المحاضرة 5:

3- خصائص المقدرات النقطية:

لكي يكون المقدر جيد وفعال يجب أن يحقق الخصائص المرغوبة التالية:

- عدم التحيز .
- الكفاية .
- الاتساق .
- الكفاءة .

3-1- عدم التحيز:

يقاس التحيز بالعلاقة:

$$\boldsymbol{bias = E(\hat{\theta}) - \theta}$$

3-2- الكفاية:

نقول عن الاحصائية U إحصائية كافية إذا وفقط إذا كاننت دالة الاحتمال المشترك $f(X_1,..,X_n,\theta)$ مساوية إلى $g(U,\theta).h(X_1,..,X_n)$.

حيث:

$g(U,\theta)$ دالة في الإحصاءة والمعلمة .

3-3- الاتساق :

إذا كان $\hat{\theta}_n$ يتقارب بالاحتمال للمعلمة θ $\left(\hat{\theta}_n \overset{P}{\rightarrow} \theta\right)$ عند ذلك نقول أن $\hat{\theta}_n$ مقدر متسق للمعلمة θ. بمعنى:

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta_n} = \theta$$

3-4- الكفاءة :

إذا كان $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة θ، تقاس الكفاءة النسبية لـ $\boldsymbol{\hat{\theta}_1}$ نحو $\boldsymbol{\hat{\theta}_2}$ بالعلاقة:

$$e(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}$$

إذا كان $V(\hat{\theta}_2) > V(\hat{\theta}_1)$ فإن $\hat{\theta}_1$ أكثر كفاءة من $\hat{\theta}_2$، أي أن $\hat{\theta}_1$ له تباين أقل من تباين $\hat{\theta}_2$.

*الاحصاءة الكافية (المقدر الكاف):

نظرية:

لتكن U إحصائية تعتمد على العينة العشوائية $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$، نقول عن U إحصائية كافية إذا كان من الممكن تحليل دالة الاحتمال المشترك $f\left(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n, \theta\right)$ التي يعتمد على المعلمة θ إلى دالتين غير سالبتين:

$$f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n, \theta) = g(U,\theta).h(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$$

$g(U,\theta)$ دالة للإحصاءة والمعلمة فقط

$h(X_i)$ دالة للمشاهدات فقط

4- معلومة فيشر والحد الأدنى لكرامرراو Fisher Information and Cramer- Rao Lower Bound

4- 1- معلومة فيشر Fisher Information

إذا كانت المتغير العشوائي X له دالة الكثافة الاحتمالية $f(x,\theta)$، عندئذ معلومة فيشر تعرّف بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 Ln\ \ f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right)}$$

أو بصيغة أخرى مكافئة:

$$\boldsymbol{I(\theta) = E\left(\frac{\partial\ Ln\ \ f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = V\left(\frac{\partial\ Ln\ \ f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)}$$

4- 2- الحد الأدنى لكرامر- راو Cramer- Rao Lower Bound

لنفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع إحصائي له دالة الكثافة المشتركة $f(x,\theta)$ بالمعلمة θ، وأن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز، عندئذ:

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$