Chapitre 2

Rappel sur la théorie des probabilités

Contenu

2.1 Expérience aléatoire et événement

Définition 1. *(Expérience aléatoire)*
Une expérience aléatoire (e.a) est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard.

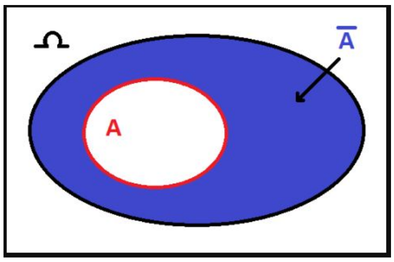
Définition 2. *(Ensemble fondamental)*
L'ensemble de tous les résultats possibles d'une e.a. est appelé ensemble fondamental et on le note généralement Ω.

Définition 3. *(Evénement)*
Un événement de Ω est un sous ensemble de Ω.

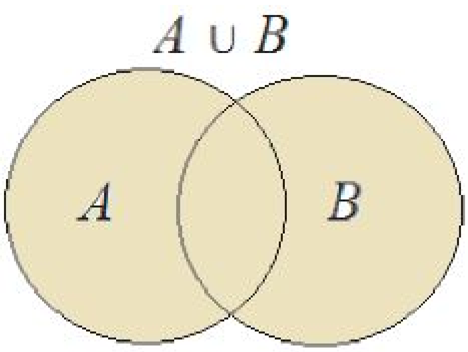
❶ Un événement est certain s'il se réalise toujours.

❷ Un événement est impossible s'il ne se réalise jamais.

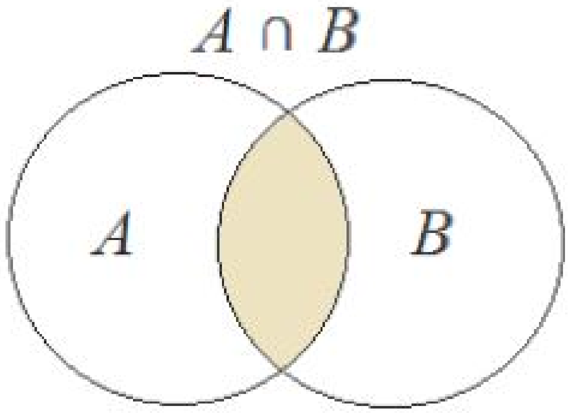
❸ L' événement contraire de A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas et on le note $\bar{A}$.



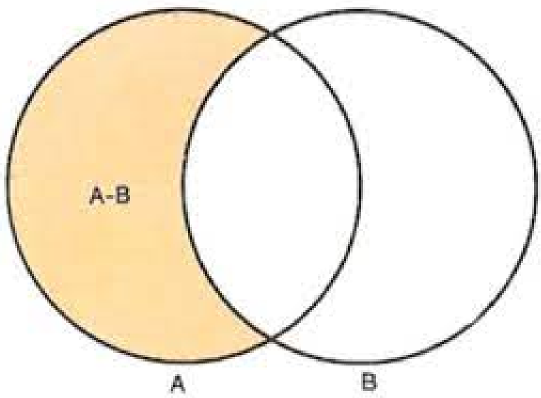
❹ L' événement $A \bigcup B$ est réalisé si A est réalisé ou B est réalisé.



❺ L′ événement $A \bigcap B$ est réalisé si A et B sont réalisé.



❻ L′ événement $A - B$ est réalisé si A est réalisé mais non B.



❼ Les événements incompatibles (disjoints) : A et B sont incompatibles $\Longleftrightarrow$ $A \bigcap B = \emptyset$.

Example 2.1.

L'expérience aléatoire '" lancer d'un dé à six faces numérotées".

L'ensemble fondamental

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L' événement A : "avoir le chiffre 2"

$$A = \{2\} \subset \Omega$$

. L' événement B : "avoir un chiffre pair"

$$B = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$$

. L' événement $\bar{B}$: "avoir un chiffre impair", est un événement contraire de B

$$\bar{B} = \{1, 3, 5\}$$

L' événement C : "avoir un chiffre inférieur à 7", est un événement certain

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L' événement D : "avoir un chiffre supérieur à 8", est un événement impossible.

L' événement $B - A = \{4, 6\}$.

L' événement $A \bigcup B = \{2, 4, 6\}$.

L' événement $A \bigcap B = \{2\}$.

A et B ne sont pas incompatibles car $A \bigcap B \neq \emptyset$

Définition 4. *(Définition classique des probabilités)*

A chaque événement A d'une expérience aléatoire, on définit la probabilité de la réalisation de A par.

$$P(A) = \frac{\textit{nombre de cas où A se réalise}}{\textit{nombre de cas possibles}} = \frac{\textit{nombre d'éléments de A}}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$$

Example 2.2.

Le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure est une expérience aléatoire.

⇝ *L'ensemble fondamental est :*

$$\Omega = \{pile, face\}$$

.

A=" obtenir pile"

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

B=" obtenir face"

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

Définition 5. *(probabilité)*

Une probabilité est une application $P : \Omega \to [0, 1]$ telle que : pour tout $A \in \Omega$, on a

❶ $P(\Omega) = 1$

❷ *Pour tous événements A et B incompatibles,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

.

Propriétés 2.1.1. ❶ $P(\emptyset) = 0$

❷ $0 \leq P(A) \leq 1$

❸ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

❹ $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

❺ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

❻ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.2 Probabilités conditionnelles

Définition 6.

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B notée $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ est donnée par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Example 2.3.

Une classe est composée de 17 éléves

8 éléves étudient l'anglais

7 éléves étudient l'allemand

2 éléves étudient les deux langues

On sait qu'un éléve étudie l'anglais, c'est quoi la probabilité qu'il étudie l'allemand ?

on a

$$P(L/A) = P_A(L) = \frac{P(L \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{8}{17}, \quad P(L) = \frac{7}{17}, \quad P(L \cap A) = \frac{2}{17}$$

donc

$$P(L/A) = \frac{2/17}{8/17} = \frac{1}{4}$$

Remarque 2.2.1. *A et B deux événements indépendants* $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque 2.2.2. *Si A et B deux événements indépendants, alors*

$$P(A/B) = P(A)$$

et

$$P(B/A) = P(B)$$

2.3 Formule des probabilités totales

Définition 7.

Soit E un ensemble. $B_1, B_2, ..., B_n$ *forment une partition de E si :*

❶ $\forall\, i \in 1, ..., n\,;\, B_i \neq \emptyset$

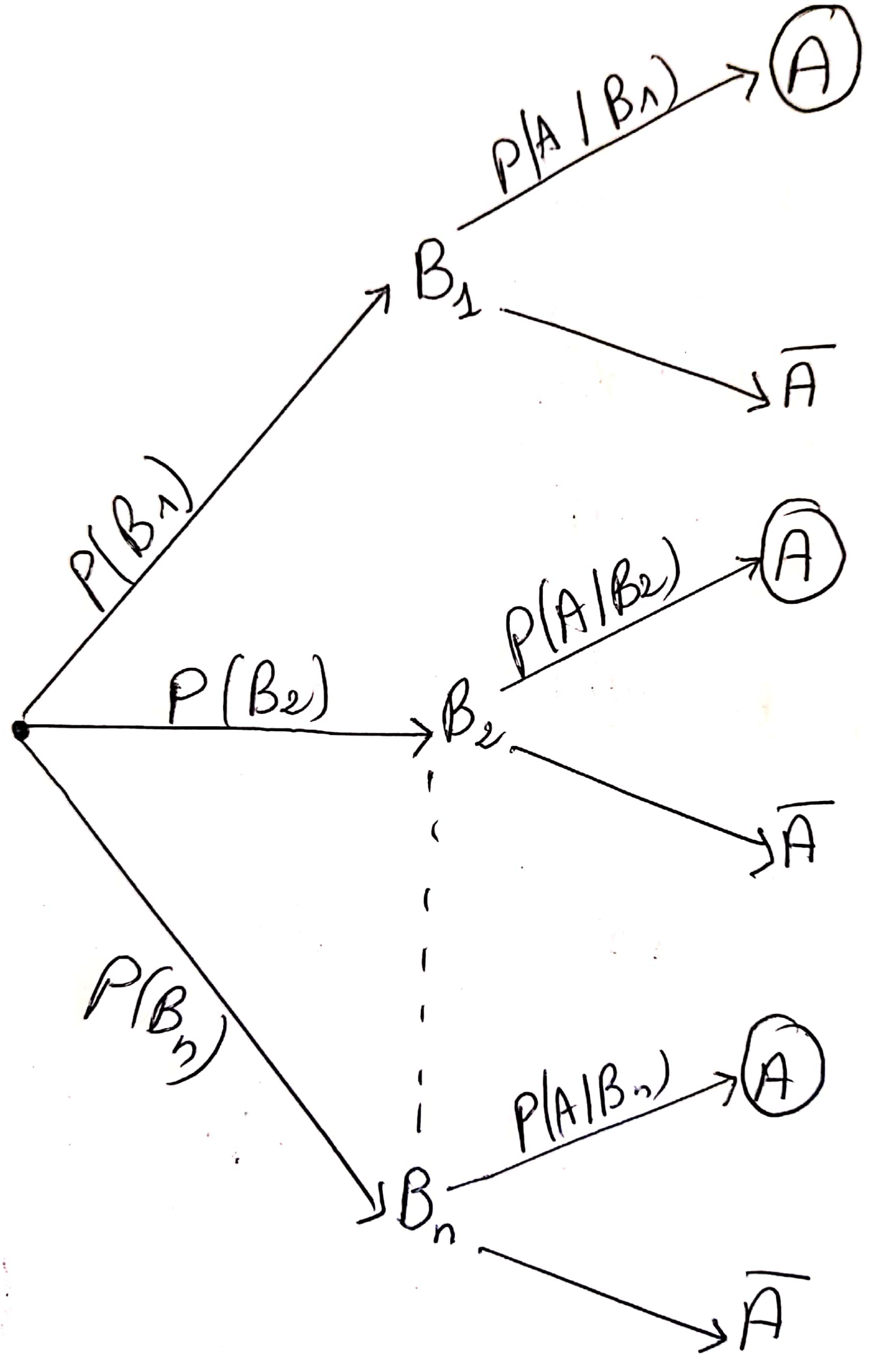
❷ $\forall\, i \neq j\,;\, B_i \cap B_j = \emptyset$

❸ $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = E$

Définition 8.

Si les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ *forment une partition de* Ω*, alors*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + ... + P(B_n)P(A/B_n)$$



Scanné avec CamScanner