ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة

1. متوسط وتباين العينة

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية متطابقة التوزيع، أي لكل منها متوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة وتباينها يعرفان بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$$

حيث : n حجم العينة.

أما المتوسط الحسابي للمجتمع وتباينه فيعرفان كما يلي:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

حيث: N حجم المجتمع.

2. متوسط وتباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$

إن المتوسط الحسابي للمجتمع μ هو مقدار ثابت، أما المتوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ فتختلف قيمته من عينة لأخرى، فهو بذلك متغير عشوائي له توزيع احتمالي يسمى توزيع المعاينة الذي نتحصل عليه بدراسة العينات الممكنة التي لها نفس الحجم في المجتمع المدروس، ونميز بين حالتين:

حالة العينة المستقلة (السحب بإرجاع)

في حالة السحب بإرجاع فإن حجم المجتمع N لا يتغير عند سحب مفردة من مفرداته، ومن ثم تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها البعض، ويتحقق هذا الاستقلال الإحصائي عندما يكون حجم المجتمع N كبيرا مقارنة بحجم العينة n وتكون بذلك النسبة بينهما أقل من 0.05.

في حالة العينة المستقلة يتحدد توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ استنادا إلى النظرية التالية:

نظرية: إذا كان المتغير X يخضع لتوزيع متوسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\overline{X}$ الوسط الحسابي للعينة التي حجمها n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن:

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$V(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

العينة غير المستقلة (السحب بدون إرجاع)

في حالة السحب بدون إرجاع فإن سحب مفردة من المجتمع لتكوين العينة يؤثر على سحب أي مفردة أخرى، فيتحقق عدم الاستقلال الإحصائي، ويتحدد الوسط الحسابي وتباين الوسط الحسابي العيني استنادا إلى النظرية الموالية:

نظرية: إذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة من المجتمع يخضع لتوزيع وسطه μ وتباينه σ^2، فإن التوقع الرياضي العيني للوسط الحسابي هو:

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$V(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

حيث:

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$: معامل الإرجاع (معامل التصحيح) الذي يمكن إهماله إذا كان حجم العينة صغيرا جدا مقارنة بحجم المجتمع ($\frac{n}{N} < 0.05$).

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
أحسب المتوسط الحسابي وتباين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ إذا علمت أن العينة العشوائية التي حجمها $n = 10$ أختيرت من مجتمع لا نهائي متوسطه الحسابي 70 وتباينه 50.	حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع معاينة $\overline{X}$ إذا اختيرت عينة حجمها $n = 500$ مفردة من مجتمع حجمه $N = 600$ مفردة، ومتوسطه الحسابي وانحرافه المعياري هما 26 و 3 على الترتيب.
الحل: بما أن السحب تم من مجتمع لا نهائي فهذا يعني تحقق الاستقلال الإحصائي، وعليه يمكن حساب المتوسط الحسابي وتباين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ كما يلي: $$E(\overline{X}) = \mu = 70$$ $$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = 5$$	**الحل:** $$\frac{n}{N} = \frac{500}{600} = 0.073 \geq 0.05$$ ومنه نستنتج عدم تحقق الاستقلال الإحصائي، ومن ثم فإن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة $\overline{X}$ يحسبان كما يلي: $$E(\overline{X}) = \mu = 26$$ $$V(\overline{X}) = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$ $$= \frac{9}{500}\left(\frac{600-500}{600-1}\right) = 0.127$$

ملاحظة:

يمكن تعميم النظرية السابقة على عينتين من مجتمعين مستقلين بناء على النظرية التالية:

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة من توزيع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وأخذت عينة أخرى $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ من توزيع أخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$
$$V(\overline{X} - \overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

مثال	حل المثال
إذا تم اختيار عينة حجمها $n_1 = 30$ من توزيع متوسطه $\mu_1 = 60$ وتباينه $\sigma_1^2 = 15$ ، وعينة أخرى حجمها $n_2 = 60$ من توزيع أخر مستقل عن الأول متوسطه الحسابي $\mu_2 = 75$ وتباينه $\sigma_2^2 = 25$. المطلوب: حساب: $E(\overline{X} - \overline{Y})$، $V(\overline{X} - \overline{Y})$.	$E(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = 60 - 75 = -15$ $V(\overline{X} - \overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{25}{60} + \frac{15}{30} = 0.91$

3. شكل توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$

يكون شكل توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي كما يلي:

1.3. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي

يمكن التمييز بين حالتين:

المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم

حالة السحب بارجاع

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإن المتغير العشوائي $\overline{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه $\sigma_{\overline{X}}$.

$$\overline{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وإذا كانت قيمة $n \geq 30$ فإن التقريب يكون جيدا

حالة السحب بدون ارجاع

يكون توزيع متوسط العينة كما يلي:

$$\overline{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} \backsim N(0,1)$$

المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه مجهول

من الناحية العملية غالبا ما يكون تباين مجتمع الدراسة مجهولا فيستبدل بتقديره غير المتحيز S^2، ويمكن التمييز بين حالتين لتحديد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$:

حالة السحب بارجاع

حجم العينة $n \geq 30$

المتغير $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ يقترب توزيعه من التوزيع الطبيعي المعياري استنادا إلى نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

حجم العينة $n < 30$

المتغير $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع ستودنت:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \backsim t_{n-1}$$

حالة السحب بدون ارجاع

يكون توزيع متوسط العينة كما يلي:

$$\overline{X} \backsim N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
إذا كان الدخل الأسبوعي لعمال إحدى الشركات يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 1200 وحدة نقدية وانحراف معياري قدره 100 وحدة نقدية، ما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكبر من 1180 وحدة نقدية في الأسبوع؟	إذا علمت أن نقاط الطلبة في مقياس الإحصاء تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 11 نقطة، تم اختيار عينة حجمها 36 طالبا من هذا المجتمع فوجد أن انحرافها المعياري هو 3 نقاط. المطلوب: حساب $P(\overline{X} > 13)$
الحل: ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل الدخل الأسبوعي للعمال $X \sim N(1200,100)$ لدينا σ معلوم ومنه: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $P(\overline{X} > 1180\ ) = P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \dfrac{1180 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ $= P\left(Z > \dfrac{1180 - 1200}{100/\sqrt{64}}\right) = 0.9452$	**الحل:** ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل نقاط الطلبة في مقياس الاحصاء $X \sim N(\mu, \sigma)$ $X \sim N(11, \sigma)$ لدينا σ مجهول و $n \geq 30$ ومنه: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $P(\overline{X} > 13) = P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} > \dfrac{13 - \mu}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \dfrac{13 - 11}{3/\sqrt{36}}\right)$ $= P(Z > 4) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - 0.99995$ $= 0.00005$

2.3. توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع غير طبيعي

إذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة التوزيع بمتوسط μ وتباينه σ^2 فإن توزيع المتغير العشوائي $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي كلما اقتربت قيمة n من ∞.

المثال:	الحل:
إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع متوسطه 7 وتباينه 9 ما هو احتمال أن يفوق الوسط الحسابي للعينة 8؟	لدينا $n \geq 30$ ومنه: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $P(\bar{X} > 8) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{8-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ $= P\left(Z > \frac{8-7}{3/\sqrt{36}}\right) = P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772$ $= 0.0228$

ثالثا: توزيع المعاينة للنسبة في العينة

شكل توزيع المعاينة للنسبة

إذا كان $np \geq 5$ و $nq \geq 5$ (حتى نتأكد من أن حجم العينة كبير بما فيه الكفاية) فإن توزيع $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه p وتباينه $\frac{pq}{n}$، ونكتب:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \backsim N(0,1)$$

ملاحظة: في حالة السحب بدون إرجاع نضرب تباين العينة في معامل التصحيح وإذا كانت p مجهولة تستبدل بـ $\hat{p}$.

المثال	الحل
إذا كان احتمال نجاح الطالب في أحد المقاييس هو 0.9، اختيرت عينة حجمها 49 طالبا من الطلبة الذي يدرسون هذا المقياس أوجد $P(\hat{p} \geq 0.8)$.	الصفة المدروسة هي نجاح الطالب. نعلم أن: $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \backsim N(0,1)$$ وعليه يكون الاحتمال المطلوب حسابه كما يلي: $$P(\hat{p} \geq 0.8) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \geq \frac{0.8-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = P(Z \geq -2.33)$$ $$= 1 - P(Z \leq -2.33) = 0.9901$$