المحور الخامس: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية Dual Problems

تمهيد:

المسائل التي تم التطرق إليها في الفصول الماضية، تعرف بالمسائل الأصلية (Primal Problems)، لذا رمزنا بالرمز P (P اختصار لكلمة Primal)، ولكل مسألة أصلية توجد مسألة ثنائية (problem Dual).

المسائل الثنائية لها نفس المعطيات والخصائص المطبقة على الأصلية كما يمكن وصف الثنائية بالتبيان التالي، لكل مسألة برمجة خطية على صورة Max توجد مسألة معادلة لها على صورة Min، كما أنه لكل مسألة برمجة خطية على صورة Min توجد مسألة معادلة لها على صورة Max.

وحسب رأينا يمكن إعطاؤها التصور التالي: أن المسألة الأصلية تعالج الجوانب الاقتصادية الكمية (مثل حجم الانتاج، حجم الطلب، حجم الدخل، حجم الخدمات، حجم المخزون، حجم النقل... إلخ.) بينما المسألة الثنائية تعالج الجوانب المالية، حيث تتطرق إلى التأثيرات والتغيرات المالية التي تحدث على دالة الهدف نتيجة الزيادات الممكنة أو النقص الممكن في الموارد المتاحة.

1) صياغة المسألة الثنائية:

الشكل الأساسي لعلاقة الثنائية يمكن التعبير عنه كالآتي:

لمسائل الأصلية على الصورة Max:

$$Max\ Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

حيث:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\le b_3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

الشكل المعياري للمسألة الأصلية هو:

$$Max\ Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

حيث:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + S_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + S_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + S_3 &= b_3 \\ X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

الثنائية تكون كالتالي:

$$Min\ Z_d = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$$

حيث:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 \geq c_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \geq c_2$$
$$a_13u_1 + a_23u_2 + a_{33}u_3 \geq c_3$$
$$u_1 , u_2 , u_3 \geq 0$$

حيث (u_1 , u_2 , u_3) تمثل متغيرات الثنائية

من هذا التحول يلاحظ أن استنتاج الثنائية من الأصلية كان بالطرق التالية:

أ. تغيير المتغيرات الأصلية x_i بمتغيرات ثنائية u_j.

ب. وضع معاملات الهدف للأصلية كطرف أيمن لقيود الثنائية.

ج. وضع الطرف الأيمن لقيود الأصلية كمعاملات هدف للثنائية.

د. وضع مقلوب أو منقول مصفوفة الطرف الأيسر للقيود للأصلية كقيود ثنائية.

هـ. كما أن الجدول التالي يوضح لنا بعض التغييرات الأخرى التي تحدث بين الأصلية والثنائية.

المتغيرات	القيود	الهدف	هدف الأصلية في الشكل المعياري
الثنائيـة			**الأصليـة**
غير مقيد	$\geq$	$Min\ Z_d$	$Max\ Z_p$
غير مقيد	$\leq$	$Max\ Z_d$	$Min\ Z_p$

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التطبيقي التالي:

$$Max\ Z_p = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

حيث:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ \geq 0$$

لإيجاد الثنائية، نحول الأصلية إلى الصورة المعيارية.

$$Max\ Z_p = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0s_1 - Mt_2$$

حيث:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + t_2 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, t_3 \geq 0$$

لإيجاد الثنائية من الأصلية هناك بعض النقاط يجب أن تحفظ:

أ. عدد المتغيرات للثنائية يساوي عدد القيود للأصلية.

ب. عدد قيود الثنائية يساوي عدد متغيرات الأصلية.

ج. الطرف الأيمن للقيود للأصلية يكون معاملات الهدف للثنائية.

د. معاملات الهدف للأصلية يكوّن الطرف الأيمن للثنائية.

هـ. الطرف الأيسر لقيود الثنائية يتكون من مقلوب أو منقول المصفوفة للطرف الأيسر لقيود الأصلية.

و. ثنائية الثنائية أصلية.

الثنائية: $Min\ Z_d = 10u_1 + 8u_2$

حيث:

$$\begin{gathered} u_1 + 2u_2 \geq 5 \\ 2u_1 - u_2 \geq 12 \\ u_1 + 3u_2 \geq 4 \\ u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq -M \end{gathered}$$

هذا يستلزم أن u_2 غير مقيد.

2) العلاقة بين الأصلية الثنائية:

هناك مجموعة من العلاقات التي تربط بين الأصلية والثنائية تتمثل في:

أ. إذا كان يوجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

ب..من خلال حل (الأصلية، الثنائية)، فإن هدف الأصلية يساوي هدف الثنائية أي أن:

$$Min\ Z_p = Max\ Z_d \quad و \quad Max\ Z_p = Min\ Z_d$$

ج. مسائل Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى آخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها، قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى آخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة Min

د. لأي زوج للأصلية وللثنائية حل عملي.

هـ. يمكن إيجاد متغيرات الأصلية من الحل الأمثل للثنائية مباشرة والعكس صحيح، وهذا عن طريق العلاقة التالية:

الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	=	عناصر السطر Z_p لمصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية

وتكون هذه العلاقة صالحة بتغيير مصطلحات الثنائية والأصلية لكل حالة.

و. كما يمكن اختصار بعض الاختلافات بين الأصلية والثنائية في الجدول التالي:

	الأصلية	الثنائية

المتغيرات	وحدات منتجة نهائية	هامش القيمة للمورد (قيمة الوحدة للمورد) أو مقدار زيادة دالة الهدف في حالة إضافة وحدة واحدة من المورد
دالة الهدف	تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة (عدد الوحدات المنتجة) (هامش الربح للوحدة أو هامش التكلفة)	تخفيض هامش القيمة أو العكس (قيمة الوحدة للمورد) (المادة المستعملة)
القيود	قيود على استعمال الموارد النادرة	لزوم لزيادة الربح لكل منتج

كما يمكن إعطاء ملخص عام حول العلاقة بين (الأصلية، الثنائية) وهذا حسب الجدول التالي:

عمود الطرف الأيمن للقيود	متغيرات البرنامج $x_1 \quad x_2 \quad \dots . x_i \quad \dots . x_n$	عمود الأساس
b_1	$a_{11} \quad a_{12} \quad \dots . a_{1i} \quad \dots . a_{1n}$	S_1
b_2	$a_{21} \quad a_{22} \quad \dots . a_{2i} \quad \dots . a_{2n}$	S_2
b_i	$a_{j1} \quad a_{j2} \quad \dots . a_{ji} \quad \dots . a_{jn}$	S_i
b_n	$a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots . a_{mi} \quad \dots . a_{mn}$	S_m
	$c_1 \quad c_2 \quad \dots . \quad c_l \quad \dots . \quad c_n$	Z_p

معاملات الهدف للثنائية

الطرف الأيمن لقيود الثنائية

مقلوب المصفوفة للطرف الأيسر لقيود الثنائية

من الحل الأمثل للأصلية لدراسة الحالة في الفصل الأول والثاني يمكن استخلاص النتائج التالية:

أ) في الجدول النهائي (الحل الأمثل) $Max\ Z_p = Min\ Z_d = 46/4$

ب) قيمة Z_p تبدأ في تزايد إلى أن تصل إلى $46/4$، بينما قيمة Z_d تبدأ في التناقص إلى أن تصل إلى $46/4$، هذه النتيجة تتطلب الوصول إلى نقطة التعادل، والوصول إلى نقطة التعادل يكمن في حالة تعادل قيمة دالتي الهدف للأصلية والثنائية، وحالة التعادل تمثل الحل الأمثل. هاتين النتيجتين يمكن أن تعمم على أي زوج (الأصلية – الثنائية):

- لأي زوج حل عملي للأصلية والثنائية أي أن:

$$\left(\text{قيمة دالة الهدف في } Max\ Z_p\right) \geq \left(\text{قيمة دالة الهدف في } Min\ Z_d\right)$$

- عند الحل الأمثل للأصلية والثنائية:

$$\left(Min\ Z_d \text{ قيمة دالة الهدف في}\right) = \left(Max\ Z_p \text{ قيمة دالة الهدف في}\right)$$

قيمة دالة الهدف في Max) < قيمة دالة الهدف في Min Za

- إيجاد قيم الثنائية من الحل الأمثل للأصلية عن طريق العلاقة:

معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية = الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية

- وتكون هذه العلاقة صالحة لإيجاد قيم الأصلية من الحل الأمثل للثنائية:

معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للثنائية = الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الأصلية المشارك مع المتغير الأساسي للثنائية

في جدول الأصـــلية المتغيرات الأســـاســـية هي s_1, s_2, s_3 ومعاملاتها في الدالة Z_p هي على التوالي: $1/2$ و $1/2$ و 0

أما قيود الثنائية المشاركة مع s_1, s_2, s_3هي على التوالي: $u_1 \geq 0\ ,\ u_2 \geq 0\ ,\ u_3 \geq 0$

المتغيرات الأساسية للأصلية	s_3	s_2	s_1
معادلات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية	$1/2$	$1/2$	0
الفرق بين الطرف الأيســـر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	$u_3 - 0$	$u_2 - 0$	$u_1 - 0$

إذا وضعنا:

$$u_1 - 0 = 0 \ \Rightarrow u_1 = 0$$
$$u_2 - 0 = 1/2 \ \Rightarrow u_2 = 1/2$$
$$u_3 - 0 = 1/2 \ \Rightarrow u_3 = 1/2$$

نفس الشي يمكن أن يطبق على إيجاد قيم الأصلية من الثنائية وهذا بعكس المصطلحات السابقة كما تمت الإشارة إليه سابقا.

2) المعنى الاقتصادي للمتغيرات الثنائية:

من وجهة نظر الجانب التطبيقي للبرمجة الخطية يلاحظ أن أهمية المســـألة الثنائية تكمن في المعنى الاقتصـادي لمتغيراتها والتي يطلق عليها قيمة الوحدة للمورد أو أسـعار الظل في حين يطلق اسـم تكلفة الخسـارة البديلة (Opportunity Cost) على متغيرات الطاقة العاطلة في الثنائية.

إذا كانت القيمة المثلى لدالة الهدف للثنائية هي Z_d وحيث أن: $\mathrm{Z}_d = \sum b_j\, u_j$

ما دامت Z_p تمثل قيمة نقدية و b_j تمثل وحدات (القيمة) للمورد j، إذًا u_j يجب أن تمثل قيمة نقدية للوحدة للمورد j لأن: $\left(\text{الربح}\right) = \left(\text{مجموع الوحدات المورد } j\right)\left(\text{القيمة النقدية/وحدة المورد } j\right)$

وهذا المتغير الثنائي لما يمثل قيمة الوحدة للمورد j والتي تسمى بسعر الظل كما أشرنا سابقا في دراسة الحالة السابقة ($u_1 = 0$, $u_2 = 1/2$, $u_3 = 1/2$) تدل على أنه، لزيادة قيمة Z_p المثلى، المورد الثاني والثالث هما المعنيين بالزيادة لكي تزيد Z_p

إذا افترضنا الآن أن قيمة الموارد بالنسبة للقيد u_i قد تغيرت بمقدار Δb_j فهذا يحدث تغيرا في قيمة Z_d مقداره:
$$\Delta Z_d = u_j(\Delta b_j) \Rightarrow u_j = \Delta Z_d / \Delta b_j$$

وبما أنه عند الحل الأمثل لكل من الأصلية والثنائية متساوي لكل: $Z_p = Z_d$ فإن: $u_j = \Delta Z_d / \Delta b_j$

أي أن القيمة المثلى للمتغير في الثنائية هي عبارة عن نسبة التغيير الذي يحدث في قيمة دالة الهدف إذا غيرنا كمية الموارد بالنسبة لـu_j بمقدار وحدة واحدة مع الاحتفاظ بالمعطيات الأخرى كما هي.

هذا التحليل يقودنا إلى ملاحظة هامة جدًا وهي أنه للحلول العملية غير المثالية يوجد: $Z_p < Z_d$

وبتعبير اقتصادي فإن: $\left(\text{الربح}\right) < \left(\text{عائد المورد}\right)$

عدم التساوي يبين أنه ما دام الربح أقل من عائد المورد، الحل لا يكون أمثلاً، الأمثلية نصل إليها عندما يتساوى الربح مع عائد المورد، وهنا يمكن التفكير في البرمجة الخطية كنظام مدخلات ومخرجات، الموارد تمثل المدخلات والربح يمثل المخرجات، النظام يبقى غير متوازن إذا كانت المدخلات تفوق المخرجات، التوازن يتحقق عندما يكون الربح يساوي عائد المورد.

في دراسة الحالة السابقة $u_2 = 1/2$ معناه اقتصاديا، أنه إذا استطاعت المؤسسة زيادة وحدة واحدة من المورد الثاني فإنه بإمكانها زيادة الربح أو قيمة الهدف بـ $1/2$ وحدة نقدية. نفس الشيء يمكن أن يقال عن u_3

إن التعبير الاقتصادي لمتغيرات الثنائية له فائدة كبيرة بالنظر إلى u_1 ، u_2 ، u_3 في دراسة الحالة السابقة لاحظنا أنu_2 يساوي $1/2$، هذا معناه (بافتراض أن العملية تمثل ساعات عمل على آلات) أن ساعة إضافية على الآلة 1 قيمتها $1/2$ وحدة نقدية، فإذا كانت المؤسسة لا تملك ساعات إضافية على الآلة 1، والتكلفة الفعلية لاستئجار ساعة واحدة هي β حيث $\beta \geq 1/2$ فإن المؤسسة ستزيد من ربحها بمقدار $(\beta - 1/2)$ ولكن إذا كانت الأسعار في سوق β حيث $\beta \leq 1/2$ فعلى المؤسسة أن تفكر في إيجاد مستأجرين لآلاتها، حيث من الممكن أن هذه العملية ستضمن لها أرباح إضافية أكبر من الأرباح التي تحققها إذا استعملت تلك الساعة في الإنتاج.

4-المعنى الاقتصادي لقيود الثنائية:

كما أشـرنا سـابقا فإنه في أي جدول سـمبلكس، هدف معامل متغير الأصـلية X_i هو الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية j. هذا يعني أن:

$$\left(\text{هدف معامل}\right)\ x_i = \sum a_{ji}\,.u_j - c_i$$

وحيث أن c_i هو ربح الوحدة لمخرجات النشـاط x_i، هذا يعني أن c_i له قدر القيمة النقدية للوحدة وما دام c_i يمثل ربح الوحدة للمخرجات فإن $\sum a_{ji}\,.u_j$ تمثل تكلفة، وما دامت a_{ji} تمثل مقدار المورد j المســـتعمل بوحدة واحدة للنشـــاط i. إذًا u_j يجب أن تمثل تكلفة منســـبة لوحدة المورد j ، وبهذا تكون $\sum a_{ji}\,.u_j$ تكلفة مناسبة لكل الموارد المستعملة من أجل إنتاج وحدة واحدة من النشاط i

هذا التحليل يؤدي إلى المساواة التالية:

(الربح أو التكلفة) للوحدة = (التكلفة) للوحدة – (الربح) للوحدة

من هذه المســاواة يمكن ملاحظة أن الطرف الأيمن يمكن أن يمثل ربح أو تكلفة وهذا متوقف على إشــارة الطرف الأيسر موجبة أو سالبة.

في حالة التعظيم لمسائل البرمجة الخطية فإن شرط الأمثلية في طريقة السمبلكس تلاحظ أنه عند مستوى النشاط i الذي يظهر غير أساسي يكون يساوي صفر لأن معامله في السطر Z_p سالب اقتصاديا هذا يعني أن:

$$\sum a_{ji}\,.u_j - c_i < 0$$

أي أن:

$$\boxed{\left(\text{التكلفة المنسبة للموارد المستعملة للوحدة } i\right) - \left(\text{الربح للوحدة } i\right) < 0}$$

هذا يعني أن:

$$\boxed{\left(\text{التكلفة المنسبة للموارد المستعملة للوحدة } i\right) < \left(\text{الربح للوحدة } i\right)}$$

وبالتالي وحيث أن الربح يفوق التكلفة المنسبة، مستوى النشاط يجب أن يفوق الصفر. وهذا يمكن استنتاجه من السطر Z_p حيث يتم زيادة معامل النشاط غير الأساسي من مستوى سالب إلى مستوى الصفر، أي جعله في الجدول اللاحق نشاط أساسي.

نموذج البرمجة الخطية كما أشرنا سابقا يمثل نظام مدخلات ومخرجات مع العناصر الأساسية التالية:

المدخلات = الموارد المتاحة.

المخرجات = مساهمة النشاط لهدف الدالة.

النموذج = تحويل الموارد المحدودة لنشاطات.

نظام المدخلات والمخرجات لمسائل Max يمكن أن يؤدي إلى:

- زيادة في مساهمة النشاط لدالة الهدف.

– زيادة في إتاحة الموارد المحدودة.

– تخفيض في استهلاك النشاط للموارد المحدودة.

عندما لا يظهر أحد النشاطات في عمود الأساس هذا يعني أن قيمته تساوي صفر كما يعني اقتصاديا أنه غير مربح لذا لم يتم إنتاجه، وهذا يدل على أن التكلفة المنسبة لهذا النشاط أكبر من وحدة الربح.

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

الربح اليومي: $Max\ Z_p = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

حيث:

العملية 1: $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340$

العملية 2 : $3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 460$

العملية 3: $x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 420$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل الأمثل للبرنامج معطى بالجدول التالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل الأمثل
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
X_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_p	4	0	0	1	2	0	1350

من خلال الحل للبرنامج نلاحظ أن $x_1 = 0$ هذا يعني أنه غير مربح ويعني كذلك أن التكلفة المنسبة له أكبر من وحدة الربح أي أن: $u_1 + 3u_2 + u_3 > c_1$

يمكن وضع x_1 مربح وهذا بتخفيض قيمة معاملات $(u_1 + 3u_2 + u_3)$ أي بتخفيض استعمالات المنتج الأول للعمليات الثلاثة، هذه الاستعمالات معطاة بمعاملات $(u_1$ ، u_2 ، $u_3)$

جدول الحل الأمثل أعطى لنا، $u_1 = 1$ و $u_2 = 2$ و $u_3 = 0$

التخفيض في الاستعمال للعملية الثالثة يكون غير مجدٍ أو فعال ما دامت التكلفة المنسبة للوحدة تساوي صفر $(u_3 = 0)$. إذًا التخفيض يكون للعملية الثانية والثالثة.

من التحاليل السـابقة نجد أن الأولوية تعطى للعملية الثانية لأن قيمة الوحدة للمورد لها أكبر من العملية الأولى.

بافتراض أننا مهتمين بتحديد مقدار التخفيض في الاستعمال للعملية الثانية التي تجعل المنتج الأول مربح.

إذا وضـعنا δ_1 تمثل التخفيض للمنتج الأول على العملية الثانية وحيث أن المنتج الأول يكون مربح فقط عندما تكون $u_1 + 3u_2 + u_3 < c_1$ إذًا: $u_1 + (3 - \delta_2)u_2 + u_3 < c_1$

بالتعويض بقيم المتغيرات الثنائية وقيمة معامل الهدف الأصلية أو الطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع X_1 نجد أن:

$$(1).1 + (3 - \delta_2).2 + (1).0 < 3$$
$$7 - 2\delta_2 < 3$$
$$\delta_2 > 2$$

وهذا يعني أن الاسـتعمال للعملية الثانية يجب أن يخفض بأكبر من 2 وحدة لكي يكون المنتج الأول أي X_1 مربح.

5) طريقة الـ Simplex للثنائية:

في الأجزاء السابقة وضحنا أنه عند أي جدول للأصلية $(Z_i - c_i)$ معامل الهدف لـــ: X_i يساوي الفرق بين الجهة اليسرى واليمنى لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية، في حالة Max، جدول الأصلية لا يكون مثالي في حالة $Z_i - c_i < 0$ لمتغير واحد على الأقل، إلا في الحالة المثلى يكون $Z_i - c_i \geq 0$ لكل المتغيرات.

إذا نظرنا للحالة هذه من وجهة نظر الثنائية يكون لدينا:

$$Z_i - c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}u_j - c_i$$

في حالة ما تكون: $Z_j - c_j < 0$ فإن: $\sum_{j=1}^{m} a_{ji}u_j < c_i$

وهذا معناه أن جدول الثنائية ليس عملي في حالة ما الأصلية غير مثالية.

وفي حالة ما الطرف الأيسر أكبر من أو يساوي الصفر فإن الطرف الأيمن يكون أكبر من أو يساوي c_i هذا يعني أن الثنائية تكون عملية عندما تكون الأصلية مثالية.

هذه الحالة تسـتوجب طريقة جديدة للحل للبرمجة الخطية التي تبدأ بالجدول غير عملي (لكن أحسـن) من أن يكون مثالي.

هذه الطريقة الجديدة في الحل سواء للبرامج الأصلية أو البرامج الثنائية تسمى بطريقة الـ Simplex للثنائية، وتمثل طريقة حل، وأنها مهمة جدا في تحليل الحساسية Sensitivity Analysis أي تصحيح الانحرافات.

مثال تطبيقي على طريقة السمبلكس للثنائية:

$$Min\ Z_p = 2x_1 + x_2$$

حيث:

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1\ , x_2 \geq 0$$

الخطوة الابتدائية تتطلب تحويل القيود إلى $\leq$ وإدخال المتغيرات الأساسية أي وضع البرنامج على الشكل المعياري: $Min\ Z_p =\ 2x_1 + x_2$

حيث:

$$-3x_1 - 2x_2 + s_1 = -3$$
$$-4x_1 - 3x_2 + s_2 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 3$$
$$x_1, x_2\ , s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

المتغيرات (s_1, s_2, s_3) تمثل المتغيرات الأساسية في جدول Simplex T_0، هذا الجدول ليس جدول أول عملي لأن عمود الموارد توجد به قيم سالبة، أي أن شرط العملية غير محقق بينما شرط الأمثلية محقق مما يتطلب الحل بطريقة السمبلكس للثنائية:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_0
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	-4	-3	0	1	0	-6
S_3	1	2	0	0	1	3
Z_p	-2	-1	0	0	0	0

من أهم أسس Simplex، طريقة الحل تكون مبينة على تحقيق شرط العملية وتتحقق الأمثلية عند الوصول للحل الأمثل.

حالة العملية: تحدد المتغير الأساسي الخارج، أي تحدد سطر الدوران، حيث المتغير الأساسي الخارج هو المتغير الذي له أكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة، إذا كانت كل عناصر العمود موجبة، الحل عملي.

حالة الأمثلية: تحدد المتغير الداخل، أي تحدد عمود الدوران، المتغير غير الأساسي الداخل يختار من ضمن المتغيرات غير الأساسية بالطريقة التالية:

قسمة عناصر سطر الدوران على عناصر السطر Z_p، لا يتم التعامل مع عناصر سطر الدوران الأكبر من أو تساوي الصفر، المتغير الداخل إذًا هو الذي له أقل ناتج قسمة موجبة في حالة ما إذا كان البرنامج على الشكل Min، أو أقل قيمة مطلقة للنسب أي أكبر نسبة متبوعة بإشارة سالبة، إذا كان البرنامج على الصورة Max.

إذا كانت كل عناصر السطر صفر أو موجبة، يتم اختيار سطر آخر وفي حالة عدم وجود سطر آخر، البرنامج لا يوجد له حل عملي وبالتالي لا يوجد له حل أمثل.

المتغير الخارج هنا s_2 مادام المورد يساوي ($6-$)

لإيجاد المتغير الداخل نضع الجدول التالي:

المتغيرات	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
السطر Z_p	-2	-1	0	0	0
السطر S_2	-4	-3	0	1	0
ناتج القسمة	$1/2$	$1/3$	$-$	$-$	$-$

ما دامت أقل نسبة هي $1/3$ فإن المتغير الداخل هو X_2.

الآن بعد تعيين المتغير الخارج والمتغير الداخل، يتم إتباع طريقة السملكس العادية لحساب الجدول الجديد.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_1
S_1	$-5/3$	0	1	$-1/3$	0	$1-$
X_2	$4/3$	1	0	$-1/3$	0	2
S_3	$5/3$	0	0	$2/3$	1	-1
Z_p	$-2/3$	0	0	$-1/3$	0	2

هنا ظهرت حالة انحراف وبالتالي يمكن اختيار أي واحد من المتغيرات الأساسية إما s_1 أو s_3.

وحيث أن عناصر s_1 يوجد بها قيم سالبة بينما عناصر s_3 لا توجد بها قيم سالبة فهذا يعني اختيار السطر الأول كسطر دوران:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_2
X_1	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$4/5$	$-3/5$	0	$6/5$
S_3	0	0	-1	1	1	0
Z_p	0	0	$-2/5$	$-1/5$	0	$12/5$

الجدول الأخير تحقق فيه شرط العملية وفي نفس الوقت له شرط الأمثلية محقق، مما يعني أنه جدول حل أمثل، حيث:

$$x_1 = 3/5$$
$$x_2 = 6/5$$
$$Z_p = 12/5$$

ملاحظة: يمكن الانتقال من الحل بطريقة السـمبلكس للثنائية إلى طريقة السـمبلكس العادية في نفس المسـألة. كما أن طريقة السـمبلكس للثنائية عادة ما تسـتعمل في تحليل الحسـاسـية عند اسـتعمال الثنائية في التحليل.

6) حسابات مهمة للأصلية – الثنائية

يمكن استعمال المصفوفات لاستخراج بعض الحسابات المهمة للأصلية– الثنائية، بحث أن المتغيرات التي تدخل ضمن المصفوفة تكون حسب الجدول التالي:

T	$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad ....$	$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad ....$	
عمود الموارد	مصفوفة المتغيرات الأساسية	معاملات المتغيرات للقيود للطرف الأيسر	S_1 S_3 S_3
	عناصر سطر دالة الهدف		Z_p

سنقسم الحسابات إلى قسمين:

أ–حسـابات تخص عناصـر المصـفوفة: في أي مرحلة من المراحل لجدول السـميلكس (أصـلي أو ثنائي) عناصر القيود وعمود دالة الهدف للجدول تحسب كما يلي:

$$\text{عمود عند } T_i = \left(\text{عمود النموذج الأصلي}\right)\left(\text{مصفوفة المتغيرات الأساسية عند } T_i\right)$$

لكل $i = 1,2, \dots, n$

ب) حسابات تخص سطر دالة الهدف: لأي جدول من جداول السمبلكس العنصر i في سطر دالة الهدف للمتغير يحسب كما يلي:

$$\text{العنصر } x_i \text{ في دالة الهدف} = \left(\text{الطرف الأيسر لقيد الثنائية المماثل}\right) - \left(\text{الطرف الأيمن لقيد الثنائية المماثل}\right)$$

ونقصد بالمماثل في نفس رتبة الجدول.

لحساب المعاملات عدديا، نحتاج لقيم عددية لمتغيرات الثنائية.

ما دامت معاملات دالة الهدف تختلف من جدول إلى آخر، يمكن اسـتعمال المعادلة التالية التي تعطي متغيرات الثنائية عند أي جدول:

متغيرات قيم الثنائية عند T_i = (مصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية عند T_i) (معاملات المتغيرات الأساسية للأصلية عند T_i)

7) تحليل الحساسية:

من أجل مواصلة تحليل الحساسية Sensitivity Analysis لهذا الفصل يمكن وضع الخطوات التالية:

1. إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي.
2. من أجل أي اقتراح للتغيير في البرنامج الأصلي، وبعد إعادة الحساب للعناصر الجديدة للجدول الأمثل المسجل في الخطوة (1) باستعمال حسابات الأصلية – الثنائية، أو الحسابات العادية توجه إلى الخطوة (3)
3. إذا كان الجدول الجديد غير أمثل، توجه إلى الخطوة (4). أما إذا كان غير عملي توجه إلى الخطوة (5) وإلا يتم تسجيل الجدول كجدول حل أمثل، قف.
4. استعمل طريقة السمبلكس العادية للجدول الجديد من أجل الوصول إلى جدول الحل الأمثل الجديد، قف.
5. استعمل طريقة السمبلكس للثنائية للجدول الجديد من أجل الوصول إلى جدول الحل الأمثل الجديد، أو قف.

رجوعا إلى دراسة الحالة في الفصل الأول فإن الحل الأمثل المسجل هو:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_2
S_1	0	0	1	$-7/4$	$19/4$	$29/4$
X_1	1	0	0	$-1/4$	$-5/4$	$5/4$
X_2	0	1	0	0	1	3
Z_p	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$64/4$

7–1. تغيرات لها تأثير على العملية:

هناك نوعين من التغيرات التي يمكنها أن تؤثر على العملية للحل الأمثل الحالي:

أ) **تغيرات في الموارد المتاحة:** افترض أنه حدث تغير في النموذج الأصلي في المورد الثاني من 20 إلى 22. من حسابات (الأصلية– الثنائية) أن التغيرات في الموارد المتاحة تؤثر فقط على الجهة اليمنى للجدول الأمثل (عمود الموارد) أي أن التغير يؤثر فقط على العملية.

حساب الجهة اليمنى على أساس التغيير الجديد تتم كالتالي:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix}1\\X_1\\0\end{matrix} = \begin{bmatrix} & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ & 0 & 1\end{bmatrix} \; 28\times 3 \; \begin{bmatrix}22\end{bmatrix} \; \begin{matrix}15/4\\=\\3\end{matrix} \; \begin{bmatrix}7/4\end{bmatrix}$$

كيفية حساب عناصر العمود:

$$1 * 28 - 7/4 * 22 + 19/4 * 3 = 15/4$$
$$0 * 28 + 1/4 * 22 - 5/4 * 3 = 7/4$$
$$0 * 28 + 0 * 22 + 1 * 3 = 3$$

مادامت عناصر الجهة اليمنى بقيت موجبة، المتغيرات الأساسية الحالية تبقى ثابتة ما عدى التغيير الذي يحدث يكون على أساس النتائج الجديدة فقط.

$$s_1 = 15/4$$
$$x_2 = 7/4$$
$$x_3 = 3$$
$$Z_p = 77/4$$

الآن افترض أنه حدث تغير في المورد الثاني والثالث على التوالي من 20 إلى 22 ومن 3 إلى 5

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 5 \begin{bmatrix} 28 \\ 22 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 53/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

التغيرات التي حدثت جعلت الجدول الجديد غير عملي، الآن يمكن اســـتعمال طريقة Simplex للثنائية لإيجاد الحل الجديد.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_3
S_1	0	0	1	$-7/4$	$19/4$	$53/4$
X_1	1	0	0	$+1/4$	$-5/4$	$-3/4$
X_2	0	1	0	0	1	5
Z_p	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$54/4$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_4
S_1	$19/5$	0	1	$-4/5$	0	$52/5$
S_3	$-4/5$	0	0	$+1/5$	0	$3/5$
X_2	$4/5$	1	0	$1/5$	1	$22/5$
Z_p	0	0	0	$3/5$	0	$66/5$

وهذا هو جدول الحل الأمثل حيث:

$$s_1 = 52/5$$
$$s_3 = 3/5$$
$$x_2 = 22/5$$
$$z_p = 66/5$$

ب. إضافة قيد جديد يمكن أن تنتج عنها حالتين:

*) القيد يكون مشـــبع بالحل الحالي أي يحقق الشـــرط أي أن القيد يكون متوفر حيث لا يؤثر على الحل الأمثل.

**) القيد لا يكون مشـــبعًا بالحل الحالي أي لا يحقق الشـــرط أي أنه يكون غير متوفر (نادر) وهنا يتم استعمال طريقة السمبلكس للثنائية.

لإيجاد الحل في الحالة (*) إذا افترضـنا أنه أضـيف قيد جديد للبرنامج الأصـلي (دراسـة الحالة السـابقة) حيث $x_2 \leq 4$. مادام في الحل الأمثل $x_2 = 3$ فهذا يعنى أن القيد يحقق الشرط والحل الحالي لا يتغير.

أما عند الحالة (**) فإذا افترضـــنا أن القيد الجديد كان $x_2 \leq 2$ في هذه الحالة القيد لا يحقق الشـــرط وبالتالي يتم تحويل القيد إلى الصورة المعيارية له وهذا بإضافة متغير أساسي أو إضافي إذا استدعى باستعمال s_4 كمتغير أساسي نجد الشكل المعياري للقيد: $x_2 + s_4 = 2$ حيث: $s_4 \leq 0$

مادام x_2 في الحل الحالي متغير أساسي إذًا يكون لدينا: $x_2 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 3$

$$x_2 = 3 - s_3$$

الأساسية كالتالي:

بالتعويض في القيد السابق المحول إلى الشكل المعياري نجد أن:

$$3 - s_3 + s_4 = 2$$
$$-s_3 + s_4 = -1$$

وعلى أساس هذا التغيير يصبح الجدول كالتالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	T_2
S_1	0	0	1	$-7/4$	$19/4$	0	$53/4$
X_1	1	0	0	$+1/4$	$-5/4$	0	$-3/4$
X_2	0	1	0	0	1	0	5
S_4	0	0	0	0	-1	1	-1
Z_p	0	0	0	$+1/2$	$+1/2$	0	$54/4$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_1	0	0	1	$-7/4$	0	$19/4$	$10/4$
X_1	1	0	0	$+1/4$	0	$-5/4$	$10/4$
X_2	0	1	0	0	0	1	2
S_3	0	0	0	0	1	-1	1
Z_p	0	0	0	$+1/2$	0	$1/2$	11

الجدول يمثل جدول حل أمثل ويكون فيه:

$$x_1 = 10/4$$

$$x_2 = 2$$
$$Z_p = 11$$

2-7. تغييرات لها تأثير على الأمثلية:

هناك حالتين أساسيتين كذلك يمكن أن تؤثر على الأمثلية، للحل الحالي:

1. تغييرات في دالة الهدف: إذا كانت التغيرات تشمل معاملات المتغيرات الأساسية للحل الأمثل الحالي يتم تحديد القيم الجديدة للثنائية ثم تستعمل هذه القيم لحساب عناصر السطر Z_p

أما إذا كان التغير يشمل المتغيرات غير الأساسية فقط، يتم استعمال قيم الثنائية للحل الأمثل الحالي لحساب عناصر السطر Z_p للمتغيرات غير الأساسية فقط، لا تظهر أي تغيرات في الجدول الحالي.

بافتراض أنه حدث تغيير في دالة الهدف للبرنامج الأصلي كالتالي: $Z_p = 3x_1 + 5x_2$

التغيير هنا شمل x_1 و x_2 التي ظهرت كمتغيرات أساسية في الحل الأمثل الحالي، وبالتالي يجب تحديد قيم الثنائية الجديدة:

$0\ ,3/4\ ,5/4$	=	$\begin{matrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$0\ ,3\ \ ,5$	=	u_1, u_2, u_3

كيفية عناصر السطر:

$$(1*0+0*3+0*5),(-7/4*0+1/4*3+0*5),(19/4*0-5/4*3+1*5) = (0,3/4\ ,5/4)$$

إذا قيم كل من: $u_1 = 0\ ,\ u_2 = 3/4\ ,\ u_3 = 5/4$

الآن يتم حساب معاملات Z بأخذ الفرق بين الجهة اليسرى واليمنى لقيود الثنائية، المشاركة مع المتغيرات للأصلية.

$$\text{معامل } x_1:\ 7u_1 + 4u_2 - 3 = 7.0 + 4.3/4 - 3 = 12/4 - 3 = 0$$

$$\text{معامل } x_2:\ 4u_1 + 5u_2 + u_3 - 5 = 20/4 - 5 = 0$$

$$\text{معامل } s_1\ :\ u_1 - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\text{معامل } s_2\ :\ u_2 - 0 = 3/4$$

$$\text{معامل } s_3\ :\ u_3 - 0 = 5/4$$

مادام البرنامج على شكل Max وأن عناصر السطر Z_p أكبر من أو تساوى صفر فإن التغيرات فى المعاملات x_1, x_2 تدل على أنه لم يحدث أي تغير في أمثلية المتغيرات وقيمها.

إذًا التغير الوحيد الذي يحدث هو في قيمة Z_p حيث تصبح:

$$Z_p = 3.5/4 + 5.3 = 15/4 + 15 = 75/4$$

ب) إضافة نشاط جديد أي متغير قراري جديد: إضافة نشاط جديد مكافئ لإحداث تغيرات في دالة الهدف وفي الموارد.

افترض أنه حدث تغيير للبرنامج كالتالي:

$$Max\ Z_p = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

حيث:

$$7x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 28$$
$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 20$$
$$x_2 - x_3 \leq 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

في البداية يتم التحقق مع قيد الثنائية المشارك مع x_3، حيث حسب المتغير الجديد x_3 فإن قيد الثنائية يصبح: $u_1 + 2u_2 - u_3 \geq 2$

مادام x_3 متغير غير أساس في الحل الأمثل الحالي، فيتم استعمال قيم الثنائية للحل الأمثل الحالي، وبالتالي يكون معامل x_3 في الجدول الأمثل الحالي:

$$1.0 + 2.1/2 - 1/2 - 2 = 1 - 1/2 - 2 = 3/2$$

كما يمكن حساب عمود x_3 كالتالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29/4 \\ 7/4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بهذا التغيير والحسابات يصبح الجدول الجديد كالتالي:

	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	T_3
S_1	0	0	$-29/4$	1	$-7/4$	$29/4$	$19/4$
X_1	1	0	$-7/4$	0	$1/4$	$-5/4$	$5/4$
X_2	0	1	-1	0	0	1	3
Z_p	0	0	$-3/2$	0	$1/2$	$1/2$	$64/4$

شرط الأمثلية غير محقق مما يتطلب البحث عن الحل الأمثل الجديد باستعمال طريقة السملكس العادية:

	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	T_4
S_1	$29/7$	0	0	1	$-5/7$	$-1/7$	$97/7$
X_3	$4/7$	0	1	0	$1/7$	$-5/7$	$5/7$
X_2	$4/7$	1	0	0	$1/7$	$2/7$	$26/7$

Z_p	$6/7$	0	0	0	$5/7$	$-4/7$	$88/7$

	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	T_5
S_1	5	$3/2$	0	1	-1	1	$136/7$
X_3	2	$5/2$	1	0	1	0	$70/7$
X_2	2	$7/2$	0	0	$1/2$	1	13
Z_p	$6/2$	2	0	0	1	0	$140/7$

حل أمثل حيث:

$$s_1 = 136/7$$
$$x_3 = 70/7$$
$$s_3 = 13$$
$$Z_p = 130/7$$