المحور السابع: نماذج النقل Transportation Models

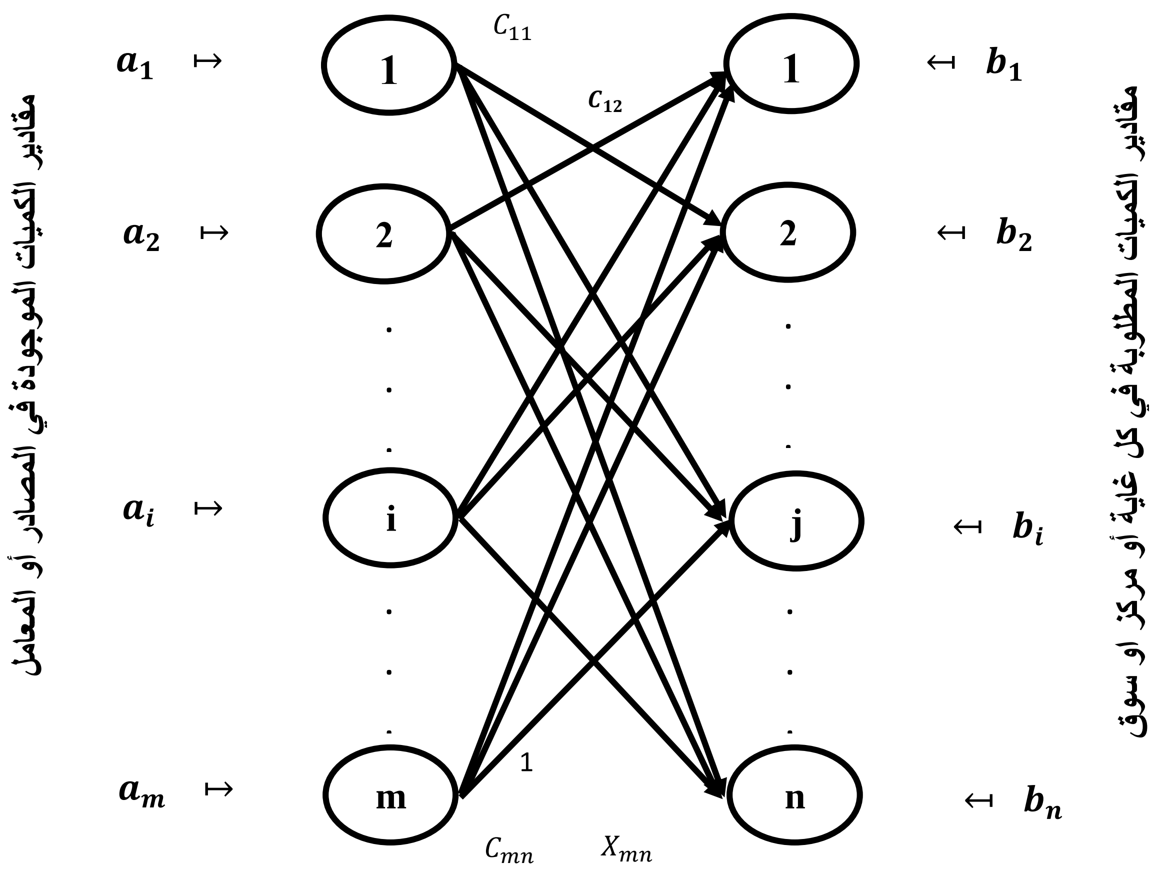
5-1 مقدمة:

بدأت المعالجة العلمية لنماذج النقل منذ فترة طويلة وذلك لطبيعتها الخاصة – من مسائل البرمجة الخطية العامة. بدأت أول دراسة لها بواسطة ف–هينشكوك عام 1941 ثم تلتها أخرى بواسطة ت – كويمانز عام 1947، وتعتبرا من الدراسات الهامة في مجال مسألة النقل، ولدينا العديد من الطرق التي نستخدمها لحل مسالة النقل. وقد يطبق على مسالة النقل جميع الافتراضات الخاصة بالبرمجة الخطية من حيث توافر الخطية في كل من دالة الهدف والقيود، ويمكن تلخيص مسألة النقل الكلاسيكية على النحو الآتي:

لدينا مجموعة من المصادر (Sources) ومن الممكن أن تكون مَعامل أو موانئ مثلاً، يوجد فيها كميات معينة من البضائع والمواد المراد توزيعها على مناطق الحاجة أو الأسواق، كما يوجد لدينا في الجهة الأخرى مجموعة من المراكز أو الغايات Destinations ومثلا قد تكون أسواق أو مناطق طلب على الحاجة المتوفرة في المصادر، والتي من الأرجح أن توزع عليها هذه الكميات أو المواد، ويستوعب كل مركز من هذه المراكز كمية معينة يجب استيفائها والمطلوب نقل الكميات الموجودة والمتاحة في المصادر (Sources) لاستيفاء كل ما تستوعبه الغايات (كلا على انفراد) Destinations، وذلك بتحقق أقل كلفة ممكنة.

لنفرض أن لدينا (m) من المصادر (المعامل) و (n) من الغايات (الأسواق) وكما في المخطط الآتي:

الغايات (الأسواق، المخازن) **المصادر (المعامل)**



ومن المخطط أعلاه يتضح لنا:

m: من المصادر والتي هي مناطق الإنتاج (المعامل).

n: من الغايات والتي هي مناطق التوزيع (الأسواق).

وفي كل مصـــدر أو معمل موجود $a_m, \ldots, a_3, a_2, a_1$ من الكميات المعروضـــة في مناطق الإنتاج وفي كل من الغايات يوجد $b_n, \ldots, b_3, b_2, b_1$ ، كميات مطلوبة في الأسواق.

C_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج من منطقة الإنتاج (i) إلى السوق (j)، ونهدف إلى إيجاد جدول النقل الأمثل لنقل المنتج من مناطق الإنتاج إلى كل الأسواق مع تحقيق أقل كلفة ممكنة.

X_{ij}: الكمية التي ســـتنقل من منطقة الإنتاج المصــــادر (Sources).(i) إلى الأســـواق (j) (الغايات Destination) ويكون $i = 1,2,\ldots,m$. ،$j = 1,2,\ldots,n$ كما أن الذي يجب ملاحظته هو أن عدد متغيرات مشكلة النقل هو (nm) من المتغيرات.

ويمكن تمثيل أي مشكلة نقل كما في الجدول الآتي:

جدول رقم (2): الغايات (المراكز) الأسواق

	D_1	D_2	…	D_j	…	D_n	**الكميات المعروضة Supply**
S_1	$\boxed{C_{11}}$ X_{11}	$\boxed{C_{12}}$ X_{12}	….	$\boxed{C_{1j}}$ X_{1j}	…..	$\boxed{C_{1n}}$ X_{1n}	a_1
S_2	$\boxed{C_{21}}$ X_{21}	$\boxed{C_{22}}$ X_{22}	….	$\boxed{C_{2j}}$ X_{2j}	…..	$\boxed{C_{2n}}$ X_{2n}	a_2
. .	. .	. .	. .	. .	. . . . . .	. .	. .
S_i	$\boxed{C_{i1}}$ X_{i1}	$\boxed{C_{i2}}$ X_{i2}	. .	$\boxed{C_{ij}}$ X_{ij}		$\boxed{C_{in}}$ X_{in}	a_i
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

S_m	$\boxed{C_{m1}}$ X_{m1}	$\boxed{C_{m2}}$ X_{m2}	. . . .	$\boxed{C_{mj}}$ X_{mj}	. . . .	$\boxed{C_{nm}}$ X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة Demand	b_1	b_2	. . . .	b_j	. . . .	b_n	Q Q

ويمكن صياغة مشكلة النقل باستخدام صيغة البرمجة الخطية.

$$Min\ \ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$S.T.$$

1. قيد لضمان أن الكمية المطلوبة لن تزيد عن الكمية المعروضة في المصدر i: $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$

2.قيد لضمان أن الكمية المنقولة تحقق أقل طلب ممكن من المورد j: $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \geq b_j$

$$X_{ij} \geq 0\ \ for\ all\ i,j\ \dots\dots.(13)$$

وإذا كانت الكمية المعروضة تفي بأقل احتياجات ممكنة للأسواق فمعنى ذلك أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i\ \ \dots\dots\dots.(14)$$

ووفقا لهذه الفرضية يصبح النموذج في هذه الحالة على الشكل القياسي standard form ويدعى هذا النموذج بمشكلة النقل المتوازنة (balanced transportation) وهي أن كل القيود تصبح معادلات.

$$Min\ \ \ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$S.T.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = a_i\ \dots\dots\dots.(15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

$$X_{ij} \geq 0$$

ولابد من حل مشكلة النقل باستخدام البرمجة الخطية أن تكون القيود الهيكلية على شكل متساويات.

25 حل مشاكل النقل Solution of Transportation problem:

لا يمكن استخدام طريقة السمبلكس (Simplex method) في حل مشاكل النقل وذلك للتكوين الخاص لمصفوفة النقل حيث تكون معاملات المتغيرات إما واحد أو صفر. ولتسهيل عملية اختبار متغير غير أساسي (كمتغير) (داخل) أو (استبعاد متغير أساسي)، ولهذا ممكن استخدام طرق أخرى لحل مشكلات النقل يكون أفضل ولذلك يتطلب الأمر جعل القيود على شكل متساويات (كما مر ذكره في النموذج العام)، ولذلك سوف يكون الحل على مرحلتين وكما يأتي:

5−2−1. أولاً: إيجاد حل أساسي مبدئي ممكن

تحتوي مشكلة النقل على $(\mathrm{n}+\mathrm{m})$ من القيود الهيكلية و (nm) من المتغيرات، وفي طريقة السمبلكس كان عدد المتغيرات الأساسية مساويا لعدد القيود الهيكلية. أما في مشكلة النقل فإن عدد المتغيرات الأساسية يكون $((n+m-1)$ حيث أن المشكلة تحتوي على هذا العدد من المعادلات وبالإمكان إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن بالاستعانة بإحدى الطرق الآتية:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي North − west corner

ب. طريقة الأقل كلفة Least cost .

ج. طريقة الجزاء (فوجل) (Penality method) Vogl's method

(Vogl's Approximation method) (VAM)

وفيما يلي توضيح لكل طريقة من هذه الطرق ومميزاتها:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي North - west corner method:

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق على الإطلاق، إذ لا يستخدم فيها أي منطق علمي لتوزيع الكميات المتوفرة في المصادر (المعامل) Sources لتلبية احتياجات الغايات Destination، إذ تبدأ عملية إيجاد الحل الأساسي الأولي من الزاوية الشمالية الغربية ولذلك سميت هذه الطريقة بهذا الاسم، ويتلخص عمل الطريقة فيما يأتي:

ابتداءً نبدأ نقارن الكمية المطلوبة (عند المراكز أو الغايات أو الأسواق) بالكمية المتاحة عند المصادر (مراكز الإنتاج)، في أول خانة أو مربع من الركن الشمالي الغربي من الجدول رقم (2) في نماذج النقل − أي نقارن الكمية المطلوبة عند D_1 − بالكمية المتاحة عند S_1 − ونضع في هذه الحالة أقل الكميتين، ثم ننتقل إلى الخلية الثانية على نفس الصف وهي الخلية $\mathrm{S}_1\mathrm{D}_2$ − والكمية المتاحة لدينا هي الكمية المتبقية بعد وضع الكمية

في الخلية الأولى – S_1D_1 – وأيضـــا نقارن هذه الكمية المتبقية بالكمية المطلوبة عند – D_2 – ونختار أقل كمية، وبذلك نكون قد استهلكنا أو نقلنا كل الكميات المتاحة عند المصدر – S_1– لذلك ننتقل إلى الصف الثاني على نفس العمود – D_2 – أي عند الخلية S_2D_2 ونقارن أيضـا الكمية المتبقية لاسـتيفاء متطلبات D_2 بالكمية المتـاحـة عنـد S_2 ونختـار أقـل كميـة ونكرر هـذا العمـل حتى نفي بكـل الاحتيـاجـات عنـد الغـايـات D_j $(j = 1,2, \dots n)$ وبذلك ننقل كل الكميات المتاحة عند المصـادر S_i $(i = 1,2, \dots m)$. هذا الحل يسمى الحل الأساسي الابتدائي ويكون حلاً أساسيًا يمكن تحسينه مباشرة إذا توفر الشرط الآتي:

$$\text{مجموع الخلايا المشغولة بالكميات} = m + n - 1$$

m: عدد المصادر

n: عدد الغايات

مثال (52):

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$\boxed{10}$ X_{11}	$\boxed{0}$ X_{12}	$\boxed{20}$ X_{13}	$\boxed{11}$ X_{14}	15
S_2	$\boxed{12}$ X_{21}	$\boxed{7}$ X_{22}	$\boxed{9}$ X_{23}	$\boxed{20}$ X_{24}	25
S_3	$\boxed{0}$ X_{31}	$\boxed{14}$ X_{32}	$\boxed{16}$ X_{33}	$\boxed{18}$ X_{34}	5
	5	15	15	10	45 / 45

قبل البدء بحل المثال أعلاه يجب التأكد من أن مشكلة النقل متوازنة، أي أن:

مجموع ما تحتوية المصادر = مجموع احتياجات الغايات = 45

$\boxed{10}$ $X_{11} = 5$	$\boxed{0}$ $X_{12} = 10$	$\boxed{20}$ $X_{13} = 0$	$\boxed{11}$ $X_{14} = 0$	15

$\boxed{12}$ $X_{21}=0$	$\boxed{7}$ $X_{22}=5$	$\boxed{9}$ $X_{23}=15$	$\boxed{20}$ $X_{24}=5$	25
$\boxed{0}$ $X_{31}=0$	$\boxed{14}$ $X_{32}=0$	$\boxed{16}$ $X_{33}=0$	$\boxed{18}$ $X_{34}=5$	5
5	15	15	10	45 / 45

المتغيرات الأساسية: $X_{11}=5,\ \ X_{12}=10,\ X_{22}=5,\ X_{23}=15,\ X_{24}=5,\ X_{34}=5$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{31}=X_{32}=X_{33}=0$

وتكون الكلفة الكلية للنقل كما يلي:

$$Min\quad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}X_{ij}$$

$$Z=5*10+10*0+5*7+15*9+5*20+5*18=410$$

وتكون عدد الخلايا المشغولة $m+n-1=6$

مثال 53: استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$\boxed{10}$ $X_{11}=5$	$\boxed{0}$ $X_{12}=5$	$\boxed{20}$ $X_{13}=0$	$\boxed{11}$ $X_{14}=0$	10
S_2	$\boxed{12}$ $X_{21}=0$	$\boxed{7}$ $X_{22}=5$	$\boxed{9}$ $X_{23}=0$	$\boxed{20}$ $X_{24}=0$	5
S_3	$\boxed{0}$ $X_{31}=0$	$\boxed{14}$ $X_{32}=0$	$\boxed{16}$ $X_{33}=8$	$\boxed{18}$ $X_{34}=7$	15
	5	10	8	7	30 / 30

المتغيرات الأساسية: $X_{11}=5,\ \ X_{12}=5,\ X_{22}=5,\ X_{23}=0,\ X_{33}=8,\ X_{34}=7$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{24} = X_{31} = X_{32} = 0$

لا يوجد مانع أن يكون $X_{32} = 0$ بدلا من $X_{23} = 0$ (ضـــمن الحل ووفقا لتحقيق المســـار في هذه الطريقة)

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 5 * 10 + 5 * 0 + 5 * 7 + 0 * 9 + 8 * 16 + 7 * 18 = 339$$

وتكون عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 6$

مثال (54): اســتخدم طريقة الركن الشــمالي الغربي لإيجاد الحل الأســاســي لمشــكلة النقل المبينة في المتغيرات الأساسية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11} = 75$	27 $X_{12} = 25$	28 $X_{13} = 0$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$	100
S_2	29 $X_{21} = 0$	32 $X_{22} = 35$	32 $X_{13} = 70$	27 $X_{24} = 20$	28 $X_{25} = 0$	125
S_3	34 $X_{31} = 0$	27 $X_{32} = 0$	37 $X_{33} = 0$	30 $X_{34} = 60$	30 $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

المتغيرات الأساسية:

$$X_{11} = 75, \quad X_{12} = 25, \quad X_{22} = 35, \quad X_{23} = 70, \quad X_{24} = 20, \quad X_{34} = 60, X_{35} = 90$$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13} = X_{14} = X_{15} = X_{25} = X_{31} = X_{33} = 0$

ولكن الكلفة الكلية لمشكلة النقل هي:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 30 * 90 + 30 * 60 + 20 * 27 + 32 * 70 + 32 * 35 + 25 * 27 + 75 * 37 = 11850$$

ويجب أن يتحقق الشرط الآتي، وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يساوي: $m + n - 1 = 7$

لذلك فإن هذه المشكلة وما سبقها هي مشاكل من النوع القابلة للحل الأمثل بدون أية إجراءات إضافية ويطلق على هذا النوع من مشاكل النقل التي يتحقق فيها الشرط المذكور وهو [عدد الخلايا المملوءة (المشغولة) $m + n - 1$] بأنها مشاكل غير منحلة (non degenerate)، أما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط أعلاه ستكون من نوع المشاكل المنحلة (degenerate)، وهنا لا يمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النوع الأخير من المشاكل إلا بعد إجراءات إضافية أخرى.

مميزات طريقة الركن الشمالي الغربي:

توجد خاصية في طريقة الركن الشمالي الغربي بأنها تنتج دائماً عنها أفضل عدد من الخلايا المشغولة وهي في نفس الوقت تمثل عدد المتغيرات الأساسية (Basic variables). ولبرهنة ما ورد أعلاه نأخذ المثال الآتي:

مثال (55): استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	10 $X_{11} = 150$	35 $X_{12} = 0$	25 $X_{13} = 0$	150
S_2	80 $X_{21} = 0$	5 $X_{22} = 50$	20 $X_{23} = 50$	100
	150	50	50	250 250

المتغيرات الأساسية: $X_{11} = 150,\ X_{12} = 0,\ X_{22} = 50,\ X_{23} = 50$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13} = X_{21} = 0,$

أما التكلفة الكلية فتكون:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 150 * 10 + 0 * 35 + 50 * 5 + 50 * 20 = 2750$$

المثال المار الذكر الأخير من خلال الحل بطريقة الركن الشمالي حصلنا على أقل كلفة ممكنة وهي التي نحصـــــل عليها من خلال الحل الأمثل فيما لو طبقت طريقة من طرق التحقق من الحل الأمثل (بيان ذلك فيما بعد) بالإضـــــافة إلى تحقيق معادلة (عدد الخلايا المملوءة $= m + n - 1$)، بينما لو تم الحل بطريقة فوجيل سـوف يعطي الكلفة نفسـها ولكن بثلاث خلايا مشـغولة (أي حل منحل degenerate)، وسـوف يتم معالجة ذلك فيما بعد.

ب. طريقة الأقل كلفة The least cost method:

لا شك في أن طريقة الأقل كلفة هي الطريقة المفضلة على طريقة الركن الشمالي الغربي حيث يتم اختيار وتوزيع الخلايا المشغولة على أساس أقل كلفة، حيث يتم مشاهدة جدول التكاليف وإيجاد أقل الكلف وبعد ذلك يتم تخصـــــيص الكمية المطلوبة في الغاية مقابل المربع أو الخلية الذي يحتوي أقل كلفة، وبعد أن ننتهي من تخصيص الاحتياجات المطلوبة أو انتهاء ما تحويه المصادر، نقوم بملاحظة جدول الكلف مرة أخرى ورصد أقل كلفة أخرى لم يتم اختيارها ويتم توزيع ما يبقى من المصـــــادر من كميات وحســـب احتياجات الغايات بالطريقة نفسها. وسنوضح طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل المبينة في الجدول الآتي:

مثال (56): اســتخدم طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأســاســي لمشــكلة النقل المبينة في الجدول الآتي: (ســنحاول أولا حل الجدول التالي بطريقة الركن الشــمالي الغربي واســتخراج الكلفة الكلية ومقارنتها بالكلفة الكلية لنفس الجدول وبطريقة الأقل كلفة).

أولا: الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي:

	D_1	D_2	
S_1	$\boxed{4}$ $X_{11} = 60$	$\boxed{2}$ $X_{12} = 0$	60
S_2	$\boxed{7}$ $X_{21} = 40$	$\boxed{5}$ $X_{22} = 0$	40
S_3	$\boxed{3}$ $X_{31} = 5$	$\boxed{10}$ $X_{32} = 65$	70

	105	65	170 / 170

متغيرات أساسية: $X_{11} = 60, \quad X_{21} = 40, \quad X_{31} = 5, \quad X_{32} = 65$

متغيرات غير أساسية: $X_{12} = \quad X_{22} = 0$

وتكون التكلفة الكلية كما يلي:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 10 * 65 + 5 * 3 + 40 * 7 + 60 * 4 = 1185$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 4$

ثانيا: الحل بطريقة الأقل كلفة

	D_1	D_2	
S_1	$\boxed{4}$ $X_{11} = 0$	$\boxed{2}$ $X_{12} = 60$	60
S_2	$\boxed{7}$ $X_{21} = 35$	$\boxed{5}$ $X_{22} = 5$	40
S_3	$\boxed{3}$ $X_{31} = 70$	$\boxed{10}$ $X_{32} = 0$	70
	105	65	170 / 170

متغيرات أساسية: $X_{12} = 60, \quad X_{21} = 35, \quad X_{22} = 5, \quad X_{31} = 70$

متغيرات غير أساسية: $X_{11} = \quad X_{32} = 0$

وتكون التكلفة الكلية كما يلي:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 60 * 2 + 5 * 5 + 35 * 7 + 70 * 3 = 600$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 4$

مثال (57): أوجد الحل الأساسي الأولي لجدول النقل باستخدام طريقة أقل كلفة:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11} = 0$	27 $X_{12} = 60$	28 $X_{13} = 40$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$	100
S_2	29 $X_{21} = 0$	32 $X_{22} = 0$	32 $X_{23} = 0$	27 $X_{24} = 80$	28 $X_{25} = 45$	125
S_3	34 $X_{31} = 75$	27 $X_{32} = 0$	37 $X_{33} = 30$	30 $X_{34} = 0$	30 $X_{35} = 45$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

متغيرات أساسية:

$$X_{12} = 60,\ \ X_{13} = 40,\ \ X_{24} = 80,\ \ X_{25} = 45, X_{31} = 75, X_{33} = 30,\ \ X_{35} = 30$$

متغيرات غير أساسية: $X_{11} = X_{14} = X_{15} = X_{22} = X_{32} = X_{21} = X_{23} = X_{34} = 0$

توضيح لطريقة الحل:

يتم تحديد أقل كلفة موجودة ضمن جدول النقل وهي (27) في الخلايا التالية: S_1D_2, S_2D_4, S_3D_2

وهنا سـنختار المربع أو الخلية S_2D_4 لنقل كمية مقدارها (80) وبعدها سوف نختار S_1D_2 لنقل كمية مقدارها (60)، إلى أن ننقل جميع الكميات الموجودة في المصادر لتلبية احتياجات الغايات لجميع خلايا الجدول.

ملاحظة: الذي يؤخذ سلبًا على طريقة الأقل كلفة هي أن هذه الطريقة، تبدأ باختيار أقل كلفة لنقل أعلى الكميات من خلال الخلايا أو المربعات التي تتمتع بأقل التكاليف، مما يضطرنا بالأخير إلى استخدام المربعات التي تحتوي على أعلى التكاليف، وهذا ما حصل لنا في حل المثال السابق (الأخير) في توزيع ما يحتويه المصدر الثالث على احتياجات النهايات الأولى والثالثة والخامسة ذات الكلف المرتفعة نسبيًا.

وتكون الكلفة الكلية:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 60 * 27 + 40 * 28 + 80 * 27 + 45 * 28 + 75 * 24 + 30 * 37 + 45 * 30 = 11170$$

ويكون الخلايا المشغولة يساوي: $m + n - 1 = 7$

مثال (58): استخدم طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأساسي الأولي لجدول النقل الآتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$\boxed{2}$ $X_{11} = 6$	$\boxed{3}$ $X_{12} = 0$	$\boxed{11}$ $X_{13} = 0$	$\boxed{7}$ $X_{14} = 0$	6
S_2	$\boxed{1}$ $X_{21} = 1$	$\boxed{0}$ $X_{22} = 0$	$\boxed{6}$ $X_{23} = 0$	$\boxed{1}$ $X_{24} = 0$	1
S_3	$\boxed{5}$ $X_{31} = 0$	$\boxed{8}$ $X_{32} = 5$	$\boxed{15}$ $X_{33} = 3$	$\boxed{9}$ $X_{34} = 2$	10
	7	5	3	2	17 / 17

متغيرات أساسية: $X_{11} = 6,\ X_{21} = 1,\ X_{32} = 5,\ X_{33} = 3,\ X_{34} = 2$

متغيرات غير أساسية: $X_{12} = X_{13} = X_{14} = X_{22} = X_{23} = X_{24} = X_{31} = 0$

وهنا عدد الخلايا المشغولة $= 5 \neq m + n - 1$

ويكون نوع الحل لجدول النقل أعلاه من النوع المنحل، وسوف يتم تحسين هذا النوع من الحلول فيما بعد وفقا لطريقة معينة.

ج. طريقة فوجيل (الجزاء) Vogel's Approximation method (AM):

Penality method:

يلزمنا في هذا الأسلوب تحديد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وبعد ذلك يجب اختيار الفرق الأكبر من فروق الصفوف والأعمدة، وتبعا لهذا سوف يتم تحديد صف أو عمود والذي يقابل أكبر الفروق بعد هذا يتم اختيار المربع الذي يحتوي على أقل كلفة في الصف أو العمود المختار في الخطوة السابقة، بعد هذا يتم تخصيص أكبر كمية متيسرة لتسديد احتياجات الغاية أو نفاذ موجودات المصدر.

لغرض اتمام الحل بدون أدنى إشكال أو خطأ، يستلزم بنا إلغاء مرحليا الصف أو العمود الذي يتم استيفاء كل احتياجاته أو نفاد كل ما موجود في غاية العمود، ونكرر العمل بالجدول الجديد حتى يتم ملء كافة الخلايا التي تستخدم في نقل ما موجود في المصدر إلى تسديد احتياجات الغايات.

وتعد طريقة فوجيل من أهم طرق تحديد الحل الأساسي المبدئي على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل، ونادرًا ما تكون طريقتي أقل كلفة والشمالي الغربي أفضل من طريقة فوجيل، ويقصد بالأفضلية في هذا المجال هو الوصول إلى الحل بأسرع وقت ممكن وهنا الطريقة تحتاج إلى عمليات حسابية أطول.

ولتوضيح خطوات هذه الطريقة نأخذ المثال الآتي:

مثال (59): أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية مستعينا بطريقة فوجيل:

.1

	D_1	D_2		الفروق للصفوف Penality
S_1	4	2	60	2
S_2	7	5	40	2
S_3	3	10	70	7
	105	65	170 / 170	

الفروق للأعمدة Penality	1	3

.2

	D_1	D_2	
S_1	4	2	60
S_2	7	5	40
S_3	3 70	10	70
	105	65	

$X_{31} = 70$

.3

	D_1	D_2		الفروق للصفوف Penality
S_1	4	2 60	60	2
S_2	7	5	40	2
S_3	3	10	70	
	105	65	170 / 170	

Penality	3	3

$$X_2 = 60$$

.4

	D_1	D_2	
S_2	7 35	2 5	40

$$X_{21} = 35$$

$$X_{22} = 5$$

ومن ثم تتم العودة إلى مشكلة النقل الأساسية لتوزيع كافة الكميات على الخلايا المشكلة الأصلية.

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11} = 0$	2 $X_{12} = 60$	60
S_2	7 $X_{11} = 35$	5 $X_{22} = 5$	40
S_3	3 $X_{31} = 70$	10 $X_{32} = 0$	70
	105	65	170 / 170

وتكون الكلفة الكلية لمشكلة للنقل:

$$Min\ \ Z = 3 * 70 + 35 * 7 + 5 * 5 + 60 * 2 = 60$$

مثال (60): أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل Vogel's :

.1

	D_1	D_2	D_3	D_4		Penality الفروق للصفوف
S_1	20	22 40	17	4	120	13
S_2	24	37	9	7	70	2
S_3	32	37	20	15	50	5
	60	40	30	110	240 / 240	
Penality الفروق للأعمدة	4	15	8	3		

$X_{12} = 40$ ↑

وهنا سوف يحذف العمود الثاني (الغاية رقم 2) مرحليا.

.2

	D_1	D_3	D_4		Penality
S_1	20	17	4 80	80	13
S_2	24	9	7	70	2
S_3	32	20	15	50	5

	60	30	110	200 / 200	
Penality	4	8	3		

$X_{14} = 80$

3. وهنا سوف يتم حذف الصف الأول (المصدر رقم 1) ومرحليا:

	D_1	D_3	D_4		Penality
S_2	$\boxed{24}$	$\boxed{9}$ 30	$\boxed{7}$	70	2
S_3	$\boxed{32}$	$\boxed{20}$	$\boxed{15}$	50	5
	60	30	30	120 / 120	
Penality	11	11	8		

$X_{23} = 30$ ↑

4. وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث (الغاية رقم 3):

	D_1	D_4		Penality
S_2	$\boxed{24}$ 10	$\boxed{7}$ 30	40	17
S_3	$\boxed{32}$ 50	$\boxed{15}$	50	17
	60	30	90 / 90	

Penality	8	8

$$X_{21} = 10,\ \ X_{24} = 30, \qquad X_{31} = 50$$

وهنا سوف يتم العودة إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	20 $X_{11} = 0$	22 $X_{12} = 40$	17 $X_{13} = 0$	4 $X_{14} = 80$	120
S_2	24 $X_{21} = 10$	37 $X_{22} = 0$	9 $X_{23} = 30$	7 $X_{24} = 30$	70
S_3	32 $X_{31} = 50$	37 $X_{32} = 0$	20 $X_{33} = 0$	15 $X_{34} = 0$	50
	60	40	30	110	240 / 240

وتكون الكلفة الكلية للمشكلة كما يلي:

$$Min\ \ Z = 40 * 22 + 80 * 4 + 10 * 24 + 30 * 9 + 30 * 7 + 50 * 32 = 3520$$

وعدد الخلايا المشغولة $= 6 = m + n - 1$

مثال (61): أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	10	7	4	1	4	100	3
S_2	2 200	7	10	6	11	250	4
S_3	8	5	3	2	2	200	1

S_4	11	8	12	16	13	300	3
	200	200	100	100	250	850 / 850	
Penality	6	6	1	1	2		

$X_{21} = 200$ ↑

وهنا سوف تحذف الغاية الأولى D_1 مرحليا:

	D_2	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	7	4	1	4	100	3
S_2	7	10	6	11	50	1
S_3	5	3	2	2	200	1
S_4	8 200	12	16	13	300	4←
	200	100	100	250	650 / 650	
Penality	2	1	1	2		

$X_{42} = 200$

وفي هذه الخطوة سوف يتم حذف الغاية الثانية D_2:

	D_3	D_4	D_5		Penality

					Penality
S_1	4	1	4	100	3
S_2	10	6 50	11	50	4
S_3	3	2	2	200	1
S_4	12	16	13	100	1
	100	100	250	450 / 450	
Penality 2	1	1	2	$X_{24} = 50$	

وهنا سوف يتم حذف المصدر الثاني S_2:

	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	4	1 50	4	100	3
S_3	3	2	2	200	1
S_4	12	16	13	100	1
	100	50	250	400 / 400	
Penality	1	1	2	$X_{14} = 50$	

وهنا سوف يتم حذف الغاية رقم 4، D_4:

	D_3	D_5		Penality
S_1	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	50	0
S_3	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 200	200	1
S_4	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	100	1
	100	250	350 / 350	
Penality	1	2		

$X_{35} = 200$

وهنا سوف يتم حذف المصدر الثالث S_3:

	D_3	D_5		Penality
S_1	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$ 50	50	0
S_4	$\boxed{12}$ 100	$\boxed{13}$	100	1
	100	50	150 / 150	
Penality	8	9		

$X_{14} = 50, \qquad X_{43} = 100$

وبالرجوع إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل وتوزيع الكميات عليه نحصل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	10 $X_{11} = 0$	7 $X_{12} = 0$	4 $X_{13} = 0$	1 $X_{14} = 50$	4 $X_{15} = 50$	100
S_2	2 $X_{21} = 200$	7 $X_{22} = 0$	10 $X_{23} = 0$	6 $X_{24} = 50$	11 $X_{25} = 50$	250
S_3	8 $X_{31} = 0$	5 $X_{32} = 0$	3 $X_{33} = 0$	2 $X_{34} = 0$	2 $X_{35} = 200$	200
S_4	11 $X_{41} = 0$	8 $X_{42} = 200$	12 $X_{43} = 100$	16 $X_{44} = 0$	13 $X_{45} = 0$	300
	200	200	100	100	250	850 / 850

وتكون الكلفة الكلية لمشكلة النقل أعلاه كما يلي:

$$Min\ Z = 50 * 1 + 50 * 4 + 200 * 2 + 50 * 60 + 200 * 72 + 200 * 8 + 100 * 12 = 4150$$

وكما يهمنا لفت عناية الطالب العزيز إلى أن الكلفة الكلية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي وللمثال نفسه بلغت: $Z = 9650$

ويكون عدد الخلايا المملوءة $= 7 \neq m + n - 1$

وكذلك بلغت الكلفة الكلية وباستخدام طريقة الأقل كلفة كانت: $Z = 4300$

وليتحقق طالبنا العزيز من النتائج الواردة أعلاه

5-2-2. ثانيًا: اختبار الحل الأساسي الأولي والوصول به إلى الحل الأمثل لمشاكل النقل

لا نحصـــل من خلال اســـتخدام الطرق الثلاثة وهي: طريقة الركن الشـــمالي الغربي، وطريقة الأقل كلفة، وطريقة فوجيل، إلا على الحل الأساسي الأولي، ويعتمد استخدام طريقة دون أخرى على الطالب ولو أن ترتيب الأفضلية في استخدامها يتناسب طرديًا على ترتيبهم الذي مر بنا.

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية الحل للمشكلة (أي الحصول على الحل الأمثل)، وإنما يجب أن نستخدم أساليب أخرى لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة، هل هو الحل الأمثل، أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه، أم أن هناك حلولا أخرى أمثل منه، وللوصول إلى هكذا حلول، هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل وهما:

1. طريقة المسار المتعرج Stepping - Stone method

2 طريقة التوزيع المعدل Modified distribution method.

1. طريقة المسار المتعرج Stepping - Stone method:

نطلق على المربعات المشغولة في مشكلات النقل بالمتغيرات الأساسية والمربعات غير المشغولة بالمتغيرات غير الأساسية اذ يتم حساب التكاليف غير المباشرة في كل مربع مشغول.

وفقا لآلية العمل في هذه الطريقة، ولمعرفة هل أن المربعات غير المشغولة يمكن الاستفادة منها في النقل بدلا من بعض المربعات المشغولة، فإذا كانت أفضل فإنه يتم نقل المواد عبر المربعات غير المشغولة، ولكي تدخل الحل وضمن المتغيرات الأساسية.

وللتعرف عن كثب على آلية العمل في هذه الطريقة نستخدم المثال الذي تم حله (إيجاد الحل الأساسي المبدئي) بواسطة طريقة الركن الشمالي الغربي وكما يلي:

مثال (62): استخدم طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأساسي الأولي لجدول النقل الآتي:

	D_1	D_2	
S_1	$\boxed{4}$ $X_{11} = 60$	$\boxed{2}$ $X_{12} = 0$	60
S_2	$\boxed{1}$ $X_{21} = 40$	$\boxed{5}$ $X_{22} = 0$	40
S_3	$\boxed{3}$ $X_{31} = 5$	$\boxed{10}$ $X_{32} = 65$	70
	105	65	

من خلال ملاحظة حل التمرين وبطريقة الركن الشـــمالي الغربي يظهر أن عدد المربعات المشـــغولة في الجدول هي أربعة مربعات أي أن الشـرط (عدد الخلايا المشـغولة $= 4 = m + n - 1$) متحقق، وعند تحقيق هذا الشـرط هو التأكيد التام على أنه ممكن تحسـين الحل الحالي والوصـول به إلى الحل الأمثل وهذه المربعات المشغولة هي: $X_{11} = 60\ , X_{21} = 40,\ X_{31} = 5,\ X_{32} = 65$

إن هذه المتغيرات ولهذه المرحلة تسمى بالمتغيرات الأسـاسـية، أما المتغيرات X_{12} و X_{22} فهما عبارة عن متغيرين غير أساسيين.

المرحلة القادمة هي اختبار الاسـتفادة من المربعين غير المشـغولين، لكي نلاحظ ذلك نفترض نقل وحدة واحدة عبر المربع S_2D_2 ، تكلف (5) وحدات، فإذا تم نقل وحدة واحدة عبر المربع المذكور ولغرض الموازنة فإن كمية ما موجود في المصـادر (أي زيادة الكمية الموجودة في المصـدر الثاني S_2 وحدة واحدة) ولاسـتحالة ذلك، لذلك سـوف يتم طرح وحدة واحدة من المربع S_2D_1 (من الكمية المنقولة خلاله)، ليبقى (39) وحدة، وأن تكلفة نقل وحدة واحدة عبر هذا المربع تسـاوي (7) وحدات والممكن أن احتياجات الغاية رقم (1) يجب أن تقل بمقدار وحدة واحدة (لغرض الموازنة وحسـب الكميات في التمرين أو المشـكلة)، لذلك يجب نقل وحدة من خلال المربع S_1D_1، ولكي لا يختل التوازن بين الاحتياجات وما متوفر في المصادر من كميات وهذا العمل يؤدي إلى طرح وحدة واحدة من الوحدات المنقولة عبر المربع المقابل والذي يكون المربع S_3D_2 ليصبح (64) وحدة، ومن خلال ذلك نجد الكلفة الكلية للنقل ستتغير وفقا للمسار الجديد، أي أن مقدار التغيير في الكلفة يحسب عن طريق المربعات التي تم تغيير الكميات المنقولة من خلالها.

فإذا أضـيفت وحدات جديدة فإن الكلفة في ذلك المربع يكون بالموجب وإذا طرحت وحدات جديدة في ذلك المربع فإن الكلفة تكون بالسالب كما مبين وكما يأتي:

$$S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2$$

ووفقا لذلك يكون ناتج التغير في الكلفة كما يلي: $5 - 7 + 3 - 10 = -9$

وبنفس الطريقة نلاحظ أنه إذا تم نقل وحدة واحدة عبر المربع S_1D_2 فإن نتيجة هذا النقل عبر هذا المربع تؤدي إلى تغيير في عدد الوحدات المنقولة عبر المربعات S_1D_1 و S_3D_1 و S_3D_3، وتبعاً لذلك سـيكون التغيير في الكلفة الكلية كما يلي: $S_1D_2 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_3$

ووفقا لذلك يكون مسار تغيير الكلف والخاصة بالمربعات المذكورة ونتيجة التغيير كما يأتي:

$$2 - 4 + 3 - 10 = -9$$

فإذا كانت نتيجة التغيير في الكلفة الكلية موجبة أو تساوي صفر، فالاستنتاج بأن الحل الموجود هو الحل الأمثل، وبما أن المربع كان غير مشغول (أي فارغ) فالحل الأمثل له يجب أن يبقى فارغًا.

أما إذا كانت نتيجة التغيير في الكلفة الكلية قيمًا ســــالبة فالاســــتنتاج يعني أن الحل لهذا المربع غير المشـــــغول غير أمثل أي يجب ملؤه (أي نقل كميات عبر هذا المربع). وهذا يعني أن النقل عبر هذه المربعات غير المشغولة يكون أفضل (أي يحقق أقل كلفة، ولذلك سوف نختار المربع غير المشغول، الذي سيحدث تغيير (انخفاض) في الكلفة نتيجة للنقل عبره. سنبدأ بالمربع غير المشغول ابتداءً بالذي يتمتع من خلال الاختبار بأقل كمية لكلفة نتيجة التغيير.

في المثال الســـابق يوجد مربعان غير مشـــغولين وإن مقدار التغيير في المربعين (9−) ومتســـاويين، وهذا يعني أن نقل وحدة واحدة عبر هذا المربع ســـيجعل الكلفة الكلية تقل بمقدار حاصــــل ضــــرب، مقدار التغيير المستخرج (النتيجة النهائية) نتيجة نقل وحدة واحدة في الكمية التي ستنقل عبر هذا المربع غير المشغول.

وهنا سوف يتم اختيار المربع S_1D_2, ليكون المربع ذو المتغير الأساسي. نبدأ من المربع المرشح للاختبار وهنا S_1D_2 وبخط مســتقيم باتجاه المربع الأفقي المجاور أو العمودي المجاور وبشــرط أن يكون المربع المجاور مربعا مشغولا، ولنأخذ المسار باتجاه المربع المجاور S_1D_1 بحيث يغير عند هذا المربع المسار عموديا إلى أول مربع مشــــغول يكون مســــارًا مغلقا إذا تم النقل من خلاله. وهنا لا يمكن المرور بالمربع S_2D_1 لأنه لا يمكن المرور أفقيا خلال هذا المربع إلى مربع مشـغول آخر سيكون المسـار من المربع S_1D_1 الى المربع S_3D_1 ومن ثم الى S_3D_2 والرجوع إلى المربع المرشـــح S_1D_2 نفســـه أي تكوين مســـار مغلق يبدأ وينتهي بالمربع S_1D_2 فالمسار عند تكوينه يجب أن يكون:

من المربع الذي يخضــع للاختبار ← إلى مربع مشــغول مع تغيير الاتجاه (عموديا أو أفقيا) ← ثم إلى مربع آخر مشغول مع تغيير الاتجاه ← ثم إلى مربع مشـغول (مع تغيير الاتجاه) ← ثم الى مربع مشـغول مع تغيير الاتجاه.... ← والانتهاء من المسار بالمربع الذي بدأ به (المربع الخاضع للاختبار).

كيفية تحديد الكمية التي ستنقل من خلال المربع الخاضع للاختبار:

نحتاج الآن إلى تحديد الكمية التي ســيتم نقلها من خلال المربع الخاضــــع للاختبار (المرشــح للنقل من خلاله) ولاســـيما بعد أن ظهرت نتيجة تغيير الكلفة الكلية ســـالبة أي الحل غير أمثل (يجب أن يملأ)، ويجب تحديد الكمية المنقولة خلال المربع الذي يتمتع بالحل غير الأمثل بحيث لا تؤثر على توازن ما متوفر في المصادر من كميات واحتياجات الغايات ويكون كما يأتي:

نفرض الكمية التي سيتم نقلها خلال ذلك المربع المرشح للملء هي (k) وحدة، لكي تبقى المشكلة متوازنة بحيث نطرح k من الوحدات من عدد الوحدات المنقولة عبر المربع S_1D_1 (السـير على نفس اتجاه المسـار المغلق الذي اسـتخدم للاختبار)، وكذلك اضـافة k من الوحدات إلى المربع S_3D_2، وكذلك طرح k وحدة من المربع S_3D_2، ثم نختار أكبر قيمة إلى k بحيث تبقى المشـكلة متوازنة. وهنا يتم تحديد أكبر قيمة إلى k من خلال قيم المربعات في زوايا المسار المغلق والتي تم طرح k منها.

	D_1	D_2	
S_1	$60-k$	k	60
S_2			40
S_3	$5+k$	$65-k$	70
	105	65	

إن قيم المربعات في زوايا المسار المغلق التي طرح الـ K منها فيها القيمتان $(65{,}60)$ فإن قيمة الـ k هي ما بين هاتين القيمتين أي $\left[k = \begin{cases}60\\65\end{cases}\right]$ ونختار أقل هاتين القيمتين ليمثل قيمة k أي هناك الـ $k = 60$.
والآن نبدأ بالتعويض عن قيمة $k = 60$ في المسـار المغلق المرسـوم أعلاه في جدول مشـكلة النقل وتكون الكميات المنقولة عبر المربعات في مشكلة النقل كما يلي:

	D_1	D_2	
S_1	$X_{11} = 0$	$X_{12} = 60$	60
S_2	$X_{21} = 40$	$X_{22} = 0$	40
S_3	$X_{31} = 65$	$X_{32} = 5$	70
	105	65	

نلاحظ بوضـوح أن مشـكلة النقل سـتبقى متوازنة أي مجموع ما موجود في المصـادر مسـاوٍ لمجموع احتياجات الغايات وتكون الكلفة الكلية نتيجة لنقل الكميات من المصادر إلى غاياتها وفقا للكميات الجديدة هي:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 5 * 10 + 65 * 3 + 40 * 7 + 60 * 2 = 645$$

وبتطبيق الطريقة نفســها إذا كان المربع الذي في النية أشــغاله أو في النية اســتخدامه للنقل وهو المربع S_2D_2 فيكون المسار هو: $S_2D_2 \to S_2D_1 \to S_3D_1 \to S_3D_2 \to S_2D_2$

ويمكن تحديد قيمة الـ k التي ستضاف إلى المربع المرشح من بين القيمتين: 5 و 40

وبما أن الاختيار يتم بين أقل القيمتين فسيتم اختيار القيمة $k = 5$.

	D_1	D_2	
S_1		60	60
S_2	$40 - k$	k	40
S_3	$65 + k$	$5 - k$	70
	105	65	

وبذلك تكون الكميات النهائية في جدول النقل كما يلي:

	D_1	D_2	
S_1	$\boxed{4}$ $X_{11} = 0$	$\boxed{2}$ $X_{12} = 60$	60
S_2	$\boxed{7}$ $X_{21} = 30$	$\boxed{5}$ $X_{22} = 5$	40
S_3	$\boxed{3}$ $X_{31} = 70$	$\boxed{10}$ $X_{32} = 0$	70
	105	65	

وبذلك تكون الكلفة الكلية نتيجة التغيير:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 60 * 2 + 35 * 7 + 5 * 5 + 70 * 3 = 600$$

ولذلك فإن مجموع التكاليف الكلية ستقل عن المرحلة السابقة وبمقدار $45 = 5 * 9$ أي بمقدار 45.

مثال (63): اختبر الحل الأساسي الابتدائي لمشكلة النقل الآتية مستخدما طريقة المسار المتعرج stepping stone، وأوجد بعد ذلك الحل الأمثل لمشكلة النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11} = 0$	27 $X_{12} = 30$	28 $X_{13} = 70$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$	100
S_2	$45 + k$ 29 $X_{21} =$	32 $X_{22} = 0$	32 $X_{13} = 0$	$-k$ 27 $X_{24} = 20$	28 $X_{35} = 0$	125
S_3	34 $X_{31} = 30 - k$	27 $X_{32} = 30$	37 $X_{33} = 0$	$+k$ 30 $X_{34} = 0$	30 $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375 375

وبذلك تكون الكلفة الكلية للحل الأساسي:

$$Min \;\; Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Min \;\; Z = 30 * 27 + 70 * 28 + 45 * 29 + 80 * 27 + 30 * 34 + 30 * 27 + 90 * 30 = 10765$$

وهنا يبدأ الحل باختبار الخلايا الفارغة من خلال وضع المسارات المتعرجة وكما يلي:

1. نبدأ باختبار الخلية S_1D_2 الفارغة، ويكون المسار المتعرج لها كما يلي:

$$S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_3D_1$$

لذلك يكون التغيير في الكلفة كما يلي: $37 - 27 + 27 - 34 = 3$

وبما أن نتيجة التغيير في الكلفة موجبة إذًا الحل لهذه الخلية أمثل، ويعني أنها يجب أن تبقى فارغة.

2. نختبر الخلية S_1D_4 (فارغة)، ويكون المسار المتعرج لاختبارها كما يلي:

$$S_1D_4 \to S_2D_4 \to S_2D_1 \to S_3D_1 \to S_3D_2 \to S_1D_2 \to$$

ويكون التغيير في الكلفة لهذه الخلية كما يلي: $2 = 27 - 27 + 34 - 29 + 27 - 34$

إذًا الحل الأمثل لهذه الخلية.

(إشارة الكلف تكون بالتناوب ابتداءً بالموجب وبعدها بالسالب ثم بالموجب وهكذا.......)

3. وبالطريقة نفسها يتم اختيار الخلية S_1D_5 ويكون المسار لها:

$$S_1D_5 \to S_3D_5 \to S_3D_2 \to S_1D_2$$

يكون نتيجة التغيير للكلفة كما يلي: $0 = 27 - 27 + 30 - 30$

إذًا الحل أمثل لهذه الخلية.

4. اختبار S_1D_5 ويكون المسار لها: $S_2D_5 \to S_3D_5 \to S_3D_1 \to S_2D_1$

$$28 - 30 + 34 - 29 = 3$$

إذًا الحل أمثل لها. وأيضًا الحل أمثل لهذه الخلية.

5.وبالمثل بالنسبة للخلية S_3D_3 ويكون المسار المتعرج لها: $S_3D_3 \to S_3D_2 \to S_1D_2 \to S_1D_3$

وتكون نتيجة التغيير في الكلفة لها كما يلي: $9 = 28 - 27 + 27 - 37$

إذًا الحل أمثل لها.

6. وبنفس الطريقة للخلية S_3D_4 ويكون المسار لها كما يلي:$S_3D_4 \to S_3D_1 \to S_2D_1 \to S_2D_4$

وتكون نتيجة التغيير بالكلفة كما يلي: $-2 = 27 - 29 + 34 - 30$

وهنا تظهر النتيجة الســالبة بأن الحل غير أمثل لهذه الخلية ومعنى هذا أنه يجب أن تشــغل بكمية معينة (وحسب قاعدة الـ k).

7. ويتم الاختبار للخلية S_2D_2 ويكون المسار لها: $S_2D_2 \to S_2D_1 \to S_3D_1 \to S_3D_2$

وتكون نتيجة التغيير في الكلفة: $10 = 27 - 34 + 29 - 32$

إذًا الحل أمثل لهذه الخلية.

8. وأخيرا نختبر الخلية S_2D_3 ويكون المسار لها:

$$S_2D_3 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_3$$

وتكون نتيجة التغيير في الكلفة غير المباشرة: $9 = 27 + 27 - 34 + 29 - 32$

ويكون الحل أمثل بالنسبة لهذه الخلية ومعنى هذا يجب أن تبقى فارغة.

وبالعودة للفقرة (6) من الاختبارات وبما أن الحل غير أمثل للخلية (S_3D_4)، فيجب ملء هذه الخلية وفقا لمسارها بعد إضافة k إلى الخلية الفارغة ومن ثم طرح وإضافة k وبالتعاقب في كل زاوية من زوايا المسار، وسوف يكون هنا k مقدارها ($k = 30$).

وهنا يتم اضافة $k = 30$ إلى الخلية ثم طرح وإضافة $k = 30$ إلى زوايا المسار وبالتعاقب (الذي حدد بالفقرة 6)، ولذلك تكون الكميات وتوزيعها في جدول النقل الجديد كما يلي:

[وهنا تم تحديد قيمة k بما يلي، نرصد كميات الزوايا التي طرحت منها K وهنا كانت 80 و 30، والطريقة هي أن نأخذ أقل الكميات وللتبسيط بعد أكثر نأخذ $\left[k = \begin{Bmatrix} 80 \\ 30 \end{Bmatrix}\right]$ ومن ثم نختار أقلها وهي الكمية $k = 30$]

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	$\boxed{37}$ $X_{11} = 0$	$\boxed{27}$ $X_{12} = 30$	$\boxed{28}$ $X_{13} = 70$	$\boxed{34}$ $X_{14} = 0$	$\boxed{30}$ $X_{15} = 0$	100
S_2	$45 + k$ $\boxed{37}$ $X_{21} =$	$\boxed{32}$ $X_{22} = 0$	$\boxed{32}$ $X_{23} = 0$	$-k$ $\boxed{27}$ $X_{24} = 20$	$\boxed{28}$ $X_{25} = 0$	125
S_3	$\boxed{34}$ $X_{31} = 0$	$\boxed{27}$ $X_{32} = 50$	$\boxed{37}$ $X_{33} = 0$	$+k$ $\boxed{30}$ $X_{34} = 30$	$\boxed{30}$ $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

والآن وفقا لتوزيع الكميات الجديد سوف تنخفض الكلفة الكلية للنقل وبمقدار: $2 * 30 = 60$

2= مقدار نتيجة التغير في الفقرة (6)

30 : هي كلفة الخلية التي أشغلت حديثا.

وتكون الكلفة النهائية تساوي: $10765 - 60 = 10705$

والحل السابق هو الحل الأمثل، إذ لا توجد مربعات غير مشغولة فيها نتيجة الكلفة غير المباشرة بالسالب.

2. طريقة التوزيع المعدل Modified distribution:

تعتمد هذه الطريقة على أســاس افتراض المتغيرات الثنائية لكلفة النقل، إذ تســتخدم هذه المتغيرات لتقييم المربعات غير المشغولة كما سنلاحظ ذلك، فإن هذه الطريقة أسهل من الطريقة السابقة وأكفأ منها ولها تطبيقات واسعة باستخدام الحاسبات الالكترونية خاصة.

كانت الخطوات في الطريقة الســابقة منصــبة على تحديد مســار مغلق لا يؤثر على توازن الكميات في مشــكلة النقل ولكل مربع (خلية) غير مشــغول، على أنه الطريقة الحالية فإنها تســاعدنا على تحديد المربع غير المشــغول (الذي يؤدي إلى الوصــول إلى الحل الأمثل عند إشــغاله أو اســتخدامه لنقل الكميات) وبوقت أســرع وسنورد مثالاً لشرح آلية العمل لهذه الطريقة وتوضيح كافة التفصيلات الخاصة بهذه الطريقة.

مثال (64): جد التوزيع الأمثل لجدول النقل التالي مع العلم أن الحل الأســاســي المبدئي الممكن تم الحصــول عليه بطريقة الركن الشمالي الغربي:

	D_1	D_2	
S_1	$\boxed{4}$ $X_{11} = 60$	$\boxed{2}$ $X_{12} = 0$	60
S_2	$\boxed{7}$ $X_{21} = 40$	$\boxed{5}$ $X_{22} = 0$	40
S_3	$\boxed{3}$ $X_{31} = 5$	$\boxed{10}$ $X_{32} = 65$	70
	105	65	

الآن نبدأ بتحديد المتغيرات غير الأســاســية (مربعات غير مشــغولة) أي أن الكميات المنقولة عبر هذه المربعات تساوي صفرا: $X_{22} = 0\ ,\ X_{12} = 0$

أما المتغيرات الأساسية (مربعات مشغولة) بحسب الحل الأساسي المبدئي الممكن:

$$X_{11} = 60\ , X_{21} = 40, \quad X_{31} = 5, \quad X_{32} = 65$$

نفترض أن يكون جدول التكاليف بتسمية C_{ij} أي أن مصـفوفة التكاليف المباشـرة تكون C_{ij} وتكتب كما يلي:

	V_1	V_2
U_1	4	2
U_2	7	5
U_3	3	10

$= C_{ij}$

حيث أن قيم جدول C_{ij} ممكن أن تكون موجبة أو صفرا أو سالبة.

نبدأ الآن بمجموعة من المتغيرات الثنـائيـة إذ نعرف U_i لتمثل الصـــفوف أو (الصـــف i) حيث أن $(i = 1,2, \dots, m)$ ، وكذلك نعرف (V_j) تمثل الأعمدة أو (العمود j) حيث $(j = 1,2, \dots, n)$. وكذلك نجعل كلفة كل خلية هي في الحقيقة مجموع مركبتين التي هي كلفة الصـــف وكلفة العمود وهذه حقيقة واقعية، أي أن مجموع كلف التحميل والخاصـة بالصـفوف (المصـادر) وكلفة التفريغ الخاصـة بالأعمدة (الغايات الأسـواق) هي المكونات للكلفة الكلية للنقل (C_{ij}) أي أن:

الكلفة الكلية للنقل = كلفة التحميل (المصادر، معامل) + كلفة التفريغ (غايات أسواق)

وبالرموز تكون: $C_{ij} = U_i + V_j$

فمثلا المربعات المشـغولة للمثال السـابق هي أربعة مربعات لذلك سـنحصـل على (4) معادلات ، وكما مبين ذلك في أدناه:

$$U_1 + V_1 = 4$$
$$U_2 + V_1 = 7$$
$$U_3 + V_1 = 3$$
$$U_3 + V_2 = 10$$

وهذه المعادلات الأربع كونت على أسـاس المربعات المشـغولة (المتغيرات الأسـاسـية) فقط. ولحل هذه المعادلات نفترض ابتداءً $U_1 = 0$ ، ولذلك سوف ستكون قيم بقية المتغيرات كما يأتي:

$$U_1 = 0 \quad , \quad V_1 = 4$$
$$U_2 = 3 \quad , \quad V_2 = 11$$
$$U_s = -1$$

$$U_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 4$$
$$U_2 + 4 = 7 \quad \rightarrow \quad U_2 = 3$$
$$U_3 + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad U_3 = -1$$

$-1 + V_2 = 10 \quad \rightarrow \quad V_2 = 11$

ويكون توزيعها على جدول النقل كما يلي:

	$V_1 = 4$	$V_2 = 11$
$U_1 = 0$	4	2
$U_2 = 3$	7	5
$U_3 = -1$	3	10

وهنا تستخرج التكاليف غير المباشرة $\bar{C}_{ij}$ ولكل المربعات لجدول النقل وبالاستعانة بقيم المتغيرات U_i و V_j وكما يلي:

$$\bar{C}_{ij} = U_i + V_j$$

$$\bar{C}_{11} = U_1 + V_1 = 0 + 4 = 4$$

$$\bar{C}_{12} = U_1 + V_2 = 0 + 11 = 11$$

$$\bar{C}_{22} = U_2 + V_2 = 3 + 11 = 14$$

$$\bar{C}_{21} = U_2 + V_1 = 3 + 4 = 7$$

$$\bar{C}_{31} = U_3 + V_1 = -1 + 4 = 3$$

$$\bar{C}_{32} = U_3 + V_2 = -1 + 11 = 10$$

وهنا يجب ملاحظة قيم $\bar{C}_{ij} = C_{ij}$ في حالة المتغيرات الأساسية (المربعات المشغولة). ونحسب بعد ذلك الفرق بين جدول الكلف أي: $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$

فاذا كانت قيم $\bar{C}_{ij} - C_{ij} \leq 0$ ولجميع قيم i و j فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل، وإذا كانت بعض القيم الموجبة فمعنى هذا أن الحل لهذه الخلايا (المربعات) هو غير أمثل ولذلك نختار أكبر قيمة موجبة، وكما في طريقة السمبلكس في حالة كون دالة الهدف من نوع Minimize اي نختار $Max[(\bar{C}_{ij} - C_{ij}) \geq 0]$

ولتسهيل ما ورد أعلاه نحسب: $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 14 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولملاحظة ناتج الطرح فيوجد هناك مربعان موجبان، لذلك نحتار أحدهما. ويكون أولهما الذي يتمتع بأكبر قيمة موجبة، وبما أن للمربعين كميات موجبة متساوية، فنختار أحدهما بصـورة اعتباطية ولنختبر المربع S_1D_2 ونكرر العمل معه كما سـبق في طريقة المسـار المتعرج stepping stone ، واختبار مسـار مغلق لا يؤثر على التوازن في جدول النقل. لاختبار الكمية التي تشغل المربع S_1D_2 وهي قيمة k.

	D_1	D_2		
S_1	$60-k$	$+k$		60
S_2	40			40
S_3	$5+k$	$65-k$		70
	105	60		

كما في طريقة المسار المتعرج نجد أن قيمة $k=60$ وأن جدول التوزيع الجديد للنقل يكون كما يأتي:

	D_1	D_2	
S_1		60	
S_2	$40-k$	k	
S_3	$65+k$	$5-k$	
	105	65	

ولاختبار المربعS_2D_2 واختيار مسار مغلق لإيجاد قيمة k وسوف تكون $k=5$

ويكون جدول توزيع الكميات في جدول النقل الأمثل كما يأتي:

	D_1	D_2	
S_1	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 60	60

S_2	$\boxed{7}$ 35	$\boxed{5}$ 5	40
S_3	$\boxed{3}$ 70	$\boxed{10}$	70
	105	65	

كما أن الكلفة الكلية :

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij} = 600$$

والآن يجب أن نختبر الحل في الجدول الأخير (الحل الأمثل) وللخلايا المشـغولة (المتغيرات الأسـاسـية) فقط ووفق المعادلة الآتية: $U_i + V_j = C_{ij}$

وتكون النتائج كما يأتي:

$$U_1 + V_2 = 2$$
$$U_2 + V_2 = 5$$
$$U_2 + V_1 = 7$$
$$U_3 + V_1 = 3$$

$$U_1 = 0 \quad , \quad V_1 = 4$$
$$U_2 = 3 \quad , \quad V_2 = 2$$
$$U_3 = -1$$

لذا فإن مصفوفة التكاليف غير المباشرة $\bar{C}_{ij}$ تكون كالآتي، وحسب القيم التي تم الوصول إليها لـU_i و V_j

$\bar{C}_{ij} =$

	$V_1 = 4$	$V_2 = 2 =$
$U_1 = 0$	4	2
$U_2 = 3$	7	5
$U_3 = -1$	3	1

وللتأكد من الاختبار في المرحلة الثانية نستخرج الفرق بين $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$

4	2

4	2

0	0

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9- \end{bmatrix}$$

وبما أن جميع قيم $\bar{C}_{ij} - C_{ij} \leq 0$ لجميع قيم i ، j فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

كما ويصلح استعمال الصيغة الآتية $\left[\bar{C}_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}\right]$ باعتبار أن $[\bar{C}_{ij}]$ هو الناتج الأخير لعملية الطرح بين U_i و V_j المستخرجة عن طريق حل المعادلات. و C_{ij} هي كلفة الخلية الأصلية وهذا سيكون الحل الأمثل ، إذا كانت جميع قيم $\left[\bar{C}_{ij} = U_i + V_j - C_{ij} \geq 0\right]$ وبتطبيقها على مثالنا الحالي تكون نواتج قيم $\bar{C}_{ij}$ وكما يأتي:

$$\bar{C}_{ij} = U_1 + V_1 - C_{11} = 0 + 4 - 4 = 0$$
$$\bar{C}_{12} = U_1 + V_2 - C_{12} = 0 + 11 - 2 = 9$$
$$\bar{C}_{21} = U_2 + V_1 - C_{21} = 3 + 4 - 7 = 0$$
$$\bar{C}_{22} = U_2 + V_2 - C_{22} = 3 + 11 - 5 = 9$$
$$\bar{C}_{31} = U_3 + V_1 - C_{31} = -1 + 4 - 3 = 0$$
$$\bar{C}_{32} = U_3 + V_2 - C_{32} = -1 + 11 - 10 = 0$$

وبما أن جميع القيم لـ $\bar{C}_{ij}$ هي أكبر أو مساوية للصفر فهذا يعني أن الحل الحالي هو الحل الأمثل.

مثال (65): اختبر الحل الأساسي لمشكلة النقل الآتية، أو أوجد الحل الأمثل لحل مشكلة النقل الآتية مستخدما طريقة التوزيع المعدل.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	$\boxed{37}$ $X_{11} = 0$	$\boxed{27}$ $X_{12} = 30$	$\boxed{28}$ $X_{13} = 70$	$\boxed{34}$ $X_{14} = 0$	$\boxed{30}$ $X_{15} = 0$	100
S_2	$\boxed{29}$ $X_{21} = 45$	$\boxed{32}$ $X_{22} = 0$	$\boxed{32}$ $X_{23} = 0$	$\boxed{27}$ $X_{24} = 80$	$\boxed{28}$ $X_{25} = 0$	125
S_3	$\boxed{34}$ $X_{31} = 30$	$\boxed{27}$ $X_{32} = 30$	$\boxed{37}$ $X_{33} = 0$	$\boxed{30}$ $X_{34} = 0$	$\boxed{30}$ $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375

						375

ولأجل التأكد من أنه يجوز اســتخدام طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution، يجب أن نتأكد من أن الشـــرط، عدد الخلايا المشـــغولة $= 7 = m + n - 1$، ولذلك نفترض أن كلفة كل خلية تســـاوي $C_{ij} = U_i + V_j$ وللخلايا المشغولة أو المتغيرات الأساسية فقط . وحيث توجد سبع خلايا مشغولة وهذا يعني وجود سبعة متغيرات أساسية وسبع معادلات وكما يأتي:

$$U_1 + V_2 = 27$$
$$U_1 + V_3 = 28$$
$$U_2 + V_1 = 29$$
$$U_2 + V_4 = 27$$

$$U_3 + V_1 = 34$$
$$U_3 + V_2 = 27$$
$$U_3 + V_5 = 30$$

وبهذا تكون قيم U_i و V_j كما يأتي :

$$U_1 = 0 \quad V_1 = 34 \quad V_4 = 32$$
$$U_2 = 5 \quad V_2 = 27 \quad V_5 = 30$$
$$U_3 = 0 \quad V_3 = 28$$

ويكون توزيع قيم U_i و V_j كما يأتي على جدول النقل:

$$V_1 = 34 \quad V_2 = 27 \quad V_3 = 28 \quad V_4 = 32 \quad V_5 = 30$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
$U_1 = 0$ S_1	37	27	28	34	30	100
$U_2 = 05$ S_2	29	32	32	27	28	125
$U_3 = 0$ S_3	34	27	37	30	30	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

والآن يتم حساب $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$ وتكون مصفوفة الناتج كما يأتي :

$\bar{C}_{ij} - C_{ij} =$

−3	0	0	−2	0
0	−10	-9	0	−3
0	0	-9	2	0

فإذا كانت نتائج الجدول هي أقل أو مساوية للصفر فمعنى هذا أن الخلايا المتمتعة بهذه الخاصية، هي خلال يجب إبقاؤها كما هي، أو بعبارة أخرى أن الحل أمثل. عدا التي ظهرت لها قيم موجبة $[\bar{C}_{ij} - C_{ij} \geq 0]$ فهذا يدلل أن الحل لهذه الخلايا هو غير أمثل (كما ظهر في الخلية S_3D_4 ، أي كانت النتيجة =2)، أي يجب تغيير الكميات الموجودة فيها ونبدأ بها على أنها متغير داخل (كما هو متبع في طريقة السمبلكس) لتكوين مسار موجه مغلق، وهنا سوف يكون المسار كما يلي:

$$S_3D_4 \rightarrow S_2D_4 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1$$

ومن ثم العودة الى S_3D_4 وسيمثل ذلك بالرسم وكما يأتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	37	27	28	34	30
S_2	29 $45 + k$	32	32	27 $80 - k$	28
S_3	34 $30 - k$	27	37	30 k	30

وبهذا تكون قيمة K = 30 حسب ما تم شرحه بالتفصيل بالفقرات السابقة لموضوع المسارات المتعرجة وبهذا يكون جدول النقل الجديد والمتمتع بالحل الأمثل.

37 $X_{11} = 0$	27 $X_{12} = 30$	28 $X_{13} = 70$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$
29	22	32	27	28

$X_{21} = 75$	$X_{22} = 0$	$X_{23} = 0$	$X_{24} = 50$	$X_{25} = 0$
34 $X_{31} = 30$	27 $X_{32} = 30$	37 $X_{33} = 0$	30 $X_{34} = 30$	30 $X_{35} = 90$

وبإمكان الطالب أن يختبر الحل في الجدول الأخير وسيجد أن الحل الأمثل .

3-5.مشاكل النقل غير المتوازنة Unbalanced Transportation Problems:

في حالات ليست قليلة في مشاكل النقل هناك عدم تساوي مجموع الكميات الموجودة في المصادر مع مجموع الكميات المطلوبة في الغايات، ويقال لمشكلة النقل أنها عديمة الاتزان أو أنها غير متوازنة وتكون على نوعين وكما يأتي:

5-3-1.مجموع ما تحتويه المصادر (المتيسرات) أكبر ممّا تحتاجه الغايات:

في حالة كون المتيسرات أكبر من الاحتياجات للغايات، ومن أجل موازنة المشكلة، بغية الحصول على الحل، ولإتمام ذلك والوصول به إلى الحل الأمثل، نفترض وجود غاية (Distination) أو نهاية وهمية، لكي تستوعب الفارق من الوحدات بين المتيسرات واحتياجات الغايات، ولأن البضائع سوف لا تنقل عبر هذه المربعات التي أضيفت مربعات الغاية الوهمية، فإن تكاليف النقل في تلك المربعات ستكون صفرا، وكما مبين في المثال الآتي:

مثال (66): أوجد الحل لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	2	1	2	20
S_2	1	2	3	9
S_3	4	2	1	11

	10	8	15	40 / 33

وهنا واضـــح من المثال أن مجموع ما تحتويه المصـــــادر (مجموع المتيســـرات) هو أكبر من مجموع الاحتياجات، فالمشــكلة إذًا غير متوازنة وهنا نحتاج إلى نهاية وهمية تســتوعب الفارق من الوحدات بين مجموع المتيســرات ومجموع الاحتياجات، أي تســتوعب الغاية الوهمية (7 وحدات)، في مثالنا الحالي، وكما يلي (D_4) تسمى في بعض الأحيان (D_m)

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2	1	2	0	20
S_2	1	2	3	0	9
S_3	44	2	1	0	11
	10	8	15	7	40 / 40

وهنا تحدث مشكلة نقل متوازنة، والآن نبدأ بتطبيق الطرق السابقة سواءً تلك كانت التي نحصل منها على الحل الأساسي الابتدائي أم الخاصة بالاختبار للحل الأمثل.

5-3-2.مجموع ما تحتويه المصادر (المتيسرات) أقل ما تحتاجه الغايات

في حالة كون مجموع المتيســرات (مجموع الكميات التي تحتويها المصـــادر) أقل من مجموع الاحتياجات (مجموع ما تحتاجه الغايات، ولأجل جعل المشكلة متوازنة ولغرض استخراج الحل الأمثل، نفترض وجود مصدر وهمي يحتوي على عدد من الوحدات تساوي الفارق بين مجموع ما تحتويه المصادر ومجموع احتياجات الغايات، وبما أن مجموع ما يتيســـر في المصـــــادر لا يكفي الاحتياجات لذا فإن تكاليف النقل في مربعات (أو خلايا) المصدر الوهمي تساوي صفرًا وكما هو واضح في المثال الآتي:

مثال (67): أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	8	7	2	100
S_2	4	9	10	75
S_3	1	2	8	25
S_4	5	6	11	125
	150	125	130	325 / 405

وكما هو واضح أن الفارق من الوحدات بين مجموع ما يتيسر من المصادر ومجموع الاحتياجات هو 80 وحدة، لذلك نحتاج إلى افتراض مصدر وهمي يتيسر فيه 80 وحدة. ولذلك نفترض مصدر خامس وهو S_5 أو ما يسمى بعض الأحيان S_m .

	D_1	D_2	D_3	
S_1	8	7	2	100
S_2	4	9	10	75
S_3	9	2	8	25
S_4	5	6	11	125

S_5	0	0	0	80
	150	125	130	405 / 405

وهنا أصبحت مشكلة النقل متوازنة (أي مجموع ما تحتويه المصادر تساوي ما تطلبه الغايات) ، ولذلك لا يوجد مانع من استخدام الطرق السابقة للحصول على الحل الابتدائي الأساسي وكذلك الحصول على الحل الأمثل.

ومما تجدر الإشارة إليه أن الغايات الوهمية والمصادر الوهمية مساوية للمتغيرات المكملة (Complementary Variables)، والتي تمت إضافتها لمشكلات البرمجة الخطية لتحويلها إلى الصيغ القياسية (Standard Forms) والتي سبق توضيحها.

5-4. حالة الانحلال في مشكلات النقل Degenerate:

لقد تم التأكيد في بداية هذا الفصل وعند الحصول على الحل الأساسي الابتدائي لمشاكل النقل والتي تكون بإحدى الطرق الثلاث (الركن الشمالي، أقل كلفة، فوجيل)، والتي تكون فيها الخلايا المشغولة بقدر المعادلة $(m + n - 1)$، يكون من الممكن أو من السهل إتمام عملية الحصول على الحل الأمثل وبأحد الطريقتين اللتين ذكرتا وعلى افتراض أن : عدد الصفوف $= m$ ، عدد الأعمدة $= n$

وبكلام آخر فإذا كانت عدد الخلايا المشغولة (المربعات المشغولة = عدد المتغيرات الأساسية) أقل من $(m + n - 1)$، ففي هذا النوع من المشاكل يكون من المتعذر الحصول على الحل الأمثل، وأن مشكلة النقل تكون عبارة عن مشكلة منحلة Degenerate

وغالباً ما يحدث الانحلال في مشاكل النقل في حالتين:

1. يحدث الانحلال أثناء الحل في مرحلة الحل الأساسي الأولى.
2. ممكن أن يحدث الانحلال أيضًا خلال إجراء عمليات الحل الأمثل وعندما تستوعب أحد المربعات كمية من المفترض أن تكون موزعة على أكثر من مربع واحد.

معالجة حالة الانحلال:

المعالجة هنا هي عبارة عن السعي لوضع كمية صغيرة جدًا ولنرمز لهذه الكمية الصغيرة بالرمز (أيبسلونε)، حيث يكون ε أكبر من الصفر وأن استخدامها في أي مربع لا يؤثر على توازن مشكلة النقل . وهنا يجب إضافتها إلى مربع واحد أو أكثر، بحيث يعد هذا المربع خلية مشغولة بحيث يتحقق الشرط وهو أن عدد المربعات المشغولة يجب أن يساوي $(m + n - 1)$

(إن الكمية ε صغيرة جدًا بحيث إن تم إضافتها أو طرحها من أية كمية فلا تؤثر على تلك الكمية وبعبارة أخرى فمثلا $8 = ε + 8$ أو $12 = ε - 12$ ، لكن $0 = ε - ε$) .

وطريقة حل أية مشكلة تحتوي على ε هي نفس الطريقة التي تم توضيحها في هذا الفصل وذلك بافتراض أن ε رقم صغير . وإذا وجد ε في أحد المربعات وكان الحل أمثلا فإن ε تعني لاشئ، بل يعد مربع ε مربعا مشغولاً ، ولا تؤخذ بنظر الاعتبار، لأن ε كمية صغيرة جدا تساعدنا في استخراج الحل الأمثل ولا تؤثر على توازن الكميات للمصادر والغايات الموجودة .

5-5. تحوير طريقة النقل في تعظيم الأرباح:

بالرغم من أن موضوع نماذج النقل يسعى إلى تقليل الكلفة الخاصة بالنقل وهذا ما تؤكده دالة الهدف الخاصة بنموذج النقل التي تكون دائما من نوع تقليل (تدنية) Minimizing، بل لا مانع من توظيف نماذج النقل لتعظيم الأرباح، وهنا يستوجب تعديل بعض المفاهيم التي استخدمت له في مجال تقليل التكاليف وهي كما يأتي:

1. اعتبار تكاليف النقل من وحدات الإنتاج إلى مراكز التسويق التي كانت في مصفوفة النقل السابقة هي أسعار بيع الكميات من الوحدات إلى المراكز.
2. في طريقة الأقل كلفة (Least Cost) كان البحث عن أقل كلفة نقل وعند العثور عليها وكنا نضع في ذلك المربع (صاحب أقل كلفة) كل الاحتياج ولكن عندما يستهدف تعظيم الأرباح نبحث عن أعلى رقم (أعلى سعر) ونعطيه الأولوية باعتباره أعلى سعر ثم نتدرج لنأخذ الأسعار الأقل.
3. في طريقة فوجيل التقريبية بدلاً من البحث عن أقل كلفة والتي تليها لاستخراج الفرق، هنا نتجه إلى أعلى سعر والذي يليه واستخراج الفرق بينهما وسيتم توضيح ذلك بالمثال الذي سيتم التطبيق عليه لاحقا.
4. وفي حالة التحقق من الحل الأولي للوصول إلى الحل الأمثل في طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل تعطى الأولوية للمربع أو الخلية الحاصلة على أعلى رقم موجب وليس السالب (كما

هو متبع في الطريقتين في نماذج النقل) وبدلاً من أن تطرح قيمة ذلك المسار، تضاف إلى قيمة التوزيع الأولي.

5. تتوقف عن البحث عن الحل الأمثل عندما تكون جميع القيم المتحصلة من المسارات أكبر أو يساوي صفر.

ولتوضيح ما ورد أعلاه سيتم الاستعانة بالمثال الآتي:

مثال (68): فكر مستثمر في إقامة مشروع لإنتاج كاشي السيراميك، وتتوزع وحداته الإنتاجية في كل من: بغداد، سليمانية، الموصل ثم تنقل بعد ذلك إلى مراكز تجمع رئيسية أربعة جاهزة: بعقوبة، الأنبار، تكريت، كركوك. ليتم توزيعه على تجار المفرد أو المستهلك. وقد وضع خطة أولية للطاقة الإنتاجية لوحدة إنتاج بغداد هي (2000) طن والطاقة الإنتاجية لوحدة السليمانية (1300) طن وطاقة وحدة الموصل (1700) طن. أي أن إجمالي طاقة الوحدات الإنتاجية (5000) طن. وقد افترض أن جميع كميات الإنتاج في هذه الوحدات الثلاث، وسيتم توزيعها على المراكز الأربعة بمقدار (1000) طن لمركز بعقوبة و(2000) طن لمركز الأنبار و(500) طن لمركز تكريت و(1500) طن لمركز كركوك، أي أن كمية الإنتاج (المعروض) تعادل الكمية المعدة للتوزيع (المطلوبة)، وقد لاحظ أن كلفة نقل الطن الواحد من الإنتاج إلى مراكز التوزيع بالدينار وكانت على النحو الآتي:

إلى / من	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك
بغداد	10	8	6	4
سليمانية	14	17	5	2
الموصل	18	7	11	9

1. أوجد أقل كلفة نقل بين الوحدات الإنتاجية ومراكز التجمع للتوزيع وحسب نماذج النقل.

2. أوجد أعلى إيراد ومن مبدأ تعظيم الأرباح.

1- أ: إيجاد الحل إلى المثال السابق بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (NWC) .

إلى المراكز / من الوحدات	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك	الكميات المنتجة

2000	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$ 1000	$\boxed{10}$ 1000	**بغداد**
1300	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 300	$\boxed{17}$ 1000	$\boxed{14}$	**سليمانية**
1700	$\boxed{9}$ 1500	$\boxed{11}$ 200	$\boxed{7}$	$\boxed{18}$	**الموصل**
5000 / 5000	1500	500	2000	1000	**كميات التوزيع**

مجموع الإيرادات:

$$Z = 10 * 1000 + 8 * 1000 + 17 * 1000 + 5 * 300 + 11 * 200 + 9 * 1500$$
$$= 52200$$

وبالإمكان التحقق من أن الحل أعلاه هو الحل الأمثل بإحدى الطريقتين اللتين ورد ذكرهما سـابقا أو بالاثنتين معًا، وسنبدأ باستخدام طريقة المسار المتعرج للمربعات الفارغة وبعد جدولين آخرين جرى التحقق فكانت جميع القيم موجبة وصفرية وبذلك تم الوصول بالحل إلى الحل الأمثل، والجدول الأخير يكون كما يأتي:

الكميات المنتجة	**كركوك**	**تكريت**	**الأنبار**	**بعقوبة**	**إلى المراكز / من الوحدات**
2000	$\boxed{4}$ 800	$\boxed{6}$ 500	$\boxed{8}$ 700	$\boxed{10}$	**بغداد**

سليمانية	$\boxed{14}$	$\boxed{17}$ 1300	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	1300
الموصل	$\boxed{18}$ 1000	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$ 700	1700
كميات التوزيع	1000	2000	500	1500	5000 / 5000

$$Z = 8 * 700 + 6 * 500 + 4 * 800 + 17 * 1300 + 18 * 100 + 9 * 700 = 42000$$

1– ب: إيجاد الحل للمثال السابق بطريقة الأقل كلفة:

ووفقا لهذه الطريقة تعطى الأولوية للمربع ذي القيمة العالية، يتم التدرج نزولاً في الأســـعار وبعد توزيع الكميات من وحدات الإنتاج إلى مراكز التوزيع كان الجدول الآتي:

إلى المراكز / من الوحدات	**بعقوبة**	**الأنبار**	**تكريت**	**كركوك**	**الكميات المنتجة**
بغداد	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 700	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 1300	2000
سليمانية	$\boxed{14}$	$\boxed{17}$ 1300	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	1300

1700	$\boxed{9}$ 200	$\boxed{11}$ 500	$\boxed{7}$	$\boxed{18}$ 1000	**الموصل**
5000 / 5000	1500	500	2000	1000	**كميات التوزيع**

ويكون مجموع الايرادات

$$Z = 8 * 700 + 4 * 1300 + 17 * 1300 + 18 * 1000 + 11 * 500 + 9 * 200 = 58200$$

وبعد تطبيق طريقة المســـار المتعرج ظهرت جميع القيم موجبة وصـــفرية وتعتبر القيمة (58200) هي الإيراد الكلي الأمثل.

1-ج: ايجاد الحل الأساسي بطريقة فوجيل التقريبية:

في هذه الطريقة ســيتم حســاب قيم الندم، وهي الفرق بين أعلى قيمة والتي تليها وذلك على مســتوى الصفوف والأعمدة، وتعطى الأولوية عادة للصف أو العمود ذو قيمة الندم الأعلى، وقد كان توزيع الكميات على النحو الآتي:

	الكميات المنتجة	**كركوك**	**تكريت**	**الأنبار**	**بعقوبة**	**إلى المراكز / من الوحدات**
~~2~~ ~~2~~ ~~2~~ ~~2~~	2000	$\boxed{4}$ 1300	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$ 700	$\boxed{10}$	**بغداد**
3	1300	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{17}$ 1300	$\boxed{14}$	**سليمانية**
~~7~~ ~~7~~ ~~2~~	1700	$\boxed{9}$	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	$\boxed{18}$	**الموصل**

	1000		500	200	
كميات التوزيع	1000	2000	500	1500	5000 / 5000
	4	~~9~~	~~5~~	~~5~~	
	4	~~1~~	~~5~~	~~5~~	
		~~1~~	~~5~~	~~5~~	
		~~1~~		~~2~~	

2–أ: ويكون الإيراد الكلي الأمثل كما يأتي:

$$Z = 8 \ast 700 + 4 \ast 1300 + 17 \ast 1300 + 18 \ast 1000 + 11 \ast 500 + 9 \ast 200 = 58200$$

وبعد تطبيق طريقة المسارات المتعرجة للتأكد من وجود الحل الأمثل أم لا، وجد أن جميع قيم المسارات المتعرجة موجبة أو صفر ومن البديهي أن تكون تلك المسارات للمربعات الفارغة أي للمتغيرات غير الأساسية. وسيترك للطالب التأكد من وجود الحل الأمثل بتطبيق طريقة التوزيع المعدل ليتأكد بنفسه من وجود الحل الأمثل.