Centre Universitaire de Mila
Département de Mathématiques
3ème année Licence Mathématiques
Module : Transformations intégrales dans les espaces $\mathbf{L^p}$

Série de TD N°1

2023-2024

<u>Exercice 1 :</u>

1. Montrer l'inégalité de Holder pour $p, q \in]1, +\infty[$.
2. Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$
3. Montrer l'inégalité de Minkouvski pour $p \in [1, +\infty]$.

<u>Exercice 2 :</u>

1. Montrer que si $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $fg \in L^r$ et
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$
2. Soient p et q dans $[1, +\infty]$ avec $q < p$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si $f \in L^p \cap L^q$, alors $f \in L^r$ pour tout $r \in [q, p]$, et on a :
$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^{\alpha} \, \|f\|_p^{1-\alpha},$$
ou $\alpha \in [0, 1]$ est définit par $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$.
3. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^\infty \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p,$$
et pour tout f
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

<u>Exercice 3 :</u> Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & si\ x \in [0, +\infty[, \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$
Montrer que $f \in L^p$ pour $p > 1$ et que $f \notin L^1$.
2. Soit
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]} * \mid x \mid^{-\alpha} = \begin{cases} \mid x \mid^{-\alpha} & si\ x \in [-1, 1] \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{array}$$
Montrer que $f \in L^p$ ssi $\alpha p < 1$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}$$
Montrer que $f \in L^1(]0, 1[)$ et que $f \notin L^p(]0, 1[)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Exercice 4 :

Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times]0,\infty[$; en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y} dy$$

Exercice 5 :

Soient $f = \mathbb{I}_{]\frac{1}{2},1[}$ et pour tout $n \geq 2$ la suite $(f_n)_n$ qui définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x - \frac{1}{2}) & si\ x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & si\ x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que $f_n \to\ f$ p.p.
2. Montrer que $\|f_n\|_\infty \to\ \|f\|_\infty$
3. Montrer que $f_n \not\to f$ dans L^∞

Exercice 6 :(Produit $L^p - L^q$)

Soient $(E, \sum, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et q le conjugué de p. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$ tels que $f_n \to f$ dans L^p et $g_n \to g$ dans L^q. Montrer que

$$\int f_n\, g_n\, d\mu \to \int f\, g\, d\mu.$$

* On suppose maintenant que $g_n \to\ g$ p.p.. Montrer par un contre exemple que

$$\int f_n\, g_n\, d\mu \not\to \int f\, g\, d\mu.$$

Exercice 7 :

Soient p, $q \in [1, +\infty[$ $(p \neq q)$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p \bigcap L^q$. On suppose que (f_n) converge vers 0 dans L^p et que (f_n) est une suite de Cauchy dans L^q. Montrer que (f_n) converge vers 0 dans L^q

Exercice 8 :

Soient a, $b > 0$, et soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{\frac{-a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{\frac{-b|x|^2}{2}}$. Calculer $f * g(x)$.