1.1 اختبار الفرضيات حول النسبة في المجتمع

إن هذه الاختبارات مرغوبة في العديد من المجالات وتكون إحصاءة الاختبار في هذه الحالة هي:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p \neq p_0$$

أو $H_1: p > p_0$

أو $H_1: p < p_0$

مثال:

أظهرت سجلات مديرية الأمن العام في إحدى المدن أن نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات قبل تشريع إلزامية الاستعمال هي 0.8، ودرست عينة عشوائية حجمها 100 سائق فوجد أن 85 منهم يستعملون الحزام.

المطلوب: اختبار ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستعملين لحزام الأمان عند مستوى المعنوية 0.05.

الحل:

الصفة المدروسة هي استعمال حزام الأمان.

$$\hat{p} = 0.85$$

نريد اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0: p = 0.8$$

$$H_1: p > 0.8$$

إحصاءة الاختبار هي:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{0.85 - 0.80}{\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}}} = 1.25$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة $_0$ تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 وبالتالي فإن صدور التشريع بإلزامية استعمال حزام الأمان لم يزد نسبة المستعملين له.

2.1 اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي مجتمعين

في هذه الحالة نرغب في اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0:\ p_1 = p_2$$
$$H_1:\ p_1 \neq p_2$$

أو $H_1: p_1 > p_2$

أو $H_1: p_1 < p_2$

بالاعتماد على إحصاءة الاختبار التالية:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left((1-p)p\right)}}$$

ويمكن أن نستبدل p بتقديرها غير المتحيز $\hat{}$ بحيث:

$$\hat{p} = \frac{x + y}{n_1 + n_2}$$

وتصبح قيمة الإحصاءة:

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left((1 - \hat{p})\hat{p}\right)}}$$

مثال:

في دراسة على نسبة غياب العاملين في فرعين من فروع إحدى المؤسسات وجد أن نسبة الغياب في الفرع أ هي 30٪ في حين نسبة الغياب في الفرع ب هي 35٪. أخذت عينتان من نفس الحجم من الفرعين حجمهما 1000 عامل، فوجد أن عدد الغائبين في الفرع أ 350 عامل وعدد الغائبين في الفرع ب 450 عامل.

فهل يمكن القول أن نسبة الغياب الحقيقية في القطاعين مختلفة عند مستوى المعنوية 5٪؟

الحل :

p_1: نسبة الغياب في الفرع أ.

p_2: نسبة الغياب في الفرع ب.

$$\hat{p}_1 = 0.35$$
$$\hat{p}_2 = 0.45$$
$$\hat{p} = 0.4$$

نريد اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0:\ p_1 = p_2$$
$$H_1: p_1 \neq p_2$$

إحصاءة الاختبار هي:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{0.35 - 0.45}{\sqrt{\left(\frac{1}{350} + \frac{1}{450}\right)\left((1 - 0.4)0.4\right)}} = -3.33$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة ${}_0$ تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 ، وبالتالي يمكن القول أن نسبة الغياب الحقيقية في القطاعين مختلفة عند مستوى المعنوية 5٪.