الفصل الثالث:
اختبار الفرضيات

1- المفاهيم الأساسية لاختبار الفرضيات:

1-1- مفهوم الفرضيه الإحصائية:(hypothese statistical)

تعرف الفرضية بانها" عبارة ادعاء أو تخمين أو تصريح حول معلمة من معالم المجتمع المجهولة وسميت بالفرضية لانها قد تكون صحيحة او غير صحيحة لذلك يتم اختبارها لتحقق من ذلك"

يرمز للفرضية بالرمز H مثلا الفرضية هي الادعاء أن متوسط معدلات الطلاب في الاحصاء4 هي 12 فيمكن ان نصيغ الفرضية كالتالي:

$$H: \mu = 12$$

1-2- أنواع الفرضيات الاحصائية:

1-2-1- فرضية العدم (الفرضية الصفرية):

فرضية العدم أو الفرضية الصفرية هي فرضية حول معلمة المجتمع التي نريد اختبارها باستخدام بيانات من عينة والتي تشير الى ان الفرق بين معلمة المجتمع والاحصائية من العينة ناتج عن الصدفة او لا يوجد فرق حقيقي بينهما ، وهي الفرضية الأساسية المراد اختبارها ويرمز لها بالرمز H_0

وتصاغ على الشكل الآتي:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

مثال : في المثال السابق يكون الفرض الصفري هو: $H_0: \mu = 12$

1-2-2-الفرض البديل:

الفرضية البديلة هي فرضية مكملة لفرضية العدم حيث يتم قبولها عند رفض فرضية العدم او رفضها عند قبول فرضية العدم ويرمز لها بالرمز H_1

تأخد الفرضية البديلة ثلاثة أشكال بحسب الحالة المراد دراستها تتمثل فيما يلي:

$H_1: \theta \neq \theta_0$ *(اختبار ذو طرفين)*

$H_1: \theta > \theta_0$ (اختبار ذو طرف واحد من اليمين)أو

$H_1: \theta < \theta_0$ *(اختبار ذو طرف واحد من اليسار)*

1-3- منطقة القبول ومنطقة الرفض:

- **منطقة القبول:**

هي المنطقة التي تؤدي إلى قبول الفرضية الصفرية (إذا وقعت فيها احصاءة الاختبار يتم قبول الفرضية الصفرية) ويرمز لها بالرمز $\alpha - 1$ وهي تمثل درجة الثقة

- **منطقة الرفض:**

هي المنطقة التي تؤدي إلى رفض الفرضية الصفرية ويرمز لها بالرمز α وهي تمثل مستوى معنوية

1-4- . أخطاء اختبار الفرضيات وأنواعها:

عند اختبار الفرضيات يمكن ان يرتكب نوعين من الأخطاء وهما:

1-4-1- الخطأ من النوع الأول :

يتمثل هذا النوع في رفض الفرض العدم بينما هو صحيح أي انه على الرغم من ان الفرض العدم في الواقع صحيح وكان من الواجب قبوله الا انه فقد تم اخد قرار خاطئ برفضه. ويرمز له بالرمز α

1-4-2- الخطأ من النوع الثاني :

يعني هذا النوع قبول الفرض العدم وهو خاطئ أي على الرغم من أن الفرض العدم خاطئ وكان من الواجب رفضه فقد تم اخد قرار خاطئ بقبوله" أي قبول فرض خاطئ" . ويرمز له بالرمز β

ويمكن تلخيص القرارات الإحصائية كما يلي:

القرار	H_0 صحيحة	H_0 خاطئة
قبول H_0	**قرار صائب**	**الخطأ من النوع الثاني** β
رفض H_0	**خطأ من النوع الأول**α	**قرار صائب**

1-5- خطوات اختبار الفرضيات الإحصائية:

- صياغة الفرضيات: الفرضية الصفرية والفرضية البديلة
- تحديد نوع التوزيع الاحصائي وحساب القيمة الفعلية (المحسوبة) للمتغيرة
- حساب القيمة الجدولية
- اتخاد القرار

2- تطبيقات لاختبار الفرضيات

من بين الاختبارات المهمة في الإحصاء الاستدلالي التي تستعمل بشكل كبير في التطبيقات العملية الاختبارات التالية:

2-1- اختبارات الفرضيات حول متوسط مجتمع طبيعي

يمكن التمييز بين حالتين:

2-1-1. تباين المجتمع معلوم

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 معلوم.
لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

1- صياغة الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وهذا حسب نوع الاختبار:

* الفرضية الصفرية

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

- *الفرضية البديلة*

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ *(اختبار ذو طرفين)*

$H_1 : \mu > \mu_0$ أو (اختبار ذو طرف واحد من اليمين)

$H_1 : \mu < \mu_0$ *(اختبار ذو طرف واحد من اليسار)*

2-. تحديد القيمة المحسوبة للاحصائية:

يتم تحديد القيمة المحسوبة اعتمادا على شكل التوزيع الذي اعتمدنا عليها

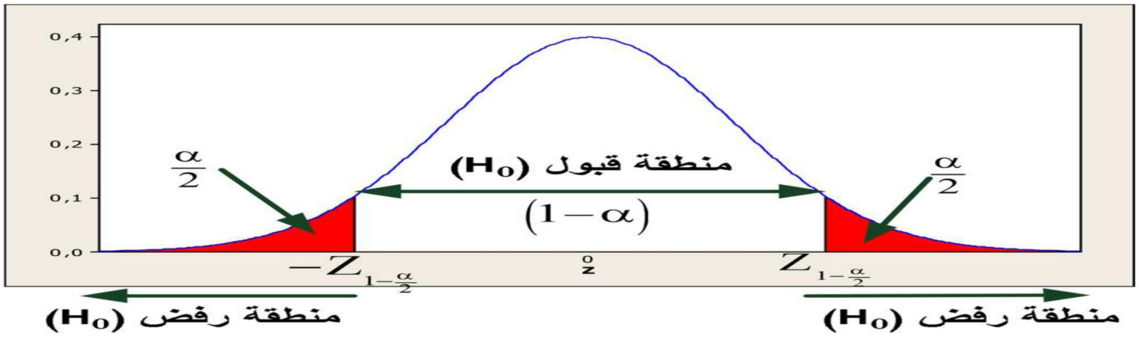
- تباين المجتمع معلوم ومنه التوزيع المعتمد عليه هو Z وعليه فان القيمة المحسوبة تحسب بالعلاقة التالية:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

3حساب القيمة الجدولية : وهذا اعتمادا على التوزيع الذي اعتمدنا عليه وبالتالي في هذه الخطوة نحدد أيضا منطقة قبول الفرضية الصفرية ومنطقة الرفض اعتمادا على شكل الفرضية كما يلي:

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حدين:**

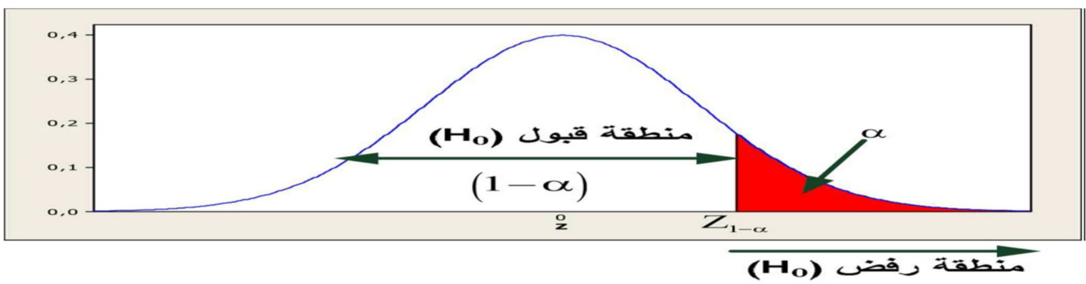
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$



$$\begin{cases} Z_0 \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليمين:**

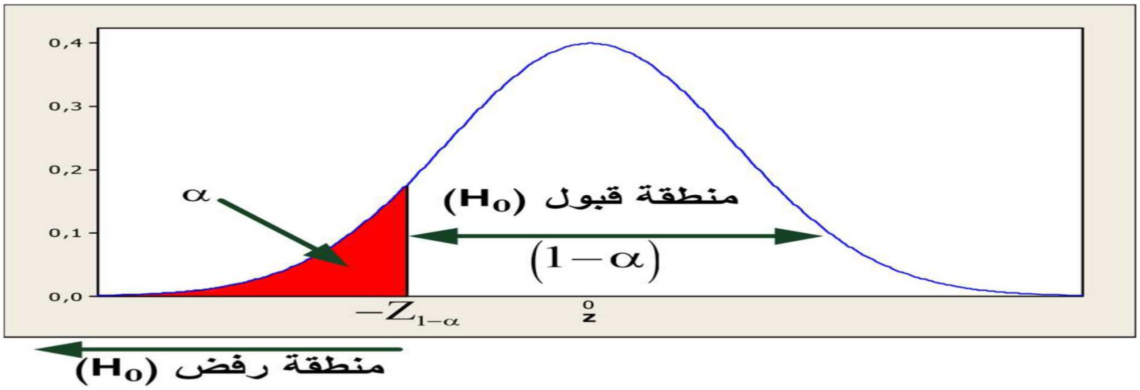
$H_1: \ \mu > \mu_0$



$$\begin{cases} Z_0 \leq Z_{1-\alpha} \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 > Z_{1-\alpha} \Rightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليسار:**

$H_1: \ \mu < \mu_0$



$$\begin{cases} Z_0 < -Z_{\ 1-\alpha} \ \Rightarrow \ \ H_0 \text{رفض} \\ Z_0 \leq -Z_{\ 1-\alpha} \ \Rightarrow \ H_0 \text{قبول} \end{cases}$$

4-اتخاد القرار:

يتم اتخاد القرار من خلال المقارنة بين القيمة المحسوبة والقيمة الجدولية

- ادا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة القبول نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرض البديل
- ادا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة الرفض نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرض البديل .

مثال:

أخذت عينة من 64 تلميذا من إحدى المدارس فوجد أن متوسط طولهم هو 155 سم، فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع هو 5 سم ،اذا علمت أن أطوال التلاميذ تتبع التوزيع الطبيعي ،اختبر عند مستوى المعنوية 0.05 الفرضية التالية:

$$H_0: \mu = 160$$
$$H_1: \mu \neq 160$$

الحل:

لدينا:

المتغير العشوائي X_i يمثل طول التلميذ.

$$\mathrm{X} \backsim \mathrm{N}(\mu, 5)$$

$$\boldsymbol{n = 64}\ ; \quad \boldsymbol{\bar{X} = 155}\ ; \quad \boldsymbol{\sigma = 5}\ ; \quad \boldsymbol{\mu_0 = 160}\ ; \quad \boldsymbol{\alpha = 0.05}$$

1- صياغة الفرضيات:

$$H_0: \mu = 160$$
$$H_1: \mu \neq 160$$

2- **تحديد القيمة المحسوبة للاحصائية:**

يتم تحديد القيمة المحسوبة اعتمادا على شكل التوزيع الذي اعتمدنا عليها

- تباين المجتمع معلوم ومنه التوزيع المعتمد عليه هو Z وعليه إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

- فان القيمة المحسوبة للإحصاءة تحسب بالعلاقة التالية.

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

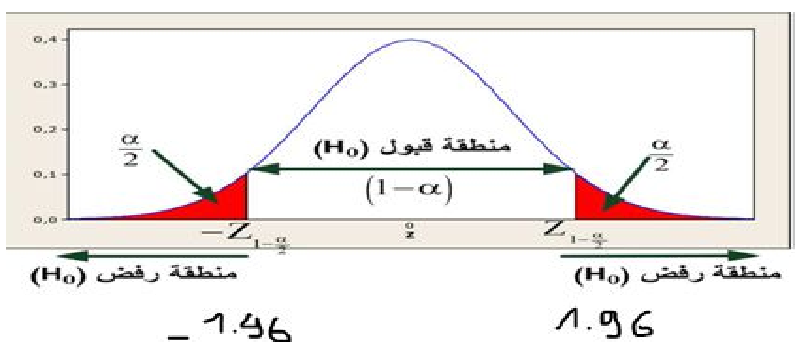
$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{155 - 160}{\frac{5}{\sqrt{64}}} = -8$$

3- القيمة الجدولية.

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \Rightarrow -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1.96$$

- **تحديد منطقة القبول والرفض:**



4-القرار الاحصائي:

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفضها ونقبل الفرضية البديلة H_1.

2.1.3 تباين المجتمع مجهول

من الناحية العملية غالبا ما يكون تباين مجتمع الدراسة مجهولا فيستبدل بتقديره غير المتحيز S^2، ويمكن التمييز بين حالتين :

- **الحالة الأولى:** إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

نعتمد في اختبار المتوسط على الخطوات السابقة والمتمثلة فيمايلي

1) **صياغة الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وهذا حسب نوع الاختبار:**

- الفرضية الصفرية

$$H_0: \mu = \mu_0$$

- الفرضية البديلة

$H_1: \mu \neq \mu_0$ *(اختبار ذو طرفين)*

$H_1: \mu > \mu_0$ أو (اختبار ذو طرف واحد من اليمين)

$H_1: \mu < \mu_0$ *(اختبار ذو طرف واحد من اليسار)*

2) **تحديد القيمة المحسوبة للاحصائية:**

يتم تحديد القيمة المحسوبة اعتمادا على شكل التوزيع الذي اعتمدنا عليها

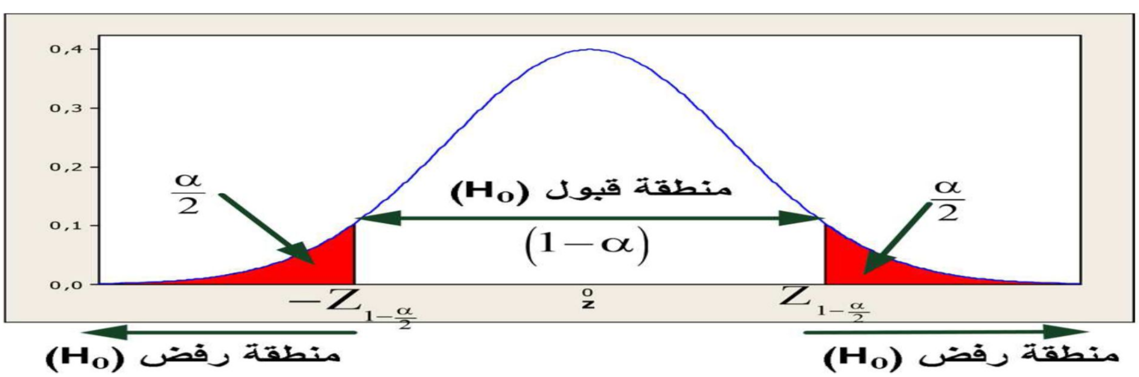
- تباين المجتمع مجهول حجم العينة $n \geq 30$ ومنه التوزيع المعتمد عليه هو Z وعليه فان القيمة المحسوبة تحسب بالعلاقة التالية.

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

3) **حساب القيمة الجدولية :** وهذا اعتمادا على التوزيع الذي اعتمدنا عليه وبالتالي في هذه الخطوة نحدد أيضا منطقة قبول الفرضية الصفرية ومنطقة الرفض اعتمادا على شكل الفرضية كما يلي:

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حدين:**

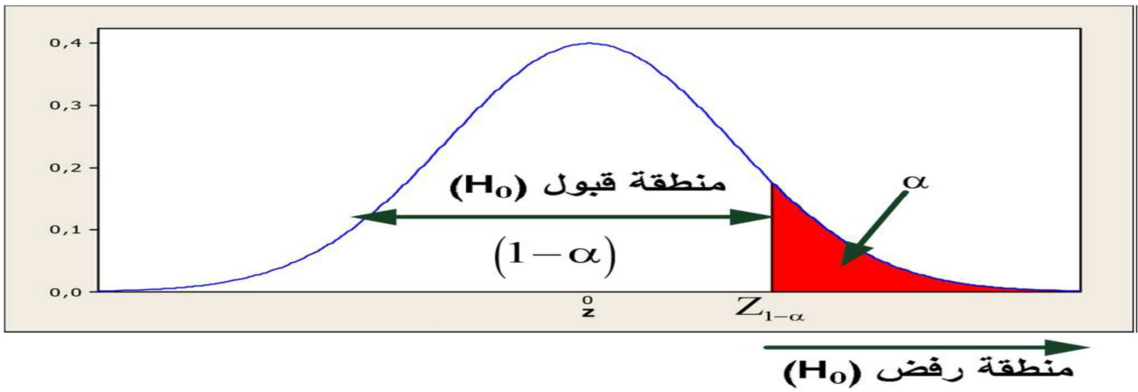
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$



$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليمين:**

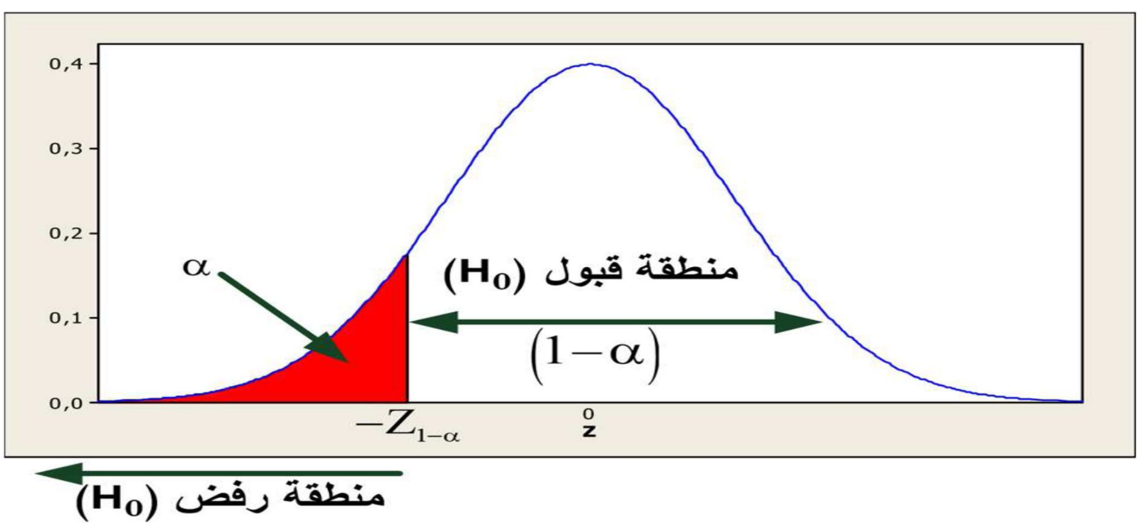
أو $H_1: \mu > \mu_0$



$$\begin{cases} Z_0 \le Z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 > Z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليسار:**

$H_1: \mu < \mu_0$



$$\begin{cases} Z_0 < -Z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ رفض ل} \\ Z_0 \le -Z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ قبول} \end{cases}$$

4) **اتخاد القرار:**

يتم اتخاد القرار من خلال المقارنة بين القيمة المحسوبة والقيمة الجدولية

- إذا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة القبول نقبل الفرضية الصفريةH_0 ونرفض الفرض البديل H_1
- إذا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة الرفض نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- **الحالة الثانية:** إذا كان حجم العينة $n < 30$:

لديناإحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{{s}/{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

نعتمد في اختبار المتوسط على الخطوات السابقة والمتمثلة فيمايلي

1-صياغة الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وهذا حسب نوع الاختبار:

- الفرضية الصفرية

$$H_0: \mu = \mu_0$$

- الفرضية البديلة

$H_1: \mu \neq \mu_0$ *(اختبار ذو طرفين)*

$H_1: \mu > \mu_0$أو(اختبار ذو طرف واحد من اليمين)

$H_1: \mu < \mu_0$ *(اختبار ذو طرف واحد من اليسار)*

2-تحديد القيمة المحسوبة للاحصائية:

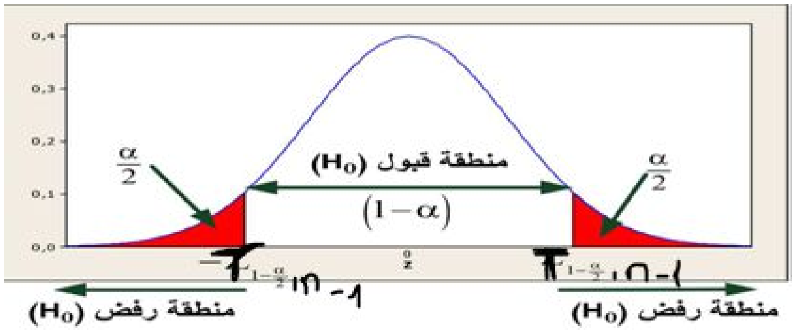
- تباين المجتمع مجهول حجم العينة $n < 30$ومنه التوزيع المعتمد عليه هو T وعليه فان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار تحسب بالعلاقة التالية:

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{{S}/{\sqrt{n}}}$$

3-حساب القيمة الجدولية : وهذا اعتمادا على التوزيع الذي اعتمدنا عليه وبالتالي في هذه الخطوة نحدد أيضا منطقة قبول الفرضية الصفرية ومنطقة الرفض اعتمادا على شكل الفرضية كما يلي:

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حدين:**

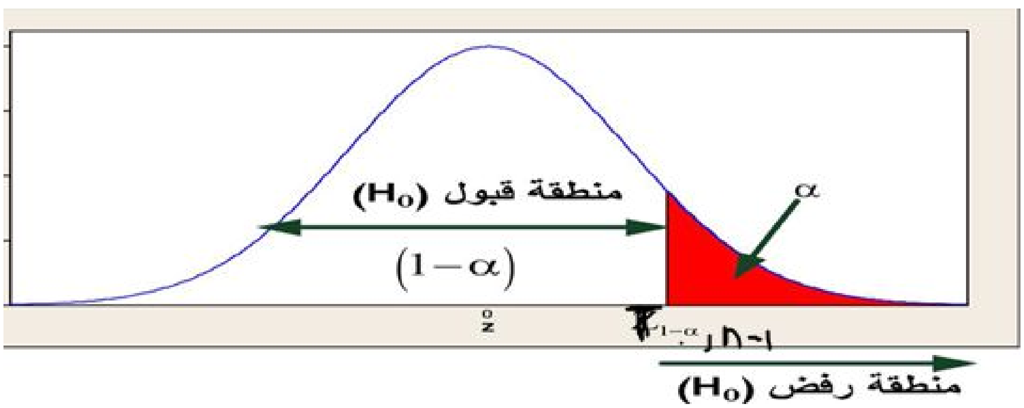
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$



$$\begin{cases} T_0 \epsilon \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليمين:**

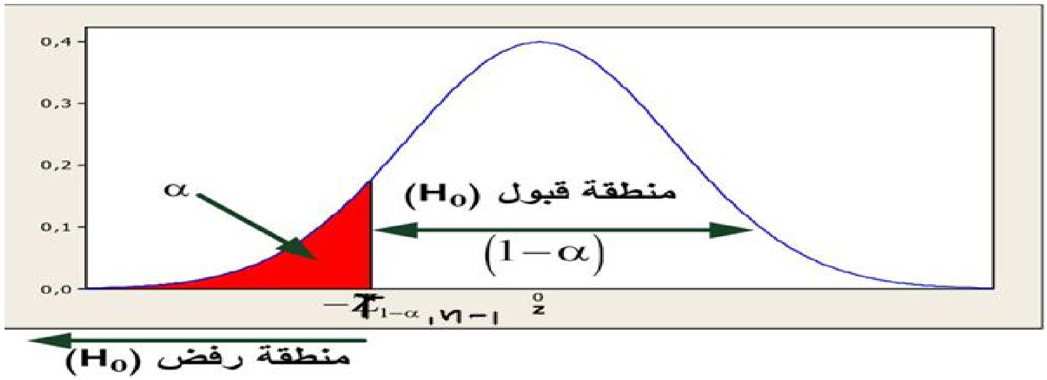
أو $H_1: \mu > \mu_0$



$$\begin{cases} T_0 \leq T_{\,1-\alpha} & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ T_0 > T_{\,1-\alpha} & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

- **منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليسار:**

$H_1: \mu < \mu_0$



$$\begin{cases} T_0 < -T_{\,1-\alpha} \implies & \text{رفض } H_0 \\ T_0 \geq -T_{\,1-\alpha} \implies & \text{قبول } H_0 \end{cases}$$

4-اتخاد القرار:

يتم اتخاد القرار من خلال المقارنة بين القيمة المحسوبة والقيمة الجدولية

- إذا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة القبول نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرض البديل H_1
- إذا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة الرفض نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال:

إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو 15 وحدة نقدية في العام الماضي تم أخذ عينة من 7 مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم في العام الحالي فوجد أنه 17 وحدة نقدية بانحراف معياري 2 وحدة نقدية. هل توافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام عند مستوى المعنوية 0.05؟

الحل:

لدينا:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل ربح السهم.

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\boldsymbol{n = 7\,;\quad \bar{X} = 17;\quad S = 2\,;\quad \mu_0 = 15\,;\quad \alpha = 0.05}$$

1-صياغة الفرضيات:

$$H_0: \mu = 15$$
$$H_1: \mu > 15$$

2- تحديد القيمة المحسوبة للاحصائية.

- لدينا σ مجهول و $n < 30$ ومنه احصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- والقيمة المحسوبة للإحصاءة تحسب بالعلاقة التالية:

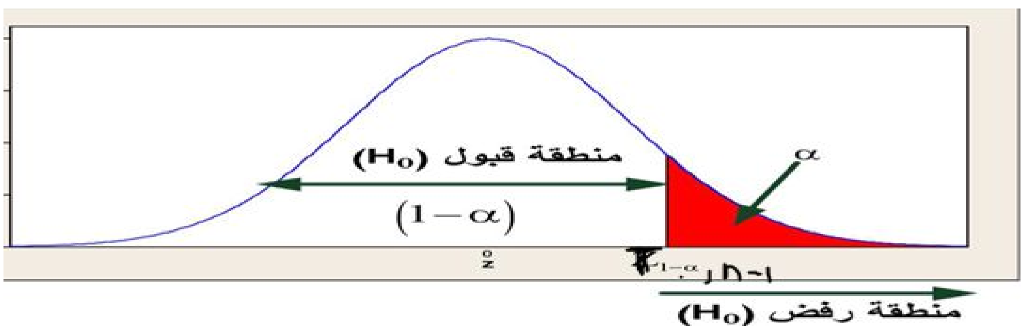
$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{17 - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 2.65$$

3-القيمة الجدولية:

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية ذات طرف واحد من اليمين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow T_{1-\alpha,n-1} = T_{0.95,6} = 1.943$$

تحديد منطقة القبول والرفض



4-القرار الاحصائي:

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نقبل الفرضية البديلة H_1 وأوافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام عند مستوى المعنوية 0.05.

ملاحظة:

في حالة عدم معرفة توزيع المجتمع نسحب عينة كبيرة بقدر كاف لتطبيق نظرية النهاية المركزية ونستخدم التوزيع الطبيعي.