**Centre Universitaire de Mila**
**Département de Mathématiques**
**$3^{\text{ème}}$ année Licence Mathématiques**
**Module : Transformations intégrales dans les espaces $\mathbf{L^p}$**

---

# Série de TD N°2

2023-2024

---

**<u>Exercice 1 :</u>** Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \mathbb{I}_{[-k,k]} = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-k,k] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

et

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $f_k$
2. Déduire la transformée de Fourier de $g$
3. Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2}dx$ (Théorème de Parseval Plancherel)

**<u>Exercice 2 :</u>** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & si\ x \in [-1,0] \\ 1-x & si\ x \in [0,1] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une fonction paire
2. Calculer la transformée de Fourier de $f$
3. Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\sin x)^4}{x^4}dx$

**<u>Exercice 3 :</u>** Pour $a > 0$, on pose $f(x) = e^{-a|x|}$

1. Calculer la transformée de Fourier de $f$
2. Déduire la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto g_a(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$
3. Calculer $f * f$ ; calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$
5. Soit l'équation intégrale suivante avec $h \in L^1(\mathbb{R})$, et $b > a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{(x-t)^2+a^2}\,dt = \frac{1}{x^2+b^2} \;...(*).$$

Exprimer (*) sous forme d'une équation de convolution, déterminer $\widehat{h}(w)$ et en déduire $h(t)$.

**<u>Exercice 4 :</u>** Soit $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$. Déterminer $(\widehat{f}(w))'$, en déduire une équation différentielle en $\widehat{f}$ que l'on résoudra.

(On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\Pi}{a}}$)