الفصل الثالث:

اختبار الفرضيات

1. الاختبارات المعلمية

هي اختبار الفرضيات الإحصائية المتعلقة بمعلمات المجتمعات الإحصائية علما أن توزيعاتها معروفة، فإذا كانت θ معلمة لمجتمع إحصائي وكانت الفرضية موضع الاختبار $H_0: \theta = \theta_0$ فإن الفرضية البديلة H_1 تكون في إحدى الحالات التالية:

1.1 الفرضية البديلة ذات الطرفين

وتصاغ على الشكل $H_1: \theta \neq \theta_0$ فإذا كانت α هي مستوى المعنوية وكانت دالة الاختبار φ_0 فإننا $\frac{\alpha}{2}$ نضع في كل طرف توزيع إحصاءة الاختبار φ_0 :

$$P(\varphi_0 < k_0) = P(\varphi_0 > k_1) = \frac{\alpha}{2}$$

ونقبل الفرضية H_0 إذا وقعت قيمة احصاء اختبار H_0 المحسوبة من العينة بين العددين k_0 و k_1 اللذان يمثلان الحدين الأعلى والأدنى لمجال الثقة للمعلمة θ.

2.1 الفرضية البديلة ذات الطرف الأيسر

وتصاغ على الشكل $H_1: \theta < \theta_0$ وفي هذه الحالة نضع α في الطرف الأيسر من توزيع إحصاءة الاختبار φ_0 وتحدد k بحيث: $P(\varphi_0 < k) = \alpha$ ، ونقبل H_0 اذا كانت $\theta_0 > k$ ونرفضها إذا كانت $\theta_0 < k$.

3.1 الفرضية البديلة ذات الطرف الأيمن

وتصاغ على الشكل $H_1: \theta > \theta_0$ وفي هذه الحالة نضع α في الطرف الأيمن من توزيع إحصاءة الاختبار φ_0 وتحدد k بحيث: $P(\varphi_0 > k) = \alpha$ ونقبل H_0 اذا كانت $\theta_0 < k$ ونرفضها إذا كانت $\theta_0 > k$.

2. تطبيقات لاختبار الفرضيات

من بين الاختبارات المهمة في الإحصاء الاستدلالي التي تستعمل بشكل كبير في التطبيقات العملية الاختبارات التالية:

1.2 اختبارات الفرضيات حول متوسط مجتمع طبيعي

يمكن التمييز بين حالتين:

1.1.2 تباين المجتمع معلوم

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 معلوم.

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

أو $H_1: \mu > \mu_0$

أو $H_1: \mu < \mu_0$

مثال:

أخذت عينة من 64 تلميذا من إحدى المدارس فوجد أن متوسط طولهم هو 155 سم، فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع هو 5 سم اختبر عند مستوى المعنوية 0.05 الفرضية التالية:

$$H_0: \mu = 160$$
$$H_1: \mu \neq 160$$

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل طول التلميذ.

$$X \backsim N(\mu, 5)$$

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{155 - 160}{\frac{5}{\sqrt{64}}} = -8$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \Longrightarrow -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1.96$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفضها ونقبل الفرضية البديلة H_1.

2.1.3 تباين المجتمع مجهول

من الناحية العملية غالبا ما يكون تباين مجتمع الدراسة مجهولا فيستبدل بتقديره غير المتحيز S^2، ويمكن التمييز بين حالتين :

- **الحالة الأولى:** إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الاحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

أو $H_1: \mu > \mu_0$

أو $H_1: \mu < \mu_0$

- **الحالة الثانية:** إذا كان حجم العينة $n < 30$:

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \backsim t_{n-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

أو $H_1: \mu > \mu_0$

أو $H_1: \mu < \mu_0$

مثال:

إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو 15 وحدة نقدية في العام الماضي تم أخذ عينة من 7 مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم في العام الحالي فوجد أنه 17 وحدة نقدية بانحراف معياري 2 وحدة نقدية. هل توافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام عند مستوى المعنوية 0.05؟

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل ربح السهم.

$$X \backsim N(\mu, \sigma)$$

نريد إجراء اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0: \mu = 15$$
$$H_1: \mu > 15$$

لدينا σ مجهول و $n < 30$ ومنه احصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \backsim t_{n-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{17 - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 2.65$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow T_{1-\alpha,n-1} = T_{0.95,6} = 1.943$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نقبل الفرضية البديلة H_1 وأوافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام عند مستوى المعنوية 0.05.

ملاحظة:

في حالة عدم معرفة توزيع المجتمع نسحب عينة كبيرة بقدر كاف لتطبيق نظرية النهاية المركزية ونستخدم التوزيع الطبيعي.