برمجة الأعداد الصحيحة:
مشاكل النقل

1. مفهوم مشكلة النقل:

تهدف مشكلة النقل لتحديد عدد الوحدات المنقولة من أيّة بضاعة من مصادر عرضها إلى الأماكن التي تطلبها، بحيث تكون قيمة تكلفة النقل أقل ما يُمكن في حالة كان الهدف هو التدنية، أو تكون قيمة الربح أو العائد المتحقق من عملية النقل في أقصى حده في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويُعتمد على مسائل النقل في حل العديد من المشاكل الإقتصادية، وفي العديد من القطاعات مثل قطاع نقل البضائع. وبالرغم من أنّه يُمكن إستخدام طريقة السمبلكس في حل مشاكل النقل، إلّا أن المواصفات الخاصة التي تتمتع بها مشاكل النقل تُمكّن من إستخدام طرق خاصة أسهل بكثير. وهناك عناصر ينبغي توفرها في مشاكل النقل حتى يُمكن حلها باستخدام طريقة حل مشكلة النقل:

- مواقع التوزيع (مصانع، مستودعات،...)، لكل منها كمية عرض محددة؛
- مواقع الطلب (مراكز تجارية، زبائن،...)، لكل منها كمية طلب محددة؛
- هناك تكلفة (ربح أو عائد) نقل محددة مسبقاً لنقل البضاعة من مواقع التوزيع إلى مواقع الطلب؛
- كمية العرض يجب أن تساوي تماماً كمية الطلب.

2. صياغة مشكلة النقل:

لنفترض أن مؤسسة تملك m وحدة لتوزيع بضاعة معينة، وتقع الوحدات في أماكن متباعدة، حيث:

الوحدة الأولى تقوم بعرض الكمية a_1؛

الوحدة الثانية تقوم بعرض الكمية a_2؛

.
.
.

الوحدة m تقوم بعرض الكمية a_m.

ويُطلق على الوحدات **بالمنابع**.

تقوم المؤسسة من خلال وحداتها بتموين n منطقة بالبضاعة، حيث تقع هذه المناطق في أماكن متباعدة، حيث:

الكمية التي تطلبها المنطقة الأولى هي b_1؛

الكمية التي تطلبها المنطقة الثانية هي b_2؛

.
.
.

الكمية التي تطلبها المنطقة n هي b_n.

ويُطلق على المناطق **بالمصاب**.

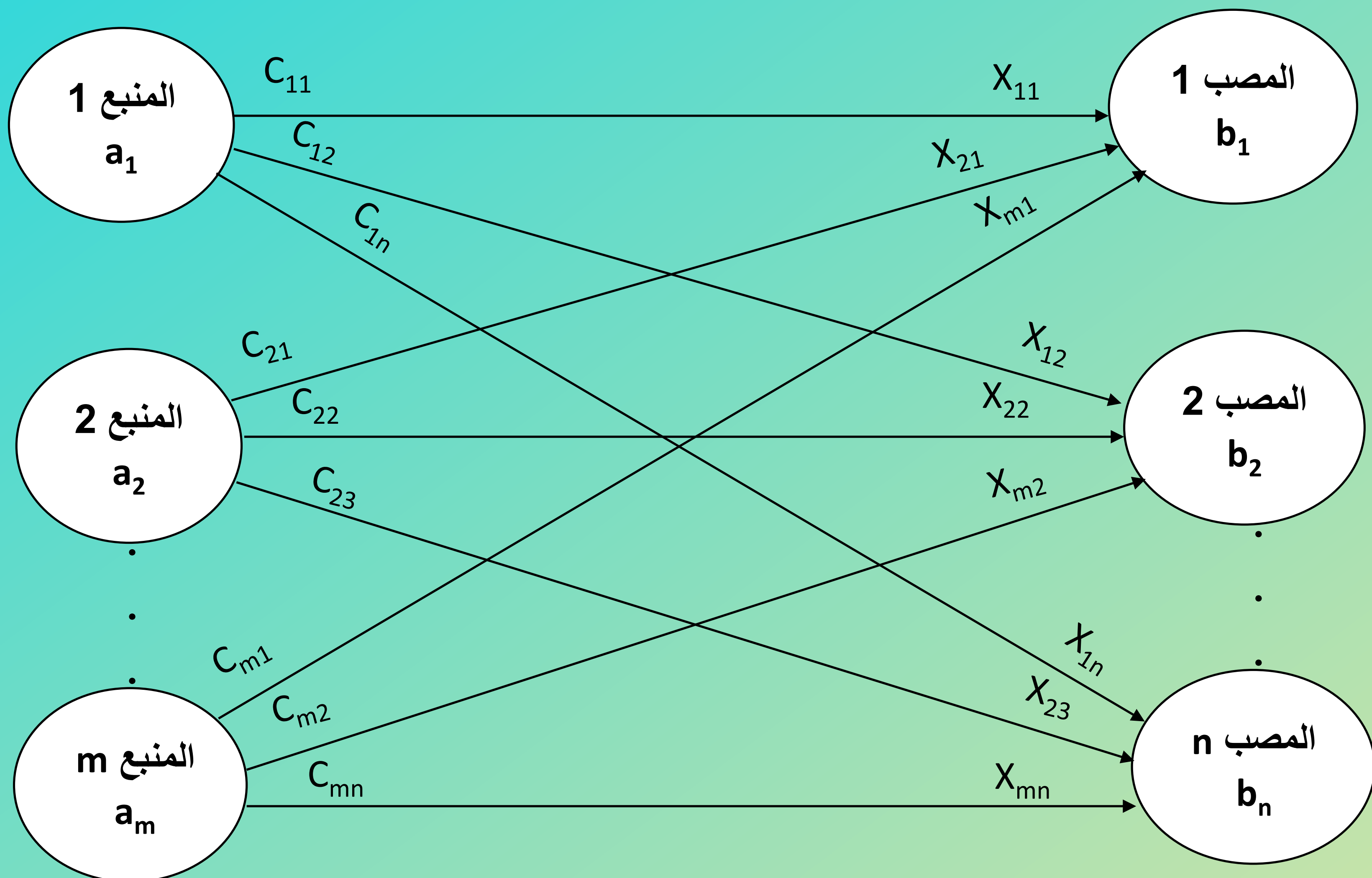
تكلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من الوحدة i إلى المنطقة المراد تموينها j هي C_{ij}.

ويُمكن تمثيل أيّة مشكلة نقل من خلال جدول النقل التالي:

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	. . .	المصب n	الكميات المعروضة
المنبع 1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
المنبع 2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{23}	. . .	C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
المنبع m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	. . .	C_{mn} X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	b_3	. . .	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

وينقسم جدول النقل إلى قسمين: جدول التكاليف وجدول التوزيع. وجدول التكاليف يُظهر التكاليف الوحدوية لنقل البضاعة من المنابع إلى المصاب والمبينة في أعلى كل خانة داخل المربع الصغير، فمثلاً تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 1 إلى المصب 1 هي C_{11} وحدة نقدية، وتكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع m إلى المصب n هي C_{mn} وحدة نقدية، وجدول التوزيع يُظهر الكميات X_{ij} المنقولة من المنابع إلى المصاب وهي موضحة داخل كل خانة. ويكون المطلوب هو تلبية طلب المصاب بالبضاعة من خلال ما تعرضه المنابع بأقل تكلفة كلية ممكنة.

ويُمكن تمثيل مشكلة النقل أيضاً من خلال الشكل التالي:



وينطبق الشرح السابق على مشكلة النقل التي هدفها هو تعظيم الأرباح أو العوائد، ويتم إستبدال فقط تكلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة C_{ij} بالربح أو العائد المتحقق من نقل وحدة واحدة من البضاعة P_{ij}.

أ- الصيغة الرياضية لمشكلة النقل في حالة التدنية:

التكلفة الكلية التي تتحملها المؤسسة من مشكلة النقل هي:

$$Min\, Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

الكمية التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad {\scriptstyle i=1,2,\ldots\ldots,m}$$

حيث m هو عدد المنابع.

الكمية التي يطلبها كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad {\scriptstyle j=1,2,\ldots\ldots,n}$$

حيث n هو عدد المصاب.

وتُكتب الصيغة الرياضية لمشكلة النقل في حالة التدنية كما يلي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i & i=1,2,\ldots\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j & j=1,2,\ldots\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & \\ X_{ij} \geq 0 & \\ C_{ij} \geq 0 & \end{cases}$$

والمطلوب هو إيجاد القيم X_{ij} التي من شأنها تخفيض التكاليف الكلية إلى أدنى حد.

ب- الصيغة الرياضية لمشكلة النقل في حالة التعظيم:

الربح أو العائد الكلي الذي تحققه المؤسسة من مشكلة النقل هو:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

الكمية التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\ldots\ldots,m$$

حيث m هو عدد المنابع.

الكمية التي يطلبها كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n$$

حيث n هو عدد المصاب.

وتُكتب الصيغة رياضية لمشكلة النقل في حالة التعظيم كما يلي:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i & i=1,2,\dots\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j & j=1,2,\dots\dots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ X_{ij} \geq 0 \\ P_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

والمطلوب هو إيجاد القيم X_{ij} التي من شأنها الوصول بالربح أو العائد إلى أقصى حد.

مثال 1:

تقوم إحدى المؤسسات المختصة في تعبئة وتوزيع المياه المعدنية بتموين 3 مناطق متباعدة بهذه المادة من خلال وحداتها الثلاثة المتواجدة في أماكن متباعدة أيضا. طاقة العرض لكل وحدة من وحدات المؤسسة من المياه المعدنية هي 55 وحدة، 45 وحدة و20 وحدة على التوالي. أما ما تطلبه كل منطقة من المياه المعدنية التي تسوقها هذه المؤسسة فهي 40 وحدة، 30 وحدة و50 وحدة على التوالي (الوحدة من المياه المعدنية: 1000 قارورة).

تكلفة نقل كل وحدة من المياه المعدنية من كل وحدة من الوحدات التي تتكون منها المؤسسة إلى كل منطقة موضحة في الجدول التالي (وحدة نقدية):

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3
الوحدة 1	1	4	5
الوحدة 2	5	7	3
الوحدة 3	10	8	9

المطلوب: اكتب جدول مسألة النقل؟

الحل:

يُكتب جدول مسألة النقل كما يلي:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	1 X_{11}	4 X_{12}	5 X_{13}	55
الوحدة 2	5 X_{21}	7 X_{22}	3 X_{23}	45
الوحدة 3	10 X_{31}	8 X_{32}	9 X_{33}	20
الطلب	40	30	50	**120** / **120**

ويُلاحظ توفر شرط تساوي الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة.

مثال 2:

تقوم إحدى المؤسسات المختصة في إنتاج وتوزيع مادة الزيت بتموين 3 مناطق متباعدة بهذه المادة من خلال وحداتها الثلاثة المتواجدة في أماكن متباعدة أيضا. طاقة عرض كل وحدة من مادة الزيت هي 200 وحدة، 150 وحدة و250 وحدة على التوالي، أما حجم ما تطلبه كل منطقة فهو 280 وحدة، 220 وحدة و100 وحدة على التوالي. (الوحدة من مادة الزيت = 100 قارورة ذات سعة 2 لتر)

الربح المتحقق من نقل كل وحدة من مادة الزيت من كل وحدة من الوحدات التي تتكون منها المؤسسة إلى كل منطقة موضحة في الجدول التالي (وحدة نقدية):

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3
الوحدة 1	7	3	1
الوحدة 2	5	6	9
الوحدة 3	4	5	2

المطلوب: اكتب جدول مسألة النقل؟

الحل:

يُكتب جدول مسألة النقل كما يلي:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	7 X_{11}	3 X_{12}	1 X_{13}	200
الوحدة 2	5 X_{21}	6 X_{22}	9 X_{23}	150
الوحدة 3	4 X_{31}	5 X_{32}	2 X_{33}	250
الطلب	280	220	100	600 / 600

ويُلاحظ توفر شرط تساوي الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة.

3. حل مشاكل النقل:

تمر عملية حل مشاكل النقل بمرحلتين هما:

- مرحلة البحث عن الحل الأساسي الأول؛
- مرحلة إختبار الحل وسيرورة تحسينه.

المرحلة الأولى: البحث عن الحل الأساسي الأول:

هناك عدة طرق تُستخدم للبحث عن الحل الأساسي الأول، وسيتم تناول 3 طرق:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- طريقة أدنى تكلفة في حالة التدنية أو أعلى ربح أو عائد في حالة التعظيم؛
- طريقة فوقل التقريبية؛

الطريقة الأولى: طريقة الزاوية الشمالية الغربية

يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، ويتم إيجاد الحل الأساسي الأول بهذه الطريقة حسب الخطوات التالية:

- تحديد الزاوية الشمالية الغربية في المصفوفة غير المشبعة؛
- وضع أكبر كمية ممكنة في هذه الخلية مع إحترام قيود العرض والطلب؛
- إشباع كل خلايا الصف أو العمود الذي تنتمي إليه الخلية التي تم إشباعها في الخطوة السابقة؛
- تكرار الخطوات من 1 إلى 3 حتى يتم إشباع كل الخلايا.

من المثال رقم 1 أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	40 $\boxed{1}$	15 $\boxed{4}$	0 $\boxed{5}$	55
الوحدة 2	0 $\boxed{5}$	15 $\boxed{7}$	30 $\boxed{3}$	45
الوحدة 3	0 $\boxed{10}$	0 $\boxed{8}$	20 $\boxed{9}$	20
الطلب	40	30	50	120

$\text{Min } Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (15 \times 7) + (30 \times 3) + (20 \times 9) = 475$ وحدة نقدية

من المثال رقم 2 أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	**200**
الوحدة 2	80 $\boxed{5}$	70 $\boxed{6}$	0 $\boxed{9}$	**150**
الوحدة 3	0 $\boxed{4}$	150 $\boxed{5}$	100 $\boxed{2}$	**250**
الطلب	**280**	**220**	**100**	**600**

$$\text{Max } Z = (200 \times 7) + (80 \times 5) + (70 \times 6) + (150 \times 5) + (100 \times 2) = 3170$$ وحدة نقدية

الطريقة الثانية: **طريقة أدنى تكلفة في حالة التدنية أو أعلى ربح أو عائد في حالة التعظيم**

حسب هذه الطريقة فإنه يتم الحصول على الحل الأساسي الأول بإتباع الخطوات التالية:

- تحديد الخلية التي تحتوي على أدنى تكلفة وحدوية في حالة التدنية أو أعلى ربح أو عائد وحدوي في حالة التعظيم في المصفوفة غير المشبعة؛
- وضع أكبر كمية ممكنة في هذه الخلية مع إحترام قيود العرض والطلب؛
- إشباع كل خلايا الصف أو العمود الذي تنتمي إليه الخلية التي تم إشباعها في الخطوة السابقة؛
- تكرار الخطوات من 1 إلى 3 حتى يتم إشباع كل الخلايا.

ملاحظة: في الخطوة رقم 1 إذا تساوت أدنى تكلفتين وحدويتين أو أكثر أو تساوى أكبر ربحين أو عائدين وحدويين أو أكثر فإن الأولية تكون للخلية التي يُمكن أن نضع فيها أكبر كمية.

من المثال رقم 1 أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة أدنى تكلفة؟

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	40 $\boxed{1}$	15 $\boxed{4}$	0 $\boxed{5}$	55
الوحدة 2	0 $\boxed{5}$	0 $\boxed{7}$	45 $\boxed{3}$	45
الوحدة 3	0 $\boxed{10}$	15 $\boxed{8}$	5 $\boxed{9}$	20
الطلب	40	30	50	120

$\text{Min } Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (45 \times 3) + (15 \times 8) + (5 \times 9) = 400$ وحدة نقدية

من المثال رقم 2 أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة أعلى ربح؟

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	200
الوحدة 2	0 $\boxed{5}$	50 $\boxed{6}$	100 $\boxed{9}$	150
الوحدة 3	80 $\boxed{4}$	170 $\boxed{5}$	0 $\boxed{2}$	250
الطلب	280	220	100	600

$$\text{Max } Z = (200 \times 7) + (50 \times 6) + (100 \times 9) + (80 \times 4) + (170 \times 5) = 3770$$ وحدة نقدية

الطريقة الثالثة: طريقة فوقل التقريبية (Vogel`s Approximation Method) :

وتُسمى أيضاً بطريقة الجزاء. وهذه الطريقة أفضل من الطريقتين السابقتين وكثيراً ما تؤدي إلى الحل الأمثل أو قريباً منه. وحسب هذه الطريقة فإنه يتم الحصول على الحل الأساسي الأول بإتباع الخطوات التالية:

- حساب الفرق بين أدنى تكلفتين في حالة التدنية أو أعلى ربحين أو عائدين في حالة التعظيم عموديا وسطريا وهذا في المصفوفة غير المشبعة؛

- تحديد السطر أو العمود المقابل لأكبر فرق من بين الفروقات المتحصل عليها من الخطوة السابقة، ثم نبحث في هذا السطر أو العمود على أقل تكلفة وحدوية في حالة التدنية أو أعلى ربح أو عائد وحدوي في حالة التعظيم، والخلية التي تحتوي على هذه التكلفة الوحدوية أو الربح أو العائد الوحدوي نضع فيها أكبر كمية فيها مع إحترام قيود العرض والطلب؛

- إشباع كل خلايا الصف أو العمود الذي تنتمي إليه الخلية التي تم إشباعها في الخطوة السابقة؛

- تكرار الخطوات من 1 إلى 3 حتى يتم إشباع كل الخلايا.

ملاحظة:

عند تساوي أكبر فرقين أو أكثر فإننا نقارن بين التكاليف الوحدوية الدنيا أوالأرباح أو العوائد الوحدوية العظمى في الأسطر والأعمدة المقابلة لهذه الفروقات ونختار أقل تكلفة وحدوية أو أكبر عائد أو ربح وحدوي ونضع في الخلية التي تحتوي على هذه التكلفة الوحدوية أو الربح أو العائد الوحدوي أكبر كمية إحتراماً لقيود العرض والطلب، وفي حالة تساوي أقل تكلفتين وحدويتين أو أكثر أو تساوي أعظم ربحين أو عائدين وحدويين أو أكثر فإن الأولوية تكون للخلية التي يُمكن وضع فيها أكبر كمية.

من المثال رقم 1 أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة فوقل التقريبية؟

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3
الوحدة 1	40 [1]	15 [4]	0 [5]	55	3	1	1
الوحدة 2	0 [5]	0 [7]	45 [3]	45	2	4	-
الوحدة 3	0 [10]	15 [8]	5 [9]	20	1	1	1
الطلب	40	30	50	120			
الفرق 1	4	3	2				
الفرق 2	-	3	2				
الفرق 3	-	4	4				

$$\text{Min } Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (45 \times 3) + (15 \times 8) + (5 \times 9) = 400$$ وحدة نقدية

من المثال رقم 2 أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة فوقل التقريبية؟

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3
الوحدة 1	200 $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	200	4	4	-
الوحدة 2	0 $\boxed{5}$	50 $\boxed{6}$	100 $\boxed{9}$	150	3	1	1
الوحدة 3	80 $\boxed{4}$	170 $\boxed{5}$	0 $\boxed{2}$	250	1	1	1
الطلب	280	220	100	600			
الفرق 1	2	1	7				
الفرق 2	2	1	-				
الفرق 3	1	1	-				

Max $Z = (200 \times 7) + (50 \times 6) + (100 \times 9) + (80 \times 4) + (170 \times 5) = 3770$ وحدة نقدية

<u>ملاحظة</u> :

عند إيجاد الحل الأساسي الأول بأي طريقة من الطرق السابقة لابد أن يكون عدد الخلايا المشغولة مساويا إلى $(m+n)-1$.

المرحلة الثانية: مرحلة إختبار الحلول الأساسية وتحسينها.

نتناول هنا طريقتين تُستخدمان لإختبار أمثلية الحلول الأساسية وتحسينها: طريقة التخطي Stepping-stone وطريقة التوزيع المعدل MODI

طريقة التخطي Stepping-stone:

ويُطلق عليها أيضاً بطريقة المسار المتعرج، القفز على الصخور، ... وفكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا غير المشغولة والتي يمكنها أن تقلل التكلفة الكلية في حالة التدنية أو زيادة الربح أو العائد الكلي في حالة التعظيم وهذا في حالة إدخالها إلى الحل الأساسي، لذا ينبغي إختبار الخلايا غير المشغولة إذا ما كان تمرير أي وحدة عبرها يؤدي إلى خفض التكاليف أو زيادة الأرباح أو العوائد. ويتم تطبيق هذه الطريقة من خلال الخطوات التالية:

- **رسم مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة:** يبدأ المسار من الخلية غير المشغولة قيد الإختبار وينتهي عندها مروراً بخلايا داخلة في الأساس عن طريق خطوط أفقية وعمودية مشكلة عدة زوايا قائمة، حيث تقع كل خلية من خلايا المسار عند كل زاوية. ويبدأ تشكيل المسار بإضافة وحدة واحدة داخل الخلية قيد الإختبار، ومن أجل المحافظة على التوازن في العرض والطلب ينبغي طرح وإضافة وحدة واحدة في الخلايا المناسبة في الصفوف والأعمدة حسب الحاجة حتى يتشكل المسار المغلق.
- **حساب قيم صافي التغير في التكلفة أو الربح أو العائد:** يتم حساب قيم صافي التغير في التكلفة في حالة التدنية أو قيم صافي التغير في الربح أو العائد في حالة التعظيم لكل خلية غير مشغولة من خلال جمع وطرح التكاليف الوحدوية أو الأرباح أو العوائد الوحدوية حسب إشارة كل زاوية من زوايا المسار المغلق، والقيم المتحصل عليها تشير إلى التغير في التكلفة الكلية أو الربح أو العائد الكلي نتيجة مرور وحدة واحدة على الخلية غير المشغولة.
- **الأمثلية:** يكون الحل أمثلاً عندما تكون جميع قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة أكبر من أو تساوي الصفر في حالة التدنية، وجميع قيم صافي التغير في الربح أو العائد للخلايا غير المشغولة أقل من أو تساوي الصفر في حالة التعظيم.

كتابة جدول الحل الأساسي الموالي: في حالة الحل غير أمثل يتم كتابة جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

- تحديد الخلية التي تدخل إلى الحل الأساسي:

- في حالة التدنية: الخلية غير المشغولة المقابلة لأصغر صافي تغير سالب في التكلفة.

- في حالة التعظيم: الخلية غير المشغولة المقابلة لأكبر صافي تغير موجب في الربح أو العائد.

- على المسار المغلق للخلية التي تدخل إلى الحل الأساسي يتم تحديد أصغر قيمة من بين القيم الموجودة في الخلايا التي تقع عند الزوايا السالبة للمسار، والخلية التي تنتمي إليها هذه القيمة هي الخلية التي تخرج من الحل الأساسي؛

- طرح القيمة الصغرى المحددة في الخطوة السابقة من الخلايا التي تقع في الزوايا السالبة للمسار وإضافتها إلى الخلايا التي تقع في الزوايا الموجبة للمسار.

بعد كتابة الحل الأساسي الموالي، يتم تكرار تطبيق خطوات طريقة التخطي حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

من المثال رقم 1 وإنطلاقا من الحل الأساسي الأول المتحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أوجد الحل الأمثل بطريقة التخطي.

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	40 $\boxed{1}$	15 $\boxed{4}$	0 $\boxed{5}$	55
الوحدة 2	0 $\boxed{5}$	15 $\boxed{7}$	30 $\boxed{3}$	45
الوحدة 3	0 $\boxed{10}$	0 $\boxed{8}$	20 $\boxed{9}$	20
الطلب	40	30	50	120

$\text{Min } Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (15 \times 7) + (30 \times 3) + (20 \times 9) = 475$ وحدة نقدية

حساب قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{13} = 5 - 3 + 7 - 4 = 5$$

$$\sigma_{21} = 5 - 1 + 4 - 7 = 1$$

$$\sigma_{31} = 10 - 1 + 4 - 7 + 3 - 9 = 0$$

$$\sigma_{32} = 8 - 7 + 3 - 9 = -5$$

الحل الأساسى الثانى:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	40 [1]	15 [4]	0 [5]	55
الوحدة 2	0 [5]	0 [7]	45 [3]	45
الوحدة 3	0 [10]	15 [8]	5 [9]	20
الطلب	40	30	50	120

$\text{Min } Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (45 \times 3) + (15 \times 8) + (5 \times 9) = 400$ وحدة نقدية

حساب قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{13} = 5 - 9 + 8 - 4 = 0$$

$$\sigma_{21} = 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = 6$$

$$\sigma_{22} = 7 - 8 + 9 - 3 = 5$$

$$\sigma_{31} = 10 - 1 + 4 - 8 = 5$$

بما أنه لم يعد هناك قيم سالبة لصافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة فإن الحل الاساسي الثاني هو الحل الأمثل.

من المثال رقم 2 وانطلاقا من الحل الأساسي الأول المتحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أوجد الحل الأمثل بطريقة التخطي.

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 [7]	0 [3]	0 [1]	200
الوحدة 2	80 [5]	70 [6]	0 [9]	150
الوحدة 3	0 [4]	150 [5]	100 [2]	250
الطلب	280	220	100	600

Max $Z = (200 \times 7) + (80 \times 5) + (70 \times 6) + (150 \times 5) + (100 \times 2) = 3170$ وحدة نقدية

حساب قيم صافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{12} = 3 - 7 + 5 - 6 = -5$$

$$\sigma_{13} = 1 - 2 + 5 - 6 + 5 - 7 = -4$$

$$\sigma_{23} = 9 - 2 + 5 - 6 = 6$$

$$\sigma_{31} = 4 - 5 + 6 - 5 = 0$$

الحل الأساسى الثانى:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	200
الوحدة 2	80 $\boxed{5}$	0 $\boxed{6}$	70 $\boxed{9}$	150
الوحدة 3	0 $\boxed{4}$	220 $\boxed{5}$	30 $\boxed{2}$	250
الطلب	280	220	100	600

Max $Z = (200 \times 7) + (80 \times 5) + (70 \times 9) + (250 \times 5) + (30 \times 2) = 3740$ وحدة نقدية

حساب قيم صافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{12} = 3 - 7 + 5 - 9 + 2 - 5 = -11$$

$$\sigma_{13} = 1 - 9 + 5 - 7 = -10$$

$$\sigma_{22} = 6 - 9 + 2 - 5 = -6$$

$$\sigma_{31} = 4 - 5 + 9 - 2 = 6$$

الحل الأساسي الثالث:

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	200
الوحدة 2	50 $\boxed{5}$	0 $\boxed{6}$	100 $\boxed{9}$	150
الوحدة 3	30 $\boxed{4}$	220 $\boxed{5}$	0 $\boxed{2}$	250
الطلب	280	220	100	600

$\text{Max } Z = (200 \times 7) + (50 \times 5) + (100 \times 9) + (30 \times 4) + (220 \times 5) = 3770$ وحدة نقدية

حساب قيم صافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{12} = 3 - 5 + 4 - 7 = -5$$

$$\sigma_{13} = 1 - 9 + 5 - 7 = -10$$

$$\sigma_{22} = 6 - 5 + 4 - 5 = 0$$

$$\sigma_{33} = 2 - 4 + 5 - 9 = -6$$

بما أنه لم يعد هناك قيم موجبة لصافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة فإن الحل الاساسي الثالث هو الحل الأمثل.

طريقة التوزيع المعدل MODI:

ويُطلق عليها أيضاً بطريقة عوامل الضرب، ولا تختلف هذه الطريقة في النهاية عن طريقة التخطي، إنما الإختلاف يكمن فقط في المنهجية حيث أن طريقة التوزيع المعدل تعتمد على إفتراض وجود مجهولين U_i يعبّر عن الأسطر و V_j يعبّر عن الأعمدة وحاصل جمعهما بالنسبة للخلايا المشغولة يساوي تكلفة النقل الوحدوية (الربح أو العائد الوحدوي) من المنبع i إلى المصب j، ويتم التعبير عن ما سبق حسب العلاقة التالية:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

الخطوة الأولى في تطبيق الطريقة تتمثل في إيجاد قيم U_i و V_j للخلايا المشغولة مع إفتراض أولاً قيمة لإحدى قيم U_i أو V_j والتي يُفضل أن تكون قريبة من التكاليف (الأرباح أو العوائد) الوحدوية، ثم بعد ذلك يتم إيجاد قيم صافي التغير في التكلفة (الربح أو العائد) للخلايا غير المشغولة عن طريق العلاقة التالية:

في حالة التدنية $$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

في حالة التعظيم $$\sigma_{ij} = P_{ij} - U_i - V_j$$

حيث أن ij هو ترتيب الخلية غير المشغولة.

- **الأمثلية:** يكون الحل أمثلاً عندما تكون جميع قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة أكبر من أو تساوي الصفر في حالة التدنية، وجميع قيم صافي التغير في الربح أو العائد للخلايا غير المشغولة أقل من أو تساوي الصفر في حالة التعظيم.

كتابة جدول الحل الأساسي الموالي: في حالة الحل غير أمثل يتم كتابة جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

- تحديد الخلية التي تدخل إلى الحل الأساسي:

- في حالة التدنية: الخلية غير المشغولة المقابلة لأصغر صافي تغير سالب في التكلفة.

- في حالة التعظيم: الخلية غير المشغولة المقابلة لأكبر صافي تغير موجب في الربح أو العائد.

- على المسار المغلق للخلية التي تدخل إلى الحل الأساسي يتم تحديد أصغر قيمة من بين القيم الموجودة في الخلايا التي تقع عند الزوايا السالبة للمسار، والخلية التي تنتمي إليها هذه القيمة هي الخلية التي تخرج من الحل الأساسي؛

- طرح القيمة الصغرى المحددة في الخطوة السابقة من الخلايا التي تقع في الزوايا السالبة للمسار وإضافتها إلى الخلايا التي تقع في الزوايا الموجبة للمسار.

بعد كتابة الحل الأساسي الموالي، يتم تكرار تطبيق خطوات طريقة التخطي حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

من المثال رقم 1 وانطلاقا من الحل الأساسي الأول المتحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أوجد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل.

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	40 $\boxed{1}$	15 $\boxed{4}$	0 $\boxed{5}$	55
الوحدة 2	0 $\boxed{5}$	15 $\boxed{7}$	30 $\boxed{3}$	45
الوحدة 3	0 $\boxed{10}$	0 $\boxed{8}$	20 $\boxed{9}$	20
الطلب	40	30	50	120

$\text{Min } Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (15 \times 7) + (30 \times 3) + (20 \times 9) = 475$ وحدة نقدية

إيجاد قيم U_i و V_j للخلايا الداخلة في الأساس باستخدام العلاقة التالية: $U_i + V_j = C_{ij}$

نفترض أن U_1 تساوي صفر.

$$U_1 + V_1 = C_{11} \Rightarrow 0 + V_1 = 1 \Rightarrow V_1 = 1$$

$$U_1 + V_2 = C_{12} \Rightarrow 0 + V_2 = 4 \Rightarrow V_2 = 4$$

$$U_2 + V_2 = C_{22} \Rightarrow U_2 + 4 = 7 \Rightarrow U_2 = 3$$

$$U_2 + V_3 = C_{23} \Rightarrow 3 + V_3 = 3 \Rightarrow V_3 = 0$$

$$U_3 + V_3 = C_{33} \Rightarrow U_3 + 0 = 9 \Rightarrow U_3 = 9$$

الآن يتم إيجاد قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة باستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\sigma_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 5 - 0 - 0 = 5$$

$$\sigma_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 5 - 3 - 1 = 1$$

$$\sigma_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 10 - 9 - 1 = 0$$

$$\sigma_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 8 - 9 - 4 = -5$$

جدول الحل الأساسى الثانى:

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	40 [1]	15 [4]	0 [5]	55
الوحدة 2	0 [5]	0 [7]	45 [3]	45
الوحدة 3	0 [10]	15 [8]	5 [9]	20
الطلب	40	30	50	120

Min $Z = (40 \times 1) + (15 \times 4) + (45 \times 3) + (15 \times 8) + (5 \times 9) = 400$ وحدة نقدية

نفترض أن U_1 تساوي صفر.

$$U_1 + V_1 = C_{11} \Rightarrow 0 + V_1 = 1 \Rightarrow V_1 = 1$$

$$U_1 + V_2 = C_{12} \Rightarrow 0 + V_2 = 4 \Rightarrow V_2 = 4$$

$$U_3 + V_2 = C_{32} \Rightarrow U_3 + 4 = 8 \Rightarrow U_3 = 4$$

$$U_3 + V_3 = C_{33} \Rightarrow 4 + V_3 = 9 \Rightarrow V_3 = 5$$

$$U_2 + V_3 = C_{23} \Rightarrow U_2 + 5 = 3 \Rightarrow U_2 = -2$$

إيجاد قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$\sigma_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 5 - (-2) - 1 = 6$$

$$\sigma_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 7 - (-2) - 4 = 5$$

$$\sigma_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 10 - 4 - 1 = 5$$

بما أنه لم يعد هناك قيم سالبة لصافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغولة فإن الحل الأساسي الثاني هو الحل الامثل.

من المثال رقم 2 وإنطلاقا من الحل الأساسي الأول المتحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أوجد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل.

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 [7]	0 [3]	0 [1]	200
الوحدة 2	80 [5]	70 [6]	0 [9]	150
الوحدة 3	0 [4]	150 [5]	100 [2]	250
الطلب	280	220	100	600

Max $Z = (200 \times 7) + (80 \times 5) + (70 \times 6) + (150 \times 5) + (100 \times 2) = 3170$ وحدة نقدية

إيجاد قيم U_i و V_j للخلايا الداخلة في الأساس باستخدام العلاقة التالية: $U_i + V_j = P_{ij}$

نفترض أن U_1 تساوي صفر.

$$U_1 + V_1 = P_{11} \Rightarrow 0 + V_1 = 7 \Rightarrow V_1 = 7$$

$$U_2 + V_1 = P_{21} \Rightarrow U_2 + 7 = 5 \Rightarrow U_2 = -2$$

$$U_2 + V_2 = P_{22} \Rightarrow (-2) + V_2 = 6 \Rightarrow V_2 = 8$$

$$U_3 + V_2 = P_{32} \Rightarrow U_3 + 8 = 5 \Rightarrow U_3 = -3$$

$$U_3 + V_3 = P_{33} \Rightarrow (-3) \ + V_3 = 2 \Rightarrow V_3 = 5$$

إيجاد قيم صافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة باستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_{ij} = P_{ij} - U_i - V_j$$

$$\sigma_{12} = P_{12} - U_1 - V_2 = 3 - 0 - 8 = -5$$

$$\sigma_{13} = P_{13} - U_1 - V_3 = 1 - 0 - 5 = -4$$

$$\sigma_{23} = P_{23} - U_2 - V_3 = 9 - (-2) - 5 = 6$$

$$\sigma_{31} = P_{31} - U_3 - V_1 = 4 - (-3) - 7 = 0$$

جدول الحل الأساسي رقم 2:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 [7]	0 [3]	0 [1]	200
الوحدة 2	80 [5]	0 [6]	70 [9]	150
الوحدة 3	0 [4]	220 [5]	30 [2]	250
الطلب	280	220	100	600

$\text{Max } Z = (200 \times 7) + (80 \times 5) + (70 \times 9) + (250 \times 5) + (30 \times 2) = 3740$ وحدة نقدية

نفترض أن U_1 تساوي صفر

$$U_1 + V_1 = P_{11} \Rightarrow 0 + V_1 = 7 \Rightarrow V_1 = 7$$

$$U_2 + V_1 = P_{21} \Rightarrow U_2 + 7 = 5 \Rightarrow U_2 = -2$$

$$U_2 + V_3 = P_{23} \Rightarrow (-2) + V_3 = 9 \Rightarrow V_3 = 11$$

$$U_3 + V_3 = P_{33} \Rightarrow U_3 + 11 = 2 \Rightarrow U_3 = -9$$

$$U_3 + V_2 = P_{32} \Rightarrow (-9) + V_2 = 5 \Rightarrow V_2 = 14$$

إيجاد قيم صافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{12} = P_{12} - U_1 - V_2 = 3 - 0 - 14 = -11$$

$$\sigma_{13} = P_{13} - U_1 - V_3 = 1 - 0 - 11 = -10$$

$$\sigma_{22} = P_{22} - U_2 - V_2 = 6 - (-2) - 14 = -6$$

$$\sigma_{31} = P_{31} - U_3 - V_1 = 4 - (-9) - 7 = 6$$

جدول الحل الأساسي رقم 3:

الوحدات \ المناطق	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	العرض
الوحدة 1	200 $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	0 $\boxed{1}$	200
الوحدة 2	50 $\boxed{5}$	0 $\boxed{6}$	100 $\boxed{9}$	150
الوحدة 3	30 $\boxed{4}$	220 $\boxed{5}$	0 $\boxed{2}$	250
الطلب	280	220	100	600

Max $Z = (200 \times 7) + (50 \times 5) + (100 \times 9) + (30 \times 4) + (220 \times 5) = 3770$ وحدة نقدية

نفترض أن U_1 تساوي صفر

$$U_1 + V_1 = P_{11} \Rightarrow 0 + V_1 = 7 \Rightarrow V_1 = 7$$

$$U_2 + V_1 = P_{21} \Rightarrow U_2 + 7 = 5 \Rightarrow U_2 = -2$$

$$U_2 + V_3 = P_{23} \Rightarrow (-2) + V_3 = 9 \Rightarrow V_3 = 11$$

$$U_3 + V_1 = P_{31} \Rightarrow U_3 + 7 = 4 \Rightarrow U_3 = -3$$

$$U_3 + V_2 = P_{32} \Rightarrow (-3) + V_2 = 5 \Rightarrow V_2 = 8$$

إيجاد قيم صافي التغير في الربح للخلايا غير المشغولة:

$$\sigma_{12} = P_{12} - U_1 - V_2 = 3 - 0 - 8 = -5$$

$$\sigma_{13} = P_{13} - U_1 - V_3 = 1 - 0 - 11 = -10$$

$$\sigma_{22} = P_{22} - U_2 - V_2 = 6 - (-2) - 8 = 0$$

$$\sigma_{33} = P_{33} - U_3 - V_3 = 2 - (-3) - 11 = -6$$

حـــــالات خاصــــة: عند حل مشاكل النقل تصادفنا أحيانا بعض الحالات غير الإعتيادية.

1- حالة عدم تساوي العرض والطلب:

1-1- حالة العرض أكبر من الطلب: يتم إضافة مصب وهمي إلى جدول المسألة، حيث يُفترض أن كمية الطلب لهذا المصب هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، وتكاليف النقل الوحدوية (الأرباح أو العوائد الوحدوية) من أي منبع إلى هذا المصب يُفترض أن تكون قيمها معدومة.

مثال:

جدول مسألة النقل الأولي:

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	العرض
المنبع 1	9	6	7	60
المنبع 2	2	5	4	80
المنبع 3	2	1	3	100
الطلب	50	60	90	240 / 200

جدول مسألة النقل الجديد:

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	المصب 4	العرض
المنبع 1	9	6	7	0	60
المنبع 2	2	5	4	0	80
المنبع 3	2	1	3	0	100
الطلب	50	60	90	40	240

1-2- حالة الطلب أكبر من العرض: يتم إضافة منبع وهمي إلى جدول المسألة، حيث يُفترض أن كمية العرض لهذا المنبع هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، وتكاليف النقل الوحدوية (الأرباح أو العوائد الوحدوية) من هذا المنبع إلى المصاب يُفترض أن تكون قيمها معدومة.

مثال:

جدول مسألة النقل الأولي:

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	العرض
المنبع 1	5	3	2	30
المنبع 2	4	1	5	60
المنبع 3	9	7	4	55
الطلب	50	90	40	145 180

جدول مسألة النقل الجديد:

مصب / منبع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	العرض
المنبع 1	5	3	2	30
المنبع 2	4	1	5	60
المنبع 3	9	7	4	55
المنبع 4	0	0	0	35
الطلب	50	90	40	180

بعد إضافة المصب أو المنبع الوهميين، يتم إيجاد الحل الأمثل كما تم شرحه سابقاً، وعند الوصول إلى هذا الحل يتم إهمال المصب أو المنبع الوهميين.

2- حالة التفكك:

تحدث هذه الحالة عندما يكون عدد المتغيرات الداخلة في الأساس أقل من m+n-1، وتحدث بسبب الوقوع في حالة إشباع خلايا الصف والعمود في نفس الوقت، وهنا يتم إما إشباع خلايا الصف ووضع قيمة تساوي ε (قيمة موجبة صغيرة جدا) في إحدى خلايا العمود، أو إشباع خلايا العمود ووضع قيمة تساوي ε في إحدى خلايا الصف، ثم يتم البحث عن الحل الأمثل، وعندما يتم الوصول إلى هذا الحل يتم إهمال القيمة ε. ويُمكن في الحل الأساسي الواحد أن نجد أكثر من حالة إشباع الصف والعمود في نفس الوقت، كما أن حالة التفكك يُمكن الوقوع فيها في أي حل أساسي.

مثال: أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	العرض
المنبع 1	40 $\boxed{8}$	40 $\boxed{5}$	0 $\boxed{6}$	80
المنبع 2	0 $\boxed{6}$	70 $\boxed{4}$	ε $\boxed{1}$	70
المنبع 3	0 $\boxed{5}$	0 $\boxed{3}$	50 $\boxed{7}$	50
الطلب	40	110	50	200

3- حالة تعدد خطط النقل المثلى:

عند حساب قيم صافي التغير في التكلفة (الربح أو العائد) والتأكد من أن الحل الأساسي قيد الإختبار هو حل أمثل، وأن إحدى هذه القيم أو أكثر معدومة فهذا يعني أننا أمام حالة تعدد الحلول المثلى، حيث أن إدخال الخلية غير المشغولة التي قيمة صافي التغير في التكلفة لها معدومة إلى الأساس سينتج خطة نقل مثلى أخرى بدون أن تتغير القيمة الكلية للتكلفة (الربح أو العائد). وهذه الحالة يُمكن أن تفيد إدارة المؤسسة بإتاحة لها مرونة أكبر في إختيار طريقة التوزيع من المنابع إلى المصاب.