Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila
2023-2024

Institut de Mathématiques et Informatique
Département: Mathématiques
Domaine/ Filière: MI / Mathématiques
L3, S6
Matière: **Introduction à la théorie des opérateurs linéaires**

Serie 3: Introduction à la théorie spectrale des opérateurs compacts

Exercice1
Dans cet exercice les espaces seront complexes.

1. Soit $\varphi \in L_2([0,1])$, $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

1 Montrer que la formule

$$(Af)(x) = \varphi(x) \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt,$$

définit une application linéaire continue de $L_2([0,1])$ dans lui même.

2 Montrer que A est auto-adjoint.

3 Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$, que l'on précisera, tel que $A^2 = \lambda A$.

4 Déterminer le rayon spectrale de A en fonction de λ.
Calculer $r(A)$ pour $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$.

Exercice2:
Montrer que si $T \in K(H)$ est auto-adjoint, alors T est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

Exercice3:
Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes non nuls tendant vers 0, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un projecteur orthogonal de rang fini avec $P_m P_n = 0$ si $m \neq n$, alors $\sum \lambda_n P_n$ converge pour la norme d'opérateurs vers un opérateur $T \in K(H)$. Si de plus les λ_n sont réels, montrer que T est auto-adjoint.

Exercice4: (Opérateur de Volterra)
Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose pour $x \in [0,1]$:

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1- Montrer que l'on définit ainsi un opérateur

$$T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]),$$

appelé opérateur de Volterra, et que cet opérateur est compact.

2- Pour toute fonction continue

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

a - Résoudre l'équation différentielle sans second membre

$$F - \lambda F' = 0$$

Utiliser la méthode de variation de la constante; on posera

$$G(x) = \int_0^x g(t) e^{-t/\lambda} dt.$$

b - Résoudre l'équation:

$$F - \lambda F' = g, \text{ avec } F(0) = 0.$$

c - Déduire le spectre de T. Est-ce-que 0 est une valeur propre de T?