Chapitre 3

Lois usuelles de probabilités

Contenu

Une loi de probabilité est une fonction mathématique qui décrit de manière théorique une expérience aléatoire.
Les lois de probabilité sont essentielles en biologie pour quantifier et prédire la variabilité dans divers processus biologiques. Elles permettent aux biologistes d'analyser des données, de formuler des hypothèses et de prendre des décisions. Ces lois mathématiques contribuent ainsi à une meilleure compréhension des phénomènes aléatoires dans le monde vivant

3.1 Variable aléatoire

Définition 1. *Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans ℝ*

$$\begin{aligned} X:\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto X(w) \end{aligned}$$

on distingue deux types de variables aléatoires :

3.1.1 Variable aléatoire discrète

Définition 2. *On dit qu'une variable aléatoire X est discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées.*

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire sur Ω, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, la loi de probabilité de X est donnée par

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p_1 = p(X = x_1)$	$p_2 = p(X = x_2)$	$\cdots$	$p_n = p(X = x_n)$

Fonction de répartition

La foncion de répartition de la v.a.X est donnée par

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i) = \begin{cases} 0 & si & x < x_1 \\ p_1 & si & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & si & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & & \\ 1 & si & x \geq x_n \end{cases}$$

Espérence mathématique

L'espérence mathématique de la v.a.X est donnée par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$$

Variance et l'écart-type

La variance de la v.a.X est donnée par

$$V(X) = E\Big[\big(X - E(X)\big)^2\Big] = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 p(X = x_i)$$

ou

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)\Big)^2$$

L'écart-type de la v.a.X est donnée par : $\delta_x = \sqrt{V(X)}$

Example 3.1.

Soit l'expérience aléatoire "on lance un dé à six faces et on regarde le résultat".

On considère le jeu suivant :

- *Si le résultat est pair on gagne* 2 *DA*
- *Si le résultat est* 1 *on gagne* 3 *DA*
- *Si le résultat est* 3 *ou* 5 *on perd* 4 *DA*

On va définir ainsi une variable aléatoire X qui donne le gain à ce jeu.

❶ *L'ensemble fondamentale* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

❷ $X(\Omega) = \{-4, 2, 3\}$.

❸ *Déterminons la loi de probabilité de X.*

x_i	-4	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

❹ *Déterminons la fonction de répartition de X.*

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si & x < -4 \\ \frac{2}{6} & si & -4 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & si & 2 \leq x < 3 \\ 1 & si & x \geq 3 \end{cases}$$

❺ *Calculons l'espérance mathématique* $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) \\ &= -4(2/6) + 2(3/6) + 3(1/6) = 1/6 \end{aligned}$$

❻ $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 8.8$ *et* $\delta_x = \sqrt{V(X)} = 2.97$

3.1.2 Variable aléatoire continue

Définition 3. *On dit qu'une variable aléatoire X est continue si elle peut prendre toutes valeurs comprises dans un intervalle.*

Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire continue. On dit que

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

est une densité de probabilité de X si

❶ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

❷ f est continue sur $\mathbb{R}$

❸ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Fonction de répartition

La foncion de répartition d'une v.a.c.X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propriétés 3.1.1.

❶ *$F_X(x)$ est positive*

❷ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Remarque 3.1.1.

❶ $p(X = x) = 0$

❷ $p(X \leq x) = p(X < x)$

❸ *La probabilité de la v.a.c.X* $\in [a, b]$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= p(a < X \leq b) \\ &= p(a \leq X < b) \\ &= p(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(t)dt \\ &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Espérence mathématique

L'espérence mathématique de la v.a.c.X est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

Variance et l'écart-type

La variance de la v.a.c.X est donnée par

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(X - E(X)\right)^2 f(x)dx\right)$$

ou

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(E(X)\right)^2$$

3.2 Lois usuelles de probabilités

3.2.1 Lois discrètes

Loi de Bernoulli

$\rightsquigarrow$ Toute expérience aléatoire ayant deux résultats possibles succés et échec est appelée expérience de Bernoulli

$\rightsquigarrow$ Loi de probabilité

la variable aléatoire $X = 1$ en cas de réussite avec la probabilité p et $X = 0$ en cas d'échec avec la probabilité $q = 1 - p$

$$p(X = x) = \begin{cases} p & si \quad x = 1 \\ q & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Notation

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

$\rightsquigarrow$ $E(X) = p$

$\rightsquigarrow$ $V(X) = pq$

$\rightsquigarrow$ $\delta_X = \sqrt{V(X)}$

Example 3.2.
On lance une pièce de monnaie bien équilibré en air, si j'obtient face on a succés.
⇝ *E.a est une expérience de Bernoulli*

$$\Omega = \{face, pile\}, \quad A = \{face\}, \quad \bar{A} = \{pile\}$$

⇝ *Loi de probabilité*
la probabilité de succés $p = p(A) = \frac{1}{2}$
la probabilité d'échec $q = p(\bar{A}) = \frac{1}{2}$

$$p(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & si \quad x = 1 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad x = 0 \end{cases}$$

⇝ $E(X) = p = \dfrac{1}{2}$
⇝ $V(X) = pq = \dfrac{1}{4}$
⇝ $\delta_X = \sqrt{V(X)} = \dfrac{1}{2}$

Loi Binomiale

⇝ La loi Binomiale de paramètre n et p modilise le nombre de succés obtenus lors de la répétition de n expérience de Bernoulli de manière identique et indépendante.
⇝ Loi de probabilité

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad k = 1, 2, ..., n. \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

⇝ Notation

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

⇝ $E(X) = np$
⇝ $V(X) = npq$
⇝ $\delta_X = \sqrt{V(X)}$

Example 3.3.

On jette un dé équilibré 5 fois et on s'intéressera au résultat "avoir le chiffre 02"

❶ *Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le chiffre 02 ?*

❷ *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois le chiffre 02 ?*

❸ *Déterminer $E(X), V(X)$ et δ_X*

Solution :

La variable aléatoire X : "avoir le chiffre 02", $X \sim \mathcal{B}(5, p)$

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A = \{2\}, \quad \bar{A} = \{1,3,4,5,6\}$$

la probabilité de succés : $p = p(A) = \frac{1}{6}$

la probabilité d'échec : $q = p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$

❶ $p(X=2) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 0.16$

❷

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= 1 - p(X < 3) \\ &= 1 - \Big(p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)\Big) \\ &= 1 - \Big(0.4 + 0.4 + 0.16\Big) = 0.036 \end{aligned}$$

❸ $E(X) = np = \dfrac{5}{6}, \quad V(X) = npq = \dfrac{25}{36}, \quad \delta_X = \sqrt{V(X)} = \dfrac{5}{6}$

Loi de Poisson

$\rightsquigarrow$ La loi de Poisson est la loi des événements rares c'est-à-dire des événements ayant une faible probabilité de réalisation.

$\rightsquigarrow$ Loi de probabilité

$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0$$

$\rightsquigarrow$ Notation

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$\rightsquigarrow$ $E(X) = \lambda$

$\rightsquigarrow$ $V(X) = \lambda$

$\rightsquigarrow$ $\delta_X = \sqrt{\lambda}$

Example 3.4.

Une centrale téléphonique recoit en moyenne 5 appels par minute

Quelle est la probabilité que la centrale recoit exactement deux appels ?

La variable aléatoire X : le nombre d'appels dans la centrale $X \sim \mathcal{P}(5)$

$$p(X = 2) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-5}\frac{5^2}{2!} = 0.084$$

3.2.2 Lois continues

Loi normale

$\rightsquigarrow$ Une variable aléatoire X suit une loi normale ou loi de Gauss-Laplace de paramètres m et δ si :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\delta}\right)^2}$$

$\rightsquigarrow$ Notation :

$$X \sim N(m, \delta)$$

Loi log normale

⇝ Une variable aléatoire X suit une loi log normale si $\ln(X)$ suit une loi normale $N(m, \delta)$:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{\delta}\right)^2}, \quad x > 0$$

⇝ Notation

$$X \sim LN(m, \delta)$$

Loi normale centrée et réduite

⇝ On appelle loi normale centrée réduite la loi $N(0, 1)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

⇝ Si $X \sim N(m, \delta)$ alors $Y = \dfrac{X - m}{\delta} \sim N(0, 1)$

Example 3.5. *La table $N(0,1)$ et calcul de probabilité*

• $X \sim N(0,1)$ *calculer* $p(X \leq 1.25)$ *et* $p(X \leq 0.67)$

$x = 1.25 \Longrightarrow$ *ligne* $= 1.2$ *et colonne* $= 0.05 \Longrightarrow p(X \leq 1.25) = F(1.25) = 0.8944$

$x = 0.67 \Longrightarrow$ *ligne* $= 0.6$ *et colonne* $= 0.07 \Longrightarrow p(X \leq 0.67) = F(0.67) = 0.7486$

• $X \sim N(0,1)$ *calculer* $p(X \geq 0.87)$ *et* $p(X \leq 0.74)$

$$p(X \geq 0.87) = 1 - p(X \leq 0.87) = 1 - F(0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$$

$$p(X \geq 0.74) = 1 - p(X \leq 0.74) = 1 - F(0.74) = 1 - 0.7704 = 0.2296$$

• $p(X \leq -x) = 1 - p(X \leq x)$ *calculer* $p(X \leq -1.87)$

$$p(X \leq -1.87) = 1 - p(X \leq 1.87) = 1 - F(1.87) = 1 - 0.9693 = 0.0407$$

• $p(X \geq -x) = p(X \leq x)$ *calculer* $p(X \geq -0.74)$

$$p(X \geq -0.74) = p(X \leq 0.74) = 0.7704$$

• $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ *calculer* $p(1.15 \leq X \leq 2.25)$ *et* $p(-0.58 \leq X \leq -0.14)$

$$p(1.15 \leq X \leq 2.25) = F(2.25) - F(1.15) = 0.9878 - 0.8749 = 0.1129$$

$$p(-0.58 \leq X \leq -0.14) = F(0.58) - F(0.14) = 0.7190 - 0.5557 = 0.1633$$

• $p(-a \leq X \leq b) = F(b) + F(a) - 1$ *calculer* $p(-1.14 \leq X \leq 2.58)$

$$p(-1.14 \leq X \leq 2.58) = F(2.58) + F(1.14) - 1 = 0.9951 + 0.8729 - 1 = 0.8679$$

• $p(-a \leq X \leq a) = 2F(a) - 1$ *calculer* $p(-1 \leq X \leq 1)$ *et* $p(-1.96 \leq X \leq 1.96)$

$$p(-1 \leq X \leq 1) = 2F(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6827$$

$$p(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 2F(1.96) - 1 = 2(0.976) - 1 = 0.95$$

Loi de Khi-deux

⇝ Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes $\sim N(0,1)$. alors $Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ suit une loi appelée loi de khi-deux à n degrés de liberté.

$$f(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{avec} \quad \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^x x^{n-1} dx$$

⇝ Notation

$$Y \sim \chi_n^2$$

⇝ $E(Y) = n$

⇝ $V(Y) = 2n$

Example 3.6. *La table χ_n^2 et calcul de probabilité*

- $Y \sim \chi_{18}^2$ *calculer* $p(Y \leq 28.87)$

$$p(Y \leq 28.87) = 0.95$$

- $Y \sim \chi_{10}^2$ *calculer* $p(Y \geq 23.209)$

$$p(Y \geq 23.209) = 1 - p(Y \leq 23.209) = 1 - 0.99 = 0.01$$

- *Trouver y tel que* $p(Y \leq y) = 0.975$ *et* $Y \sim \chi_{22}^2$

$$y = 36.781$$

- *Trouver y tel que* $p(Y \geq y) = 0.99$ *et* $Y \sim \chi_7^2$

$$p(Y \leq y) = 1 - p(Y \geq y) = 1 - 0.99 = 0.01 \quad donc \quad y = 1.239$$

Loi de Student

$\rightsquigarrow$ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. Alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit une loi appelée loi de Student à n degrés de liberté

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$

$\rightsquigarrow$ Notation

$$T \sim t_n$$

$\rightsquigarrow$ $E(T) = 0, \;\; n > 1$

$\rightsquigarrow$ $V(T) = \frac{n}{n-2}, \;\; n > 2$

Example 3.7. *La table t_n et calcul de probabilité*

- *$T \sim t_9$ calculer $p(T \geq 2.2622)$ et $p(T \geq 1.3830)$*

$$p(T \geq 2.2622) = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

$$p(T \geq 1.3830) = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

- *$T \sim t_{16}$ calculer $p(T \leq 1.746)$*

$$p(T \leq 1.746) = 1 - p(T \geq 1.746) = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95$$