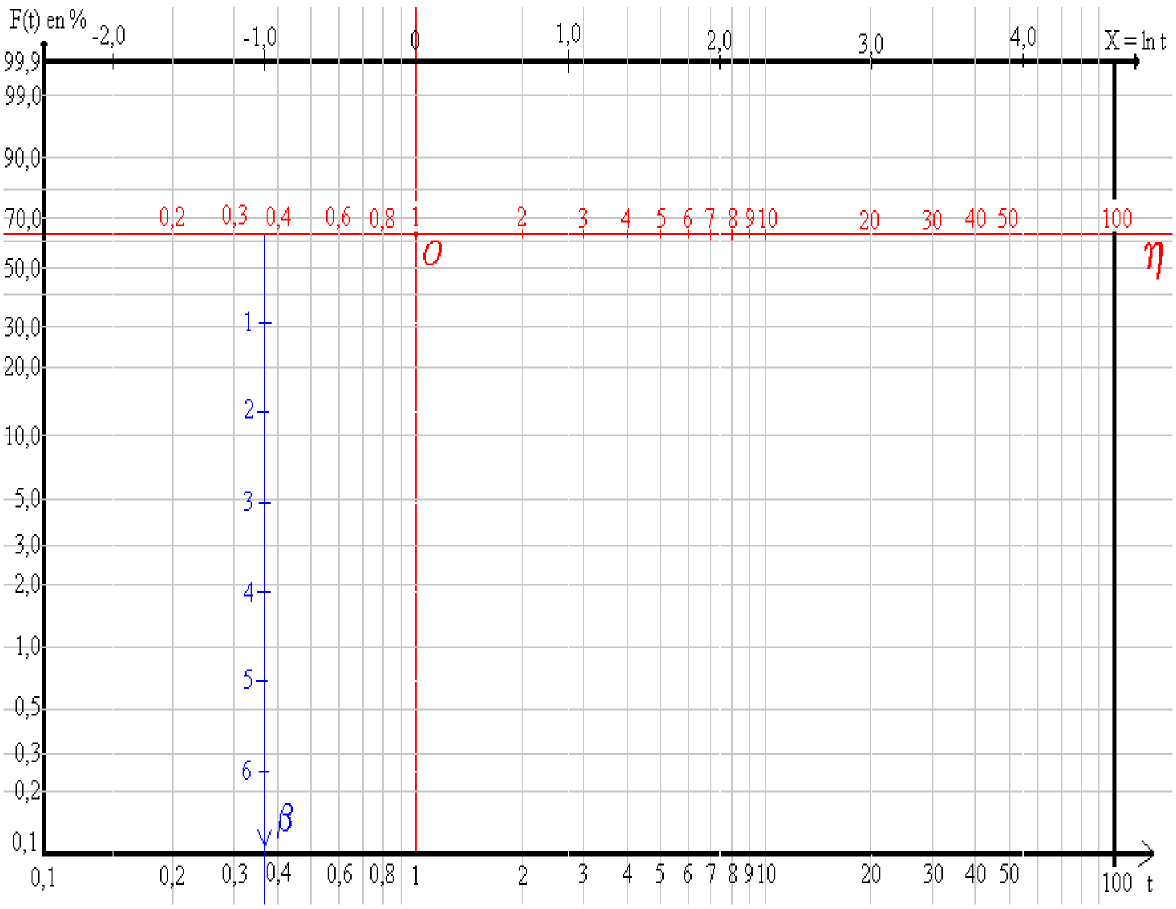


Figure 2.11 Papier de Weibull [7]

Exemple

Nous appliquons le modèle de Weibull sur le four rotatif de la cimenterie d'Elmalabiod

A chaque instant (t) de TBF nous déterminons la fiabilité $R(t)$, la fonction de défaillance ou répartition $F(t)$, la densité de probabilité$f(t)$, et le taux de défaillance $\lambda(t)$.
Pour le rang 1 nous obtenons les résultats suivants :

1) La fiabilité R(t) :

$$R(t) = e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} = e^{-\left[\frac{155.49-0}{1020}\right]^{1.5}} = 0{,}9422 = 94.2\%$$

2) La fonction de réparation F(t) :

$$F(t) = 1 - e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} = 1 - R \quad (t) = 0{,}0578 \approx 6\%$$

3) La densité de probabilité f(t) :

$$F(t) = \frac{\beta}{\eta}\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta-1} . e^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta}} = \frac{1.5}{1020}\left[\frac{155.49-0}{1020}\right]^{1.5-1} . R(t)$$

$$f_1(t) = 0.00053694$$

4) Le taux de défaillance λ(t) :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta-1} = \frac{1.5}{1020}\left[\frac{155.49-0}{1020}\right]^{1.5-1} = 0{,}00057$$

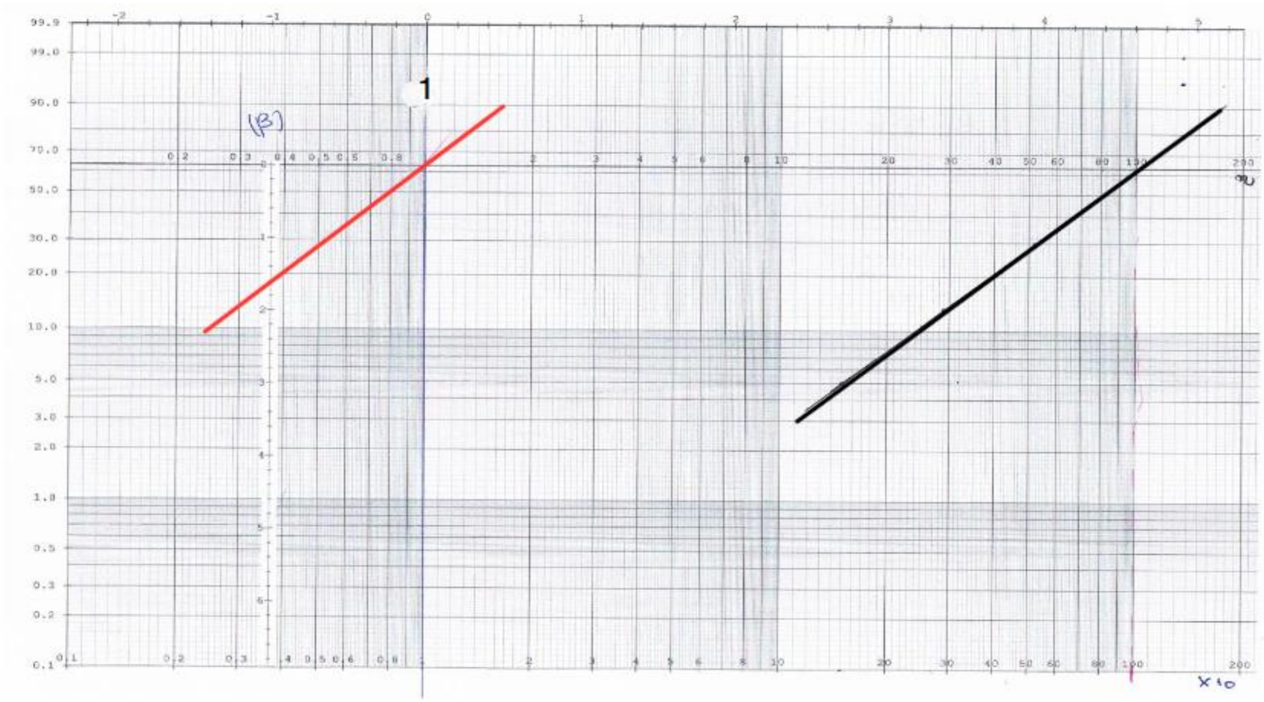
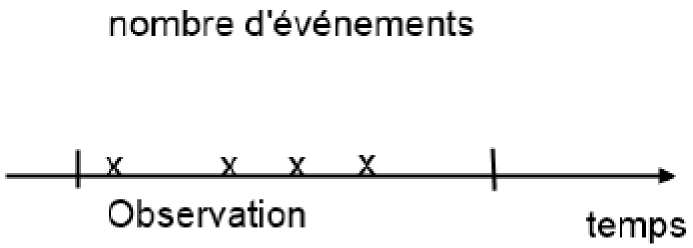


Figure 2.12 paramètres de la loi de Weibull (cas du four de la cimenterie d'Elmalabiod)

II.3.2.2.4 Loi de poisson

La loi de Poisson ou modèle de Poisson permet la modélisation de l'observation d'un phénomène qui produit des événements à un rythme connu. On s'intéresse à l'observation d'événements et on suppose

1. un seul événement arrive à la fois
2. le nombre d'événements se produisant ne dépend que du temps de l'observation
3. les événements sont indépendants.[16]



Considérons X la v.a. qui donne le nombre d'événements observés dans une unité de temps. On a alors un phénomène de Poisson et la variable aléatoire qui donne le nombre d'événements par unité de temps suit une loi de Poisson, notée $X \sim P(\lambda)$, où λ est le nombre moyen d'événements par unité de temps.

Les valeurs possibles de la variable aléatoire sont $SX = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et la loi de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{e{-}\lambda \,.\lambda^{x}}{x!} \quad \text{pour} = 0,1,2 \ldots \quad \text{(III.13)}$$

Où e est la fonction exponentielle au point 1 : e ≃2,71828. Les principales caractéristiques numériques sont :

Moyenne : $E(X) = \lambda$
Variance : $V ar(X) = \lambda$
Ecart type : $\sqrt{\lambda}$

Voici la représentation graphique de la distribution de Poisson pour quelques valeurs de λ

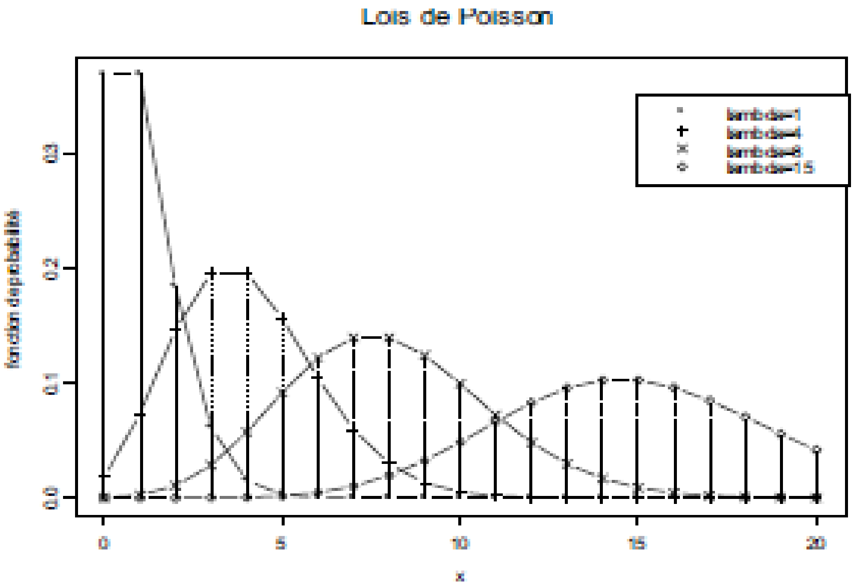


Figure 2.13 Distribution de Poisson [16]

Exemple : Une composante électronique produit en moyenne 1 erreur par 100000hres. Quelle est la probabilité d'une erreur si la pièce fonctionne 20 000 hres ?

Solution :

Posons X la v.a. qui donne le nombre d'erreurs sur 20 000 heures de fonctionnement
$X \sim P(\lambda)$ ou λ est le nombre moyen d'erreurs en 20 000hres,

$$\lambda = \frac{1}{100000}\,20000 = \frac{1}{5}$$

On cherche $P_r(x \geq 1)$ puisqu'on veut en réalité la probabilité d'une erreur ou plus

Or $P_r(x \geq 1) = 1 - P_r(x=0)$

$$= 1 - \frac{e^{-1/5}\,(1/5)^0}{0!} = .181\,27$$

III. 1 Fiabilité des systèmes

Un système est constitué des composants élémentaires, sa fiabilité dépend à la fois de fiabilité de ces composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le bon fonctionnement ou la panne du système. Donc l'objet de cette section est la détermination de la fiabilité d'un système à partir de la fiabilité de ses composants [9].

III.1.1 Fiabilité de système constitué de plusieurs composants

III.1.1.1Système en série

R(s) représente la fiabilité d'un ensemble de "n" composants montés en série.
La fiabilité R(s) d'un ensemble de "n" composants A, B, C, …, n montés ou connectés en série est égale au produit des fiabilités respectives R_A, R_B, R_C, …, R_n de chacun des composants.

On dit qu'un système est en série si la défaillance d'un seul composant entraine la défaillance du système (c'est-à-dire que le système ne fonctionne que si tous ses composants fonctionnent).

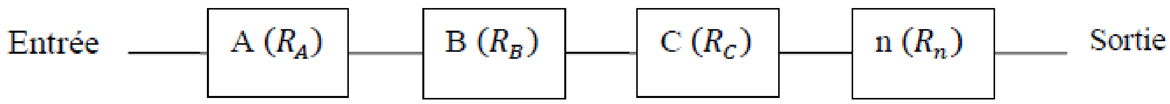


Figure 3.1 Système en série

La fiabilité du système est donnée par La formule suivante :

$$R(s) = RA \times RB \times RC \times \ldots Rn \qquad \text{(III.1)}$$

Si les taux de défaillances sont constants au cours du temps la fiabilité sera calculée suivant la formule :

$$R_S = e^{-\lambda At} \times e^{-\lambda Bt} \times e^{-\lambda Ct} \times \ldots . e^{-\lambda nt} \qquad \text{(III.2)}$$

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C+\cdots+\lambda_n} \quad \text{(III.3)}$$

Si en plus, les composants sont identiques : $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \cdots = \lambda_n$ Alors :

$$R_s = e^{-n\lambda t} \text{ et } MTBF = \frac{1}{n\lambda} \quad \text{(III.4)}$$

III.1.1.2 Système en parallèle

Un dispositif, constitué de "n" composants en parallèle, ne tombe en panne que si les "n" composants tombent en panne au même moment.
Soit les "n" composants de la figure ci-dessous montés en parallèle. Si la probabilité de panne pour chaque composant repéré (i) est notée F_i, alors :

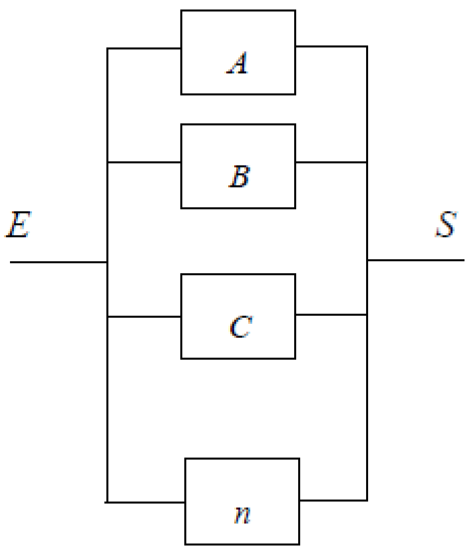


Figure 3.2 Système en parallèle

La fiabilité du système est donnée par l'équation suivante :

$$R_p = 1 - (1 - R_A) \times (1 - R_B) \times (1 -) \times \ldots .\times (1 - R_n) \qquad \text{(II.5)}$$

La composition en parallèle est meilleure par rapport à celle en série, ceci s'explique par l'augmentation de la fiabilité pour ce type de composition D'ailleurs on utilise cette propriété pour accroitre la sécurité de fonctionnement d'un système. Prenons l'exemple du système de freins d'urgence sur une automobile ou celui de deux pompes en parallèle.