الفصل الثانـي:

نظريـة التقدير

تمهيد

في الفصل السابق درسنا من خلال مجموعة من النظريات العلاقة الرياضية بين إحصاءات العينة والمعالم المناظرة لها في المجتمع مثل المتوسط، التباين والنسبة، كما درسنا العلاقة بين شكل توزيع المجتمع وشكل التوزيع الاحتمالي لإحصاءات العينة، والتي تستخدم لتقدير معالم المجتمع التي يتعذر الحصول عليها من خلال دراسة شاملة للمجتمع في كثير من الحالات.

1. مفاهيم أساسية

من أهم المفاهيم المرتبطة بنظرية التقدير ما يلي:

- **التقدير:** هو أسلوب إحصائي يعتمد على حساب بعض الإحصاءات من بيانات العينة التي تعطي قيم تقريبية للمعلمات المناظرة لها في المجتمع الإحصائي المختارة منه.
- **المقدر:** هو إحصاءة تحدد كيفية استخدام بيانات العينة لتقدير معلمة المجتمع الإحصائي المجهولة.
- **درجة التأكد أو مستوى الثقة:** تحديد مجال الثقة للمعلمة يرفق بتحديد احتمال تحققه، أي باحتمال أن تنتمي المعلمة إلى المجال المذكور ويرمز لهذا الاحتمال بـ $(1-\alpha)$ ويسمى درجة التأكد أو مستوى الثقة، أما الاحتمال المعاكس α يسمى مستوى أو درجة المعنوية.
- **معاملات الثقة:** هي القيم الجدولية للمتغير Z أو t أو غيرها حسب الحالة.

2. التقدير النقطي (التقدير بقيمة واحدة)

التقدير النقطي هو: تقدير إحدى معلمات المجتمع بإعطائها قيمة عددية واحدة.

1.2 طرق التقدير النقطي

هناك طرق عديدة لإيجاد مقدرات نقطية لمعالم المجتمع نذكر منها:

1.1.2 طريقة المعقولية العظمى

هي طريقة رياضية يمكن من خلالها الوصول إلى أحسن المقدرات لمعلمات المجتمع انطلاقا من بيانات العينة العشوائية.

ليكن المتغير العشوائي X من توزيع دالة كثافته الاحتمالية $f(x,\theta)$ حيث θ معلمة التوزيع وهي مجهولة، فإذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ عينة عشوائية حجمها n من هذا التوزيع فإن دالة المعقولية العظمى لهذه العينة تعرف كما يلي:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

أي أن دالة المعقولية العظمى هي دالة في المعلمة المجهولة θ وتبلغ $\mathrm{L}(\theta)$ قيمتها العظمى عند قيم نسميها $\hat{\theta}$ ، وهي تقدير لـ θ و حل للجملة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{L}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} < 0 \end{cases}$$

وبما أن $\mathrm{L}(\theta)$ تبلغ نهايتها العظمى عند نفس النقطة التي تبلغ عندها الدالة $LogL(\theta)$ نهايتها العظمى وبهدف تسهيل الحسابات سوف نحدد قيمة θ التي هي حل للجملة:

$$\begin{cases} \dfrac{dLogL(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\ \dfrac{d^2LogL(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} < 0 \end{cases}$$

ففي الحالة التي تكون فيها $f(x)$ تابعة لعدة معلمات مجهولة $\theta_1, \theta_2, \dots\dots, \theta_k$ فإن المقدرات $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots\dots, \hat{\theta}_k$ على الترتيب هي إحصاءات العينة التي قيمها حلول للجملة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dLogL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta_1} = 0, \dfrac{\mathrm{dLogL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta_2} = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \dfrac{\mathrm{dLogL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta_k} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{LogL}(\theta)}{\mathrm{d}{\theta_1}^2} < 0, \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{LogL}(\theta)}{\mathrm{d}{\theta_2}^2}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{LogL}(\theta)}{\mathrm{d}{\theta_k}^2} \end{cases}$$

2.1.2 طريقة العزوم

تعد هذه الطريقة من أبسط طرق إيجاد تقدير معلمة مجهولة، وهي تعتمد على مساواة العزم الرياضي بالعزم الإحصائي المقابل لهذه العينة، أي أنه إذا كانت المعلمة هي عزم للتوزيع فإن تقدير هذه المعلمة هو عزم العينة المناظر.