Université Abdelhafid Boussouf - Mila 2022 – 2023
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique Algèbre 2

Série no 3 : Matrices

Exercice 1. ***1.*** *Écrire les matrices des applications linéaire suivantes dans les bases canoniques :*

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 2y-z, x+z). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & XP - P' + P(1). \end{array}$$

2. *Écrire la matrice d'applications linéaire suivante*

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & P & \longmapsto & (\overline{P(1-i)}, \mathrm{Re}(P(i)), \end{array}$$

dans les bases $\{1, i, X, iX\}$ *et* $\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$.

Exercice 2. *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Parmi les produits suivants* AB, BC *et* CB, *lesquels ont un sens ?*
2. *Calculer* AC, ${}^tAB\,{}^tC$ *et* B^2.
3. *Déterminer les coefficients manquants des matrices pour que les égalités sont vrai :*

$$\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cdot & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & \cdot & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & 2 & -4 \\ -5 & -2 & \cdot \\ 1 & \cdot & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 10 & -3 \\ -4 & 7 & \cdot \\ 39 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *En utilisant deux méthodes différentes, calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. ***1.*** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) *Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.*

(b) *Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.*

2. *Déterminer le nombre λ tel que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. *(Supplémentaire)*
Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & f(M) = \begin{pmatrix} x-y & t-z \\ z-t & y-x \end{pmatrix} \end{array}$$

Posons

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.*
2. *Trouver la matrice de f dans la base canonique $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.*
3. *Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base B' de $\mathrm{Im}(f)$.*
4. *Soit $g \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g(M) = f(M), \forall M \in M_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de g dans la base B' de F.*

Exercice 6. *(Supplémentaire)*
Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $2A - 6I_4$ sachant que $A^2 = 6A - 8I_4$ et que ce déterminant est positif.