1.1مجال الثقة لتباين مجتمع طبيعي

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول فإن طريقة تقدير هذا الأخير تكون حسب الحالتين التاليتين:

1.5.3 في حالة متوسط المجتمع معلوم

نعلم من نظرية المعاينة أن:

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \lambda_n^2$$

ومنه:

$$P\left[\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعيين مجال ثقة لتباين مجتمع طبيعي بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

ملاحظة:

عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع σ يرتكب خطأ المعاينة المعرف بالعلاقة التالية:

$$d = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}} - S} \\ \\ \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}} - S} \end{cases}$$

2.5.3 في حالة متوسط المجتمع مجهول

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، وكان s^2 تقديره غير المتحيز فإن:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \lambda^2_{n-1}$$

ومنه:

$$P\left[\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعيين مجال ثقة لتباين مجتمع طبيعي بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

مثال:

تم قياس محتوى 20 كيسا من الأسمدة تمت تعبئتها بواسطة الآلة A فوجد أن انحرافها المعياري هو 1.5 كلغ، فإذا كان للأوزان التوزيع الطبيعي أوجد مجال الثقة بـــمعامل ثقة 90٪ للانحراف المعياري للمجتمع.

الحل:

ليكن المتغير العشوائي i يمثل أوزان أكياس الأسمدة.

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$$

متوسط المجتمع مجهول ومنه:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \lambda^2_{n-1}$$

إذن:

$$P\left[\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعيين مجال ثقة لتباين مجتمع طبيعي بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}} = f_{0.975,19} = 32.9$$

$$1-\alpha=0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \Longrightarrow \lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}=f_{0.025,9}=8.91$$

بالتعويض نجد مجال الثقة لـــ ^{2} بـــمعامل ثقة 90٪ هو:

$$\left[\frac{(19)(1.5^2)}{32.9},\frac{(19)(1.5^2)}{8.91}\right]=[1.29,4.79]$$

ومنه مجال الثقة للانحراف المعياري σ بـــمعامل ثقة 90٪ هو:

$$[1.13,2.18]$$

ملاحظة:

عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع σ يرتكب خطأ المعاينة المعرف بالعلاقة التالية:

$$d=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}}-S\\ \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}}-S\end{cases}$$

1.1 مجال الثقة لنسبة تباييني مجتمعين

في العديد من التجارب يكون الهدف مقارنة تباييني المجتمعين وإحدى الطرق المتبعة لهذا الغرض هي دراسة النسبة بين تباينين، فإذا كان S_1^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه $\sigma_1{}^2$ و S_2^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\rightsquigarrow F_{n_1-1,n_2-1}$$

ومنه:

$$P\left[f_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة تباييني مجتمعين بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_1^2}{S_2^2 f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

مثال:

سحبت عينة من مجتمع طبيعي حجمها 10 بتباين 9 وسحبت عينة أخرى من مجتمع طبيعي آخر حجمها 15 بتباين 8 .

- أوجد فترة ثقة 95 ٪ لنسبة بين تباييني المجتمعين.

الحل:

نعلم أن:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = f_{0.975,9,14} = 3.21$$

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow f_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = f_{0.025,9,14} = 0.26$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة تباييني مجتمعين بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_1^2}{S_2^2 f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة المطلوب هو:

[0.35,4.32]