المحور السابع:

التحليل العاملي (Factor Analysis)

مدخل

يوصف التحليل العاملي: بأنه العملية التي يتم فيها تلخيص مجموعة كبيرة نسبيا من المتغيرات المترابطة، بأقل عدد ممكن من المتغيرات الكبيرة غير المترابطة. إن عملية تجميع عدد من المتغيرات المرتبطة في متغير واحد أكبر هو فعليا ما يقوم به التحليل العاملي، وتسمى المتغيرات الأكبر بالعوامل لتمييزها عن المتغيرات العادية.

1- استخدامات التحليل العاملي

يَجمع التحليل العاملي المتغيرات المؤثرة على ظاهرة ما في عدد أقل من العوامل، مما يسهل دراسة الظاهرة وفهمها بصورة أعمق، ويوضح تأثير كل عامل عليها. ومن أفضل تعريفات التحليل العاملي قول أحد الباحثين أن: **"التحليل العاملي هو التعبير عن الأكثر بالأقل**.

2- التحليل العاملي: الاستكشافي والتوكيدي

استنادا إلى ما سبق يمكن تلخيص ما ذكر في استخدامين رئيسين للتحليل العاملي أحدهما وصفي (استكشافي) والآخر تأكيدي (توثيقي) نوضحهما فيما يلي:

أولا: التحليل العاملي الاستكشافي (Exploratory Factor Analysis)

وهو ما يستخدم عادة في المراحل الأولى للكشف عن العوامل التي تتحكم في ظاهرة ما والتعرف عليها، وربما يتبع ذلك تحليل إحصائي آخر، وللعلم فإن معظم التطبيقات العلمية للتحليل العاملي ذات طبيعة استكشافية. ولقد أطلق على هذه الأساليب الكشفية في تحليل البيانات "أساليب التحري (Detective Methods) باستخدام الأعداد والتمثيلات البصرية.

ثانيا: التحليل العاملي التوكيدي (Confirmatory Factor Analysis)

وهو الأكثر تعقيدا، يستخدم عادة في مرحلة متقدمة من تحليل بيانات البحث أو الدراسة، من أجل تأكيد أو رفض فرضية معينة، أي أن التحليل العاملي في هذه الحالة يستخدم للتحقق من صحة الفرضيات، بمعنى يتم هنا اختبار افتراض وجود عوامل محددة مسبقا تتحكم في الظاهرة قيد الدراسة.

لماذا نحتاج للتحليل العاملي؟

3- افتراضات التحليل العاملي

قبل البدء بإجراء التحليل العاملي للبيانات إحصائيا يجب التأكد من عدد من الافتراضات الضرورية، نستعرضها بإيجاز:

- **حجم العينة (عدد المشاهدات):** هناك عدة معايير لتحديد حجم العينة اللازم أشهرها ألا تقل نسبة المشاهدات إلى المتغيرات عن الربع وأحيانا الخمس. وأما المعيار الثاني فهو أن يكون عدد المشاهدات مساويا لعشرة أضعاف عدد المتغيرات.
- **استقلال المفردات:** إذا كانت الدراسة تتطلب استبيان فإن هذا الافتراض يتطلب الإجابة الفردية عن فقرات الاستبيان، لا الإجابة الجماعية أو التشاوري، لأن مخالفة هذا الافتراض تؤثر سلبا على مقدار الخطأ في اختبار الفرضية الصفرية.
- **مستوى القياس المطلوب:** يجب أن تكون المتغيرات التابعة في التحليل العاملي مقاسة على المستوى الفتري (الفئوي) على الأقل.
- **القيم الشاذة والمتطرفة:** يجب التأكد من خلو البيانات من قيم شاذو أو متطرفة لما لها من تأثير كبير في تغيير قيم الارتباط الفعلية بين المتغيرات، وبالتالي التقليل من دقة النتائج.

- **مقياس ملاءمة البيانات (KMO):** يشير هذا المقياس إلى مدى ملاءمة البيانات للتحليل العاملي، وتعتبر قيم KMO أكبر من 0.60 دليلا على ملاءمة البيانات. أما ما يحسبه KMO فهو الارتباط الجزئي بين المتغيرات للتأكد من أن الارتباطات القوية هي بين جميع أو معظم المتغيرات وليس فقط بين عدد قليل فيها.
- **مصفوفة الارتباطات:** يعتمد إجراء التحليل العاملي على وجود ارتباطات قوية بين المتغيرات، وإلا فلا معنى لإجراء التحليل العاملي لها، ويحبذ ألا تقل قيم الارتباطات عن 0.30، وكلما كانت أقوى كان التحليل العاملي أفضل وأكثر دقة وتمثيلا لمتغيرات الظاهرة قيد الدراسة.

ملاحظة: يستخدم اختبار **(Bartlett Sphericity)** لفحص قوة هذه الارتباطات من خلال اختبار الفرضية الصفرية التي تنص على أنه " لا توجد ارتباطات ذات دلالة إحصائية بين المتغيرات".

4- آلية عمل (الخطوات الأساسية في) التحليل العاملي

إذا كان هدف الباحث يقتصر على الكشف عن العوامل التي تفسر مصفوفة الارتباطات بين المتغيرات، فإن أسلوب المحاور الرئيسة أو الطريقة المركزية ربما يكون مناسبا. أما إذا كان يود التحقق من فرضيات معينة أو يتحقق من العوامل التي استخلصتها دراسات أخرى غي مجال معين، فإن أسلوب الأرجحية القصوى يكون هو الاختيار المناسب.

يمكن تلخيص الخطوات الأساسية في التحليل العاملي فيما يلي:

أ- اختيار مجموعة من المتغيرات؛
ب- جمع بيانات عن هذه المتغيرات في مجموعة من الأفراد؛
ت- إعداد مصفوفة الارتباطات بين المتغيرات؛
ث- استخلاص المكونات أو العوامل من مصفوفة الارتباطات؛
ج- تدوير المحاور لتسهيل تفسير العوامل واستخلاص البناء العاملي؛
ح- تسمية العوامل وتفسير البناء العاملي الناتج.

ويعتمد تفسير العوامل وتسميتها على الدلالات المستخلصة من مجموعة المتغيرات الخاصة المرتبطة بكل عامل، ويكون تفسير أي عامل منها أكثر وضوحا إذا كانت ارتباطات متغيراته به مرتفعة، وارتباطاتها بالعوامل الأخرى متدنية.

تطبيق-1-

سنتعرض لكيفية عمل آلية التحليل العاملي من خلال دراسة مثال لاختبار ذكاء يتكون من 11 سؤالا أو فقرة.
تم تطبيق الاختبار على مجموعة من التلاميذ وحسبت درجاتهم على كل فقرة، كما حسبت الارتباطات بين هذه الدرجات، حيث يبين الجدول التالي محتوى كل فقرة بشكل مختصر وقيم الارتباطات بين هذه الفقرات:

مصفوفة الارتباطات بين المتغيرات

رقم الفقرة: المحتوى	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-معلومات	-										
2-فهم	,65	-									
3-كلمات/معاني	,67	,69	-								
4-قواعد لغة	,69	,68	,70	-							
5-إملاء	,62	,67	,82	,81	-						
6-تشابه لغوي	,68	,69	,80	,80	,89	-					
7-مفهوم رياضي	,15	,15	,30	,23	,33	,20	-				
8-تقدير عددي	,23	,15	,12	,40	,23	,68	,60	-			
9-عملية حسابية	,16	,16	,17	,16	,22	,67	,80	,90	-		
10-متتالية عددية	,14	,13	,12	,17	,15	,61	,63	,80	,66	-	
11-تحليل عددي	,10	,15	,20	,16	,22	,70	,89	,70	,67	,80	-

من خلال الجدول نلاحظ أن:

- القطر الرئيسي يحتوي على قيم ارتباط كل متغير مع نفسه وهو 1، ولذا لم نكتبه في الجدول؛
- الجزء العلوي فوق القطر الرئيسي من الجدول فارغ لأن المصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي، لأن خاصية الارتباط علاقة تبديلية.

إذا أمعنا النظر في قيم الارتباطات بشكل جيد، سنلاحظ أن هناك مجموعتين داخل كل منهما ارتباطات قوية وهما:

- الفقرات (1،2،3،4،5،6) مرتبطة مع بعضها البعض بقوة؛
- الفقرات (7،8،9،10،11) هي الأخرى مرتبطة مع بعضها البعض بقوة.

وقد يكون هذا مؤشرا على أن فقرات كل مجموعة تقيس سمة أو قدرة معينة، ويمكن أن نسمي كل قدرة هنا عاملا.

- الخطوة المهمة هي تسمية كل عامل، وعملية التسمية قد تتم من خلال معرفة طبيعة الفقرات المكونة لكل عامل، ومعرفة ما الذي تقيسه هذه الفقرات، ولماذا ارتبطت مع بعضها البعض.

في مثالنا هذا يمكن أن نختار **"القدرة اللغوية"** كإسم للعامل الأول، و**"القدرة العددية"** كإسم للعامل الثاني.

ما تم عرضه في هذا المثال يوضح آلية عمل التحليل العاملي. والفائدة من ذلك هو التعامل مع عدد أقل من المتغيرات، مما يؤدي إلى سهولة فهم الظاهرة قيد الدراسة. وفي مثالنا هذا هو سهولة فهم ما يقيسه الاختبار من قدرات، فبدلا من التعامل مع 11 فقرة نتعامل الآن مع عاملين اثنين فقط.

- بعد الحصول على العاملين وتسميتهما، نحسب الارتباط بين كل فقرة وكل عامل. ونسمي ارتباط الفقرة بالعامل: **"الإشباع"** (Loading)، ويمكن اعتبار قيمة هذا الإشباع مؤشرا على وزن أو أهمية كل فقرة في ذلك العامل.

وفي مثالنا الحالي، يتكون العامل الأول من 6 فقرات تساهم في تكوينه بإشباعات مختلفة، أي أن لبعضها وزن أكبر من الأخرى. ويوضح الجدول الآتي إشباعات فقرات اختبار الذكاء على كل عامل من العاملين الناتجين سابقا.

مصفوفة العوامل وتشبعاتها

الفقرة	العامل الأول: القدرة اللغوية	العامل الثاني: القدرة العددية
1	0,80	0,10
2	0,79	0,20
3	0,83	0,15
4	,87	0,12
5	0,70	0,13
6	0,76	0,21
7	0,10	0,70
8	0,20	0,78
9	0,30	0,79
10	0,12	0,81
11	0,13	0,82

يوضح الجدول أن الفقرات الستة الأولى لها إشباعات عالية مع العامل الأول (القدرة اللغوية) وإشباعات أقل مع العامل الثاني، وأن الفقرة الرابعة لها أعلى قيمة إشباع على هذا العامل، أما الفقرات الخمسة الأخيرة فلها إشباعات أعلى على العامل الثاني (القدرة العددية)، في حين أن الفقرة 11 لها أعلى قيمة إشباع على هذا العامل.

تطبيق-2-

لنفترض أننا طبقنا مجموعة من الاختبارات على عدد كبير من تلاميذ أحد صفوف المرحلة الابتدائية. ونفترض أن هذه الاختبارات تقيس المتغيرات الآتية:

1- الاختبار الأول: ذاكرة الأرقام؛
2- الاختبار الثاني: ذاكرة الكلمات؛
3- الاختبار الثالث: رسم أشكال من الذاكرة؛
4- الاختبار الرابع: معاني مفردات؛
5- الاختبار الخامس: إكمال جمل؛
6- الاختبار السادس: متشابهات لفظية؛
7- الاختبار السابع: قراءة الأعداد؛
8- الاختبار الثامن: عمليات حسابية؛
9- الاختبار التاسع: مسائل حسابية.

1- ما هو افتراضك الأولي بالنسبة لتقسيم هذه الاختبارات إلى مجموعات، ومنها إلى عوامل؟

الجواب:

2- بعد تطبيق هذه الاختبارات، حسبت معاملات الارتباط بين الدرجات لكل اختبارين وحصلنا على مصفوفة معاملات الارتباط كما هو في الجدول الآتي:

مصفوفة الارتباطات بين المتغيرات

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0.66	0.60	0.25	0.30	0.19	0.33	0.35	0.31
2		1	0.57	0.25	0.29	0.18	0.32	0.34	0.30
3			1	0.20	0.28	0.23	0.26	0.29	0.25
4				1	0.60	0.45	0.28	0.21	0.26
5					1	0.51	0.27	0.23	0.26
6						1	0.21	0.18	0.20
7							1	0.45	0.50
8								1	0.47
9									1

أ- من خلال تفحص مصفوفة معاملات الارتباط، هل تستطيع أن تكتشف فيها عوامل تعبر عن الأداء على الاختبارات التسعة؟

الجواب:

نعلم أنه إذا وجد ارتباط كبير نسبيا بين علامات اختبارين، فهذا يعني أن هناك تباينا مشتركا بين الاختبارين، أي أنهما يقيسان شيئا مشتركا.

وبفحص أي الاختبارات ترتبط فيما بينها بمعاملات مرتفعة نسبيا، نكتشف ثلاثة تجمعات (Clusters) نلاحظ كيف أن ارتباطات الاختبارات الثلاثة الأولى مرتفعة نسبيا بلغت قيمها (0.66، 0.60، 0.57)، وأن ارتباطاتها بالاختبارات الأخرى متدنية بشكل ملحوظ. كذلك نلاحظ أن ارتباطات الاختبارات الثلاثة الثانية المرقمة 4، 5، 6 بعضها ببعض مرتفعة نسبيا بلغت قيمها (0.60، 0.45، 0.51) وارتباطاتها بالاختبارات الأخرى متدنية نسبيا. وأيضا هو الأمر بالنسبة للاختبارات الثلاثة الأخيرة 7، 8، 9 فإن ارتباطاتها ببعضها مرتفعة نسبيا حيث بلغت قيمها (0.45، 0.50، 0.47)، في حين أن ارتباطاتها بالاختبارات الأخرى جاءت متدنية نسبيا.

إذن نتوقع ظهور عوامل ثلاثة تفسر الأداء في الاختبارات التسعة، يعبر كل من هذه العوامل عن التباين المشترك في مجموعة من الاختبارات، وعن سمة كامنة أو مفهوم افتراضي ضمني ما.

ب- كيف يمكن أن تسمية هذه العوامل؟ أو كيف تسمية المفهوم الافتراضي الضمني الذي يعبر عنه كل عامل؟

الجواب:

بالرجوع إلى كل مجموعة من الاختبارات المترابطة نتساءل: ما هو الشيء المشترك بين اختبارات المجموعة الواحدة؟

إذا أخذنا المجموعة الأولى نجد أن الشيء المشترك في اختباراتها الثلاثة أن الأداء فيها يعتمد على الذاكرة الآنية (الذاكرة قصيرة المدى)، مما يبرر تسمية أداء اختبارات هذه المجموعة "عامل الذاكرة الآنية". أما في المجموعة الثانية فإن اختباراتها الثلاثة – تشترك جميعها في قياس جوانب لها علاقة بالأداء اللفظي أو اللغوي، إذن هناك ما يبرر تسمية ما تنطوي عليه هذه المجموعة "عامل القدرة اللفظية". في حين أن اختبارات المجموعة الثالثة تشترك في اعتماد أدائها على القدرة الحسابية أو العددية، وهذا ما يبرر تسمية ما تنطوي عليه اختبارات هذه الاختبارات "عامل القدرة العددية".

5- مصفوفة العوامل وتشبعاتها والشيوع

1.6 - التشبع (Loading): هو معامل الارتباط (أو التغاير) بين المتغير (أو العبارة) والعامل (أو المكون).

إذا كان لدينا مقياس أو اختبار يقيس عاملا واحدا يقال أن المقياس نقي عامليا، أو أنه مشبع بعامل واحد. ومن وظائف التحليل العاملي معرفة درجة تشبع المقياس بعامل واحد، أو بأكثر من عامل واحد عندما لا يكون نقيا عامليا، وهناك مقاييس معروف عنها بأنها تقيس مركبا من العوامل. ونظل بعض المقاييس المتعددة الأبعاد التي يتم فيها تقييم وقياس عدة أبعاد أو سمات، يصعب معها تحديد عامل واحد في المقياس، يقال أن للمقياس تركيب عاملي متعدد.

ينتج عن التحليل العاملي ما يسمى "مصفوفة العوامل Factor matrix"، تتألف من مجموعة معاملات ارتباط تعبر عن العلاقات بين المقاييس والعوامل المستخلصة عنها.

مثال: مصفوفة العوامل وتشبعاتها المستخلصة من التحليل العاملي لبيانات المصفوفة في الجدول السابق "باستخدام طريقة المكونات الرئيسة أو العوامل الرئيسة Principal Factors Method ". فالبيانات المذكورة تحت مدخلات الأعمدة A,B,C في الجدول الآتي تدعى تشبعات العوامل المعرفة بالرموز: A,B,C.

مصفوفة العوامل وتشبعاتها لاختبارات الأداء

الاختبارات		العوامل			الشيوع
		A	B	C	h^2
ذاكرة الأرقام	1	0.80	0.15	0.20	0.70
ذاكرة الكلمات	2	0.75	0.15	0.20	0.62
رسم أشكال من الذاكرة	3	0.70	0.10	0.15	0.52
معاني مفردات	4	0.15	0.70	0.15	0.53
إكمال جمل	5	0.20	0.80	0.10	0.69
متشابهات لفظية	6	0.10	0.60	0.10	0.38
قراءة أعداد	7	0.20	0.20	0.70	0.57
عمليات حسابية	8	0.25	0.15	0.65	0.48
مسائل حسابية	9	0.20	0.20	0.60	0.44

- على سبيل المثال: القيمة 0.80 في السطر الأول والعمود الأول من الجدول هي تشبع اختبار ذاكرة الأرقام بالعمل A، والقيمة 0.70 في السطر الرابع تحت العمود الثاني تمثل تشبع اختبار معاني المفردات بالعامل B. وبالمثل تعرف بقية التشبعات في الجدول.
- تشبعات العوامل هي معاملات ارتباط، ومن المعروف أن قيمها تتراوح بين -1 و +1، لذلك فهي تأخذ نفس الدلالات التي تفسر بها معاملات الارتباط.

2.6 -الشيوع أو الاشتراكيات (Communalities): يساوي كل منها مجموع مربعات تشبعات العوامل في كل اختبار، فقيمة الشيوع لاختبار ذاكرة الأرقام -مثلا- هي: $h^2 = (0.80)^2 + (0.15)^2 + (0.20)^2 = 0.7025$

عموما فإن درجة الشيوع لاختبار -أو متغير- تساوي تباين العوامل المشتركة (الأكثر شيوعا) في ذلك الاختبار، والذي يتم حسابه بالصيغة التالية: $\boldsymbol{h^2 = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + \cdots + k_i^2}$ ……(1)

حيث: $a_i^2,\ b_i^2,\ c_i^2, \ldots, k_i^2$ هي مربعات تشبعات العوامل للاختبار (i)

6- مفاهيم أساسية في التحليل العاملي

1.7- التباين Variance:

يتكون التباين الكلي في بيانات مقياس أو اختبار من تباينات العوامل المشتركة، وتباين عامل خاص (باختبار معين وليس بغيره) والتباين الخطأ (أخطاء القياس، أخطاء التجربة، أخطاء الدقة)، ويمكن حسابه من خلال الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{V_t = V_{com} + V_{sp} + V_e} \ldots\ldots (2)$$

حيث: V_t = التباين الكلي (Total Variance) في بيانات المقياس.

V_{com} = تباينات العوامل المشتركة (Comon Variance)، أي التباينات التي يشترك فيها المقياس مع المقاييس الأخرى.

V_{sp} = تباين العامل الخاص (Specific Variance) في المقياس (لا يشترك به أي مقياس آخر).

V_e = التباين الخطأ (Error Variance) خاص بكل مقياس.

وبما أن درجة الشيوع لاختبار أو متغير تساوي تباين العوامل المشتركة، بمعنى: $\boldsymbol{h_i^2 = V_{com}}$ فإنه يترتب على ذلك أن:

$$\boldsymbol{V_{com} = V_A + V_B + V_C + \cdots + V_K} \ldots\ldots (3)$$

بمعنى أن التباين المشترك في مقياس أو اختبار هو مجموع تباينات العوامل التي لها تشبعات في ذلك المقياس.

وبتعويض V_{com} في المعادلة (2) نحصل على ما يلي:

$$\boldsymbol{V_t = V_A + V_B + V_C + \cdots + V_K + V_{sp} + V_e} \ldots\ldots (4)$$

وبقسمة حدود المعادلة (4) على V_t نحصل على الصيغة التالية:

$$\frac{V_t}{V_t} = 1 = \frac{V_A}{V_t} + \frac{V_B}{V_t} + \frac{V_C}{V_t} + \cdots + \frac{V_K}{V_t} + \frac{V_{sp}}{V_t} + \frac{V_e}{V_t}$$

وبالتالي: $1 - \frac{V_e}{V_t} = \frac{V_A}{V_t} + \frac{V_B}{V_t} + \frac{V_C}{V_t} + \cdots + \frac{V_K}{V_t} + \frac{V_{sp}}{V_t}$

وبوضع $\frac{V_A}{V_t} + \frac{V_B}{V_t} + \frac{V_C}{V_t} + \cdots + \frac{V_K}{V_t} + \frac{V_{sp}}{V_t} = r_{tt}$

يكون لدينا: $\boxed{r_{tt} = 1 - \frac{V_e}{V_t}}$

حيث: r_{tt} هي نسبة التباين الحقيقي في المقياس = معامل ثبات المقياس= (1- نسبة التباين الخطأ).

مثال:

حسب المعطيات السابقة للاختبارات التسعة، يمكن تمثيل هذه المكونات في أحد الاختبارات، وليكن اختبار **"إكمال الجمل"** بمستطيل في الشكل (1) حيث تعرف المساحة الكلية للمستطيل التباين الكلي في الاختبار، حيث افترضنا أن نسبة تباين العامل الخاص $V_{sp} = 0.17$ ومجموع نسب التباينات المشتركة الذي يساوي (0.69) ويتكون من تباينات العوامل الثلاثة:

$$\boldsymbol{V_{com}} = V_A + V_B + V_C = (0.20)^2 + (0.80)^2 + (0.10)^2 = 0.04 + 0.64 + 0.01 = 0.69$$

وإذا أضفنا لها نسبة تباين العامل الخلص $V_{sp} = 0.17$ يصبح مجموع التباين المفسر بعوامل يقيسها الاختبار:

$$r_{tt} = V_A + V_B + V_C + V_{sp} = 0.4 + 0.64 + 0.01 + 0.17 = 0.86 = 1 - \frac{V_e}{V_t}$$

وتكون نسبة تباين الخطأ $(1 - 0.86 = 0.14)$

الشكل (1) مكونات التباين في اختبار إكمال الجمل

0.04	*0.64*	*0.01*	*0.17*	*0.14*
V_A	V_B	V_C	V_{sp}	V_e

ولمزيد من التوضيح، يمكن مقارنة مكونات التباين في اختبار إكمال الجمل بمكونات التباين في اختبارين آخرين هما:

- مكونات التباين في اختبار ذاكرة الأرقام:

0.64	*0.02*	*0.04*	*0.18*	*0.12*
V_A	V_B	V_C	V_{sp}	V_e

- مكونات التباين في اختبار ذاكرة المفردات:

0.04	*0.64*	*0.01*	*0.17*	*0.14*
V_A	V_B	V_C	V_{sp}	V_e

نلاحظ أن:

- نسبة تباين العامل B هي الأكبر في اختباري إكمال الجمل ومعاني المفردات كونهما من نفس التجمع الخاص بالعامل B
- نسبة التباين V_A هي الأكبر في اختبار ذاكرة الأرقام، بينما نسبة العامل B في هذا الاختبار قليلة (0.02).
- بينما تباين العامل (2) فكان بنسبة صغيرة جدا في الاختبارات الثلاثة، وتجدر الإشارة إلى أن العامل الخاص SP ليس واحدا في الاختبارات الثلاثة، بل يمثل بعدا خاصا في كل اختبار (لا يشترك معه أي اختبار آخر).
- كذلك التباين الخطأ V_e في أي من الاختبارات الثلاثة لا علاقة له بالتباين الخطأ في الاختبارين الآخرين، والجدير بالذكر أن V_e يعبر عن درجة الدقة في الاختبار، فكلما زادت قيمته، كانت درجة الدقة أقل وينتج عنه معامل ثبات للاختبار أقل.

2.7- الجذر الكامن *Eigen Value*

هو مجموع مربعات تشبعات كل المتغيرات على كل عامل لوحده من عوامل المصفوفة. وهو محدد في البرنامج بالقيمة (1) طبقا لمحك **"كايزر"** بحيث:

- إذا كان الجذر الكامن λ أكبر أو يساوي 1 نقبل العامل؛
- وإذا كان الجذر الكامن λ أصغر 1 نرفض العامل.

وبما أن: قيم الشيوع للمتغيرات = مجموع مربعات تشبعات المتغيرات على العوامل؛

وأن: الجذر الكامن للعوامل = مجموع مربعات التشبعات على العوامل؛

فإن: مجموع قيم الشيوع للمتغيرات = مجموع الجذور الكامنة لعوامل المصفوفة، أو بمعنى آخر:

مجموع مربعات الصفوف (قيم الشيوع) = مجموع مربعات الأعمدة (الجذور الكامنة)

$$\sum h_i^2 = \sum \lambda_i$$

3.7- حجم التباين العاملي ونسبة التباين العاملي

- حجم التباين العاملي: هو مجموع قيم الشيوع، أو هو مجموع الجذور الكامنة.

- نسبة التباين العاملي للمصفوفة $= \frac{\text{مجموع الجذور الكامنة للعوامل}}{\text{التباين الارتباطي}} \times 100$

والتباين الارتباطي = عدد المتغيرات التي تدخل في التحليل العاملي، أما الجذر الكامن يعكس مقدار التباين العام عن طريق العدد النسبي من العوامل.

4.7- مصفوفة تشبعات المتغيرات بالعوامل *Factor Loadings Matrix*

عادة، يكون برنامج الحاسوب مصفوفة تسمى **"مصفوفة التشبعات العاملية"**، ويقصد بالتشبع العاملي للمتغير، ارتباط ذلك المتغير بعامل معين تم استخلاصه، وتفسر قيمته بنفس طريقة تفسير معامل ارتباط بيرسون.

- متوسط مربعات التشبعات العاملية في أحد أعمدة هذه المصفوفة يدل على مقدار التباين الكلي في المتغيرات كمجموعة والتي يمكن تفسيرها بواسطة هذا العامل.
- أما متوسط مربعات التشبعات العاملية في جميع أعمدة هذه المصفوفة يدل على نسبة التباين الذي يمكن تفسيره بواسطة العوامل المستخلصة، وهذا يكون مؤشرا لمدى صلاحية هذه العوامل في تفسير تباين مجموعة المتغيرات الأصلية.

ونظرا لأن عدد العوامل المستخلصة يكون عادة أقل من عدد المتغيرات الأصلية، لا نستطيع الحصول على قيم المتغيرات باستخدام العوامل، إنما يمكن تقدير قيمها باستخدام معادلة الانحدار المتعدد لكل متغير على هذه العوامل.

مثال:

لتكن مصفوفة التشبعات العاملية التالية التي تم استخلاصها باستخدام أحد أساليب التحليل العاملي، لثمانية متغيرات واشتراكياتها (h^2) كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول المتغيرات والعوامل والاشتراكيات

المتغيرات	العوامل		الاشتراكيات (h^2)
	العامل الأول	العامل الثاني	
1	0.65	0.57	0.75
2	0.54	0.54	0.58
3	0.61	0.45-	0.57
4	0.63	0.54-	0.69
5	0.56	0.54	0.61
6	0.72	0.59-	0.87
7	0.67	0.45-	0.65
8	0.64	0.60	0.77
التباين المشترك (الجذور الكامنة)	**3.17**	**2.31**	**5.48**
نسبة التباين الكلي	**0.40**	**0.29**	**0.69**
نسبة التباين المشترك	**0.58**	**0.42**	**1.00**

يتضح من خلال الجدول أعلاه أن قيمة معامل ارتباط المتغير الأول مع كل من العاملين الأول والثاني هما: 0.75 و0.57 على الترتيب، وهما تشبع المتغير الأول (1) بكل من العاملين، أي لكل متغير من المتغيرات الثمانية تشبعا بكل من العاملين، وبذلك يشتمل الجدول على 16 تشبعا عامليا.

أما القيم المدونة في العمود الرابع فهي الاشتراكيات (أو الشيوع)، وتدل على نسبة التباين الكلي في المتغير الذي يقع في صف معين والذي يمكن تفسيره بواسطة العاملين. فمثلا: 75% من تباين المتغير الأول يمكن تفسيره بواسطة كل من العاملين، في حين أن نسبة التباين الكلي الباقية وهي 25% فقد تعزى إلى عامل نوعي يتعلق بالخاصية أو السمة المتعلقة بهذا المتغير، وكذا إلى أخطاء القياس، ولم تدرج نسبة التباين الكلي المتبقى في الجدول لأن الهدف من التحليل العاملي هو التركيز على التباين المشترك.

يلاحظ أن مجموع مربعات التشبعات في العمود الأول = 3.17، وهذه القيمة تمثل التباين المشترك، وأن متوسط مربعات هذه التشبعات هو: $\frac{3.17}{8} \approx 0.40 = 40\ \%$ والتي تمثل نسبة التباين في المتغيرات الثمانية التي يمكن تفسيرها بواسطة العامل الأول. بينما نجد أن النسبة 29% ($\frac{2.31}{8} \approx 0.29$) تمثل نسبة التباين في المتغيرات الثمانية التي يمكن تفسيرها بواسطة العامل الثاني، وهي نسبة أقل من النسبة الأولى نظرا لأن العامل الأول يفسر أكبر قدر ممكن من التباين في المتغيرات، يليه العامل الثاني فالثالث، وهكذا، ...

مجموع متوسطات مربعات التشبعات 0.69 الموضحة أسفل العمود الرابع تدل على نسبة التباين في مجموعة المتغيرات التي يمكن تفسيرها بواسطة العاملين، كما يلاحظ أن مجموع مربعات تشبعات المتغيرات ممثلا بالمعاملين هو: $0.75 = (0.65)^2 + (0.57)^2$ المدون في الصف الأول من العمود الرابع.

وهكذا في بقية صفوف هذا العمود، وتسمى هذه القيم بالاشتراكيات، أي أن 75% من تباين المتغير الأول يمكن تفسيره بواسطة العاملين، وإذا افترضنا أن العاملين غير مرتبطين، فإن مربع معامل الارتباط المتعدد بين هذين العاملين والمتغير الأول =0.75.

أي أن القيم المدونة في العمود الرابع الخاص بالاشتراكيات هي قيم مربع معامل الارتباط المتعدد بين العاملين والمتغيرات الثمانية. كما أن التشبعات العاملية في أي صف هي بمثابة معاملات الانحدار المتعدد المعيارية في معادلة الانحدار التي تستخدمها لتقدير قيمة المتغير بواسطة العاملين.

يمكن اعتبار المتغيرات في التحليل العاملي متغيرات تابعة نود التنبؤ بها، فبدلا من التنبؤ بأحد المتغيرات من التركيب الخطي الأمثل من المتغيرات المتبقية، فإننا نتنبأ بكل منها بواسطة العوامل، لذلك يمكن إيجاد درجات الأفراد في هذه العوامل. فالصف الأول أسفل الجدول يوضح مدى أهمية كل من العاملين في تفسير العلاقات بين المتغيرات الثمانية.

فالتباين الكلي في هذه المتغيرات يمكن تجزئته إلى تباين مشترك يمكن تفسيره بواسطة العامل الأول وقيمته = 3.17، وتباين مشترك يمكن تفسيره بواسطة العامل الثاني وقيمته = 2.31، وتباين مقداره $(3.17 + 2.31 = 5.48)$ يمكن تفسيره بواسطة كل من العاملين. تسمى كل من القيمتين 3.17 و2.31 الجذر الكامن (القيمة الذاتية) للمصفوفة، وتدلان على نسبة التباين في المتغيرات التي يمكن تفسيرها بمعلومية كل من العاملين. وللعلم فإن:

$$\sum h_i^2 = \sum \lambda_i$$

ونخلص إلى أن:

التباين الكلي الذي يمكن تفسيره بواسطة العاملين = مجموع الجذور الكامنة = مجموع الاشتراكيات

إذا حولنا درجات المتغيرات الثمانية إلى درجات معيارية، فإن تباين كل منها يساوي الواحد الصحيح. وبذلك يكون تباينها الكلي = 8. وبالنظر إلى الصف الثاني أسفل الجدول نجد أن نسبة التباين الكلي الذي يمكن تفسيره بواسطة العاملين هو:

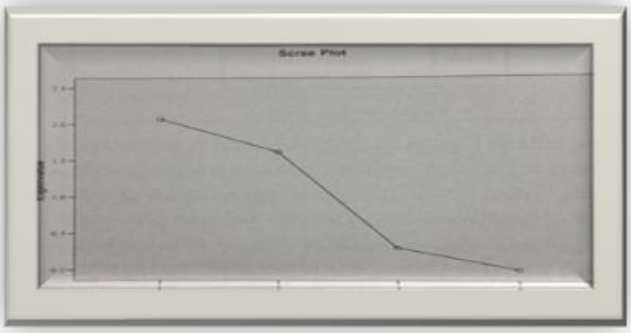
$$0.40 + 0.29 = 0.69$$

أي أن 69% من التباين الكلي الذي يساوي 8 يتعلق بهذين العاملين لذلك يعد تباينا مشتركا، ونسبة 31% من التباين الكلي تعزى إلى عوامل نوعية وأخطاء قياس المتغيرات.

كما يوضح الصف الثالث أسفل الجدول أن 58% من التباين المشترك ($\frac{3.17}{5.48} = 0.58$) يمكن تفسيرها بواسطة العامل الأول، وأن 42% من التباين المشترك ($\frac{2.31}{5.48} = 0.42$) يمكن تفسيرها بواسطة العامل الثاني. وهذا يعني أن العاملين معا يفسران (42% +58% =100%)، أي كل التباين المشترك.

5.7- التمثيل البياني لاختبار سكري Scree Plot

يستخدم هذا الاختبار لتحديد العدد الأقصى من العوامل التي يمكن استخلاصها قبل أن يبدأ التباين الخاص في السيطرة على التباين العام، ويتكون هذا الاختبار من رسم بياني يمثل المحور الرأسي فيه التباين في، حين يمثل المحور الأفقي عدد العوامل ويحدد هذا الاختبار عدد العوامل عند النقطة التي يتحول فيها المنحنى إلى خط مستقيم تقريبا.



7- تدوير العوامل Rotation

بعد التوصل إلى العوامل وتشبعاتها، تأتى عملية تدوير العوامل إلى مكان آخر يساعد في تفسيرها.

1.8- الهدف الأساسي من تدوير العوامل:

يهدف تدوير العوامل إلى استخلاص مجموعة من العوامل باستخدام أي طريقة من طرق التحليل العاملي المختلفة، وهذه العوامل هي محاور متعامدة تمثل تشبعات المتغيرات احداثياتها، وهي تتحدد بطريقة عشوائية ويختلف تحديدها للمحاور من طريقة عاملية لأخرى.

بمعنى أن الهدف هو التوصل إلى تشكيلة مناسبة للعوامل يمكن تفسيرها، وبالتالي فإن تدوير العوامل يساعد في تفسير العوامل تفسيرا منطقيا.

2.8- اختبار بارتليت وكايزر – ماير – أولكن *KMO and Bartletts test of sphericity*

اختبار كايزر – ماير – أولكن لحساب كفاية العينة واختبار ما إذا كانت الارتباطات الجزئية بين المتغيرات صغيرة، وتتراوح قيمة هذا الاختبار من (صفر إلي +1) حيث تشير القيم القريبة من (+1) إلى كفاية العينة أو أنها مناسبة، والقيم الأقل من (+0.5) تشير إلى عدم كفاية العينة.

3.8- اختبار بارتليت للكروانية / التكورية / الدائرية:

هو مؤشر للعلاقة بين المتغيرات ويجب أن يكون دالا إحصائيا مما يدل على أن المصفوفة هي مصفوفة الوحدة.

4.8- المحدد *Determinant*

لقياس مشكلة الارتباط الذاتي، ويجب ألا تقل قيمة المحدد عن (0.0001) فإذا كانت قيمته أقل من ذلك ننظر إلى المتغيرات المرتبطة عاليا أكثر من (0.80) ونحذف أحداها.

5.8- ما الفرق بين العوامل قبل التدوير وبعد التدوير؟

يتم استخلاص العوامل قبل التدوير بتحديد العوامل بطريقة عشوائية وهذا التحديد يختلف من طريقة لأخرى (المكونات الأساسية، الطريقة القطرية، ...) وتعد التشبعات قبل التدوير مقبولة فقط من وجهة النظر الرياضية البحتة، كما أن هناك صعوبة في تفسير العوامل المستخلصة قبل التدوير. وفيما يلي إيجاز لاستخلاص العوامل بعد التدوير.

- يؤدي تدوير المحاور إلى توسيع أو تضييق المفاهيم؛
- يؤدي تدوير المحاور إلى الابتعاد عن العشوائية في تحديد العوامل؛
- يساعد على توحيد الصياغة قدر المستطاع بين النتائج التي نحصل عليها من هذه الأساليب؛
- يساهم في إعادة توزيع التباين بين العوامل الناتجة مع المحافظة على الخصائص التصنيفية التي ينتهي إليها التحليل؛
- تساعد عملية التدوير في تفسير العوامل تفسيرا منطقيا؛
- تدوير المحاور لتتفق مع العوامل المتعامدة التي كشفت عنها التحاليل العاملية السابقة؛
- تدوير المحاور لوضعها في مركز تجمع المتغيرات، وللحصول على نمط من التشبعات المتشابهة نسبيا.

6.8- أنواع وطرق تدوير العوامل:

تسمى عملية تحريك الإحداثيات إلى مواقع أخرى بـ: **"تدوير العوامل"**، وهي عملية قائمة على أسس رياضية تهدف إلى تحديد مواقع الاختبارات لإطار جديد يكسبها معنى واضحا ومفهوما، وهناك نوعان من التدوير تبعا للزاوية التي تفصل بين المحاور المرجعية وهما:

أولا- التدوير المتعامد Orthogonal Rotation

يتميز التدوير المتعامد **بالاستقلال،** ويعني عدم ارتباط المحاور فيما بينها، **والبساطة**: أي يسهل تناول العوامل المتعامدة بالعمليات الحسابية والرسم البياني. ان احتفاظ التدوير بالتعامد القائم بين العوامل الأصلية دليل على أن معاملات ارتباط العوامل تساوي صفر. وأن أهم الأساليب المستخدمة للتدوير المتعامد هي:

- الكوارتيماكس Quartimax
- الفاريماكس Varimax
- إكواماكس Equamax
- أورثوماكس Orthomax

ثانيا- التدوير المائل Oblique Rotation

قد يكون التعبير عن العوامل التي تمثل الظاهرة المدروسة بمحاور متعامدة مقبولا في عدد من المجالات، ويكون غير واقعي في مجالات أخرى، لذا يتم استخدام أسلوب التدوير المائل حيث تقبل فيه الزاوية الحادة بين المحاور - بدلا من القائمة- لتعبر في النهاية عن عوامل مرتبطة وليست مستقلة. ويجب على الباحث أن يختار الأسلوب الملائم لدراسته التدوير المائل أم القائم، وع ملاحظة أن قيم الشيوع (مجموع مربعي التشبعين) قبل التدوير تساويها بعد التدوير.

وعموما فإن أهم مميزات التدوير المائل أنه يمنح الفرصة لتكوين مصفوفة ارتباطات جديدة للعوامل المائلة. ومن أهم الأساليب المستخدمة في التدوير المائل هي:

- الكواريمين Quartimin
- الأوبلمين Oblimin
- الكوفاريمين Covarimin
- البروماكس Promax

9- استخدام برامج الحاسوب في إجراء التحليل العاملي

لإجراء التحليل العاملي يمكن استخدام أحد برامج الحاسوب المتوفرة ضمن الحزم الإحصائية SPSS أوBMD أوSAS، ونظرا لأن البرنامج الوزاري حدد حزمة SPSS فسوف نلقي الضوء على البرنامج الذي يجري التحليل العاملي وهو (**FACTOR**) أحد البرامج الفرعية في الحزمة SPSS، ويتم التحليل العاملي بمعظم الأساليب المعاصرة مثل:

- أسلوب المكونات الرئيسة؛
- أسلوب المحار الرئيسة؛
- أسلوب الأرجحية القصوى؛
- أسلوب التحليل العاملي ألفا
- أسلوب التحليل العاملي لصور المتغيرات.

1.9- مدخلات البرنامج:

1. البيانات الخام، أو مصفوفة الارتباط، أو مصفوفة التغاير (Covariance Matrix).
2. يحدد الباحث عدد العوامل التي يود استخلاصها من البيانات أو محك تحديد هذا العدد.
3. يحدد ما إذا كان يود وضع القيم التقديرية الاشتراكيات في الخلايا القطرية لمصفوفة الارتباط ونوع التقديرات المطلوبة.
4. يحدد ما إذا كان يود تدوير المصفوفة العاملية تدويرا متعامدا أم مائلا وطريقة التدوير التي يختارها.
5. يمكن أن يحدد عدد مرات التكرار المتتالي للعمليات (Iteration) للتوصل إلى التقارب (Convergence).

2.9- مخرجات البرنامج:

1. المتوسطات والانحرافات المعيارية لجميع المتغيرات المراد تحليلها.
2. مصفوفة الارتباطات.
3. معكوس مصفوفة الارتباطات ومحدداتها.
4. مصفوفة التشبعات العاملية قبل التدوير.
5. مصفوفة التشبعات العاملية بعد تدويرها بطريقة (Varimax).
6. مصفوفة درجات العوامل متضمنة أوزان الانحدار التي تستخدم في بناء موازين العوامل (Factor Scales).
7. تمثيل بياني للعوامل بعد تدويرها متضمنا أشكالا لتجمعات المتغيرات لكل زوج من العوامل.

أبسط مثال لبطاقات التحكم (**Control Cards**) التي تجري برنامج التحليل العاملي بدون أي تحديدات أخرى كالتالي:

```
FACTOR VARIABLES = VARA, VARC, VARF TO VARX/STATISTICS ALL
```

وهنا تكون المدخلات البيانات الخام، ويحدد البرنامج عدد العوامل المستخلصة بعدد الجذور الكامنة (Eigen values) في مصفوفة الارتباطات التي تزيد قيمتها عن الواحد الصحيح، ويتم تقدير قيم الاشتراكيات بالتكرار المتتالي (Iteration) ويستخدم التدوير المتعامد بطريقة (Varimax).

أما إذا أراد الباحث تدوير العوامل المستخلصة تدويرا مائلا، فإنه ينبغي أن تكون بطاقة التحكم كالآتي:

```
FACTOR VARIABLES = VARA, VARC, VARF TO, VARX/
ROTATE = OBLIQUE
STATISTICS ALL
```

ويستخدم البرنامج في التدوير المائل الطريقة (Oblimin) ومخرجاتها: مصفوفة بنية العوامل، ومصفوفة الارتباطات بين العوامل المائلة (المرتبطة).

تطبيق على التحليل العاملي

سنعرض فيما يلي جميع خطوات التحليل العاملي وافتراضاته السابقة من خلال تحليل بيانات المثال التالي:

أربع خصائص (متغيرات) لـ: 20 سيارة وهي: السرعة والقوة والسعر وتكلفة البنزين. والمطلوب هو اجراء التحليل العاملي للبيانات المعطاة في الجدول الآتي:

	speed	power	cost	gallon
1	65.00	67.00	64.00	64.00
2	62.00	65.00	37.00	37.00
3	45.00	43.00	40.00	40.00
4	34.00	35.00	62.00	62.00
5	43.00	40.00	46.00	46.00
6	65.00	67.00	64.00	64.00
7	62.00	65.00	37.00	37.00
8	45.00	43.00	61.00	40.00
9	34.00	35.00	59.00	62.00
10	43.00	40.00	36.00	46.00
11	65.00	67.00	62.00	64.00
12	62.00	65.00	32.00	37.00
13	45.00	43.00	61.00	40.00
14	34.00	35.00	59.00	62.00
15	43.00	40.00	36.00	46.00
16	65.00	67.00	62.00	64.00
17	62.00	65.00	32.00	37.00
18	45.00	43.00	61.00	40.00
19	34.00	35.00	59.00	62.00
20	43.00	40.00	36.00	46.00

الحل:

مع التنويه هنا إلى أن بيانات هذا المثال غير مناسبة لإجراء التحليل العاملي حسب الافتراضات سالفة الذكر، ولكن السبب في استخدامها هو الرغبة في الحصول على نتائج يمكن عرضها دون الحاجة إلى اختصارها أو حذف بعض مكوناتها بسبب حجمها الكبير، وبالتالي صعوبة عرضها.

لنذهب إلى مخرجات برنامج SPSS ونبدأ في دراسة نتائج الآتية:

الجدول (1) احصائيات وصفية Descriptive Statistics

	Mean	Std Deviation	Analysis N
speed	49.8000	12.12913	20
power	50.0000	13.67287	20
cost	50.3000	12.81077	20
gallon	49.8000	11.46895	20

أول هذه المخرجات هي نتائج الجدول (1) ويتضمن الإحصاءات الوصفية (الوسط الحسابي والانحراف المعياري) للمتغيرات الأربع: السرعة **speed** والقوة **power** والسعر **cost** وتكلفة البنزين **gallon**، مع ملاحظة أن عدد المشاهدات 20 وهو أقل من الحد الأدنى المطلوب حسب المعايير التي عرضناها سابقا، ويفيد هذا الجدول في ملاحظة أية قيم شاذة أو غير معقولة في البيانات.

الجدول (2) مصفوفة الارتباطات Correlation Matrix

		speed	power	cost	gallon
Correlation	Speed	1.000	0.990	-0.129	-0.091
	power	0.990	1.000	-0.100	-0.036
	cost	-0.129	-0.100	1.000	0.701
	gallon	-0.091	-0.036	0.701	1.000
(1-tailed) Sig.	Speed		0.000	0.294	0.351
	power	0.000		0.338	0.440
	cost	0.294	0.338		0.000
	gallon	0.351	0.440	0.000	

وأما الجدول (2) فهو مصفوفة الارتباطات وهي تحتوي على معاملات الارتباط العادية (معامل بيرسون) بين المتغيرات، ونلاحظ أن هناك بعض الارتباطات القوية والبعض الآخر غير قوي. والوضع الأفضل هو الحصول على ارتباطات قوية بين المتغيرات، وهذه البيانات ليست جيدة للتحليل العاملي بسبب عدد مشاهداتها القليل. لكن استخدمناها للاختصار ولغايات تمكين القارئ من رؤية جميع النتائج بسهولة والتدرب عليها وفهمها.

الجدول (3) اختبارا كايزر-ماير-أولكن و بارتليت KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Oiken Measure of Sampling Adequacy		0.466
Bartlett's Test of	Approx. Chi -Square	80.815
	df	6
	Sig.	0.000

يبين الجدول (3) نتائج اختبار بعض فرضيات التحليل العاملي، منها قيمة إحصاءة اختبار (KMO) التي تساوي (0.46) وهي -كما هو متوقع- أقل من الحد الأدنى المطلوب، مما يؤكد عدم كفاية هذه البيانات للتحليل العاملي، لكن هذه النتيجة تتعارض مع نتيجة إحصاءة اختبار (Bartlett Sphericity) التي هي دالة إحصائيا. لذا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة لها H_1 التي تنص على أنه توجد ارتباطات بين المتغيرات عند حتى أصغر مستوى دلالة غير معدوم.

الجدول (4) الاشتراكيات Communalities

	Initial	Extraction
Speed	1.000	0.995
power	1.000	0.996
cost	1.000	0.850
gallon	1.000	0.853

Extraction Method: Principal Component Analysis

يحتوي الجدول (4) على اشتراكيات (Communalities) المتغيرات، والاشتراكية هي نسبة تباين المتغير التي يمكن تفسيرها بالعوامل المستخرجة، ونلاحظ أن العمود الأول من اليسار يحتوي على الاشتراكية الأولية المفترضة لكل متغير وقيمتها (1) لكل متغير. أما العمود الثاني فيحتوي على اشتراكية كل متغير بعد استخراج العوامل من التحليل، فمثلا:

- اشتراكية متغير السعر (**cost**) هي 0.85 وهذا يعني أن العوامل المستخرجة من التحليل تفسر معا ما مقداره 85%من تباين متغير السعر، وبالطبع كلما كانت قيمة اشتراكية المتغير المستخرج أعلى كان ذلك أفضل.

ملاحظة: الأسلوب المستخدم لاستخراج العوامل في هذا المثال هو: (PCA)Principle Component Analysis وهو الأسلوب الشائع والأشهر في التحليل العاملي.

الجدول (5) التباين الكلي المفسر Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Square Loadings		
	Total	% of variance	Cumulative%	Total	% of variance	Cumulative%
1	2.076	51.904	51.904	2.076	51.904	51.904
2	1.618	40.442	92.346	1.618	40.442	92.346
3	0.298	7.448	99.795			
4	0.008	0.205	100.000			

Extraction Method: Principal Component Analysis

يبين الجدول (5) مقدار التباين المفسر، وبمراجعة محتويات هذا الجدول نلاحظ أنه قد تم استخراج عاملين اثنين، والمعيار المستخدم لذلك هو **"الجذر الكامن"**، والجذر الكامن للعامل هو مقدار التباين الكلي الذي يفسره العامل. وقد استخدمنا عند تطبيقنا لخطوات الكمبيوتر الحد (1)، بمعنى طلبنا من الكمبيوتر اعتبار العامل الذي قيمة جذره الكامن 1 وما فوق فقط. أما إذا كانت قيمة الجذر الكامن لعامل ما أقل من 1 فإن هذا يعني أن هذا العامل لا يختلف فعليا عن متغير مستقل وحيد من متغيرات الدراسة، وبالتالي لا يمكن اعتباره عاملا.

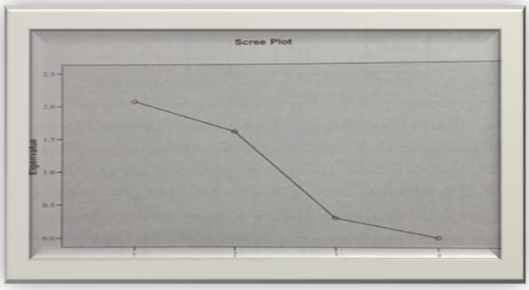
في هذا المثال: هناك عاملان، للأول قيمة جذر كامن قدرها 2.076 وللثاني 1.618، كما نلاحظ أن العامل الأول لوحده استطاع أن يفسر 51.9% من التباين الكلي، في حين فسر العامل الثاني 40.442% من التباين الكلي، وبجمع المقدارين يكون العاملان معا قد فسرا ما مقداره 92.346% من التباين الكلي وهي قيمة عالية. وهذا يعني الاستفادة من التحليل العاملي في تفسير معظم التباين في الظاهرة قيد الدراسة بعدد أقل من المتغيرات.

ملاحظة: يمكن تغيير قيمة الواحد (1) المستخدمة في استخراج العوامل بسهولة، كم يمكن استخدام معيار آخر وهو عدد المتغيرات المطلوب، لكن استخدام الجذر الكامن بقيمة واحد (1) هو الشائع.

استخدام الشكل البياني في استخراج العوامل

من الشكل البياني الآتي يدعى (Scree)، يمكن استخراج العوامل المقبولة بناء على قيم الجذور الكامنة أيضا ولكن من خلال الشكل وليس القيمة، والقيم المعتبرة هنا هي قيم الشكل قبل أن يصبح مستويا نوعا ما.

الشكل (1) الشكل البياني لاستخراج العوامل من خلال الجذور الكامنة



نلاحظ في الشكل (1) وجود عاملين قبل أن يبدأ الشكل في الاستواء.

الجدول (6) المكونات الأساسية Component Matrix[a]

	Component	
	1	2
Speed	0.929	0.364
power	0.911	0.407
cost	-0.411	0.827
gallon	-0.463	0.797

Extraction Method: Principal Component Analysis

a.2 Components extracted.

يبين الجدول (6) أن هناك عاملين تم استخراجهما، ويعرض قيم تشبعات المتغيرات على كل عامل. مثلا: تشبع المتغير الأول السرعة (**speed**) على العامل الأول 0.929 في حين تشبعه على العامل الثاني 0.364، وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات، والوضع المثالي الذي يتمناه الشخص هو أن يكون للمتغير تشبعا عاليا على أحد العوامل وتشبعات منخفضة على بقية العوامل، وتسمى المتغيرات التي تحقق هذا الوضع بالمتغيرات المؤثرة (**Marker Variables**)، وهي مهمة جدا في تحديد طبيعة العامل بشكل مباشر وواضح. وأما عن المعيار المستخدم لتقويم تشبع ما، فهناك معيار استخدام التشبعات التي هي أكبر من |0.30|، وهناك معيار آخر لـ: (**Stevens, 1996**) وهو كما يلي:

- اعتبار التشبعات التي أكبر من |0.30| مقبولة؛
- واعتبار التشبعات التي أكبر من |0.40| مهمة؛
- واعتبار التشبعات التي أكبر من |0.50| أساسية.

الخطوة الأولى: تحديد عدد العوامل وتشبعاتها

في هذا المثال، الوضع سهل وغير معقد حيث هناك عاملان اثنان يمكن استخراجهما في هذه البيانات. أما بالنسبة لتشبعات المتغيرات على هذين العاملين فهي كالآتي: المتغيران السرعة والقوة متشبعان بشكل قوي مع العامل الأول، والمتغيران السعر وتكلفة البنزين متشبعان مع العامل الثاني.

الخطوة الثانية: تسمية العوامل المستخرجة

وتتم عادة من خلال تحليل كبيعة المتغيرات المتجمعة مع بعضها لتكوين العامل المحدد. وفي مثالنا الحالي نجد أن متغيري السرعة والقوة تجمعا في عامل واحد، والسرعة والقوة خاصيتان تحددان مدى قيمة السيارة أو جودتها، وبالتالي يمكن أن نسمي هذا العامل **"خصائص السيارة"**. أما العامل الآخر فعليه متغيران أيضا هما السعر وتكلفة البنزين، وكلاهما يتعلق بالتكلفة المادية، وبالتالي يمكن تسميته "تكلفة السيارة". فالتسمية ليست سهلة خاصة وأن المطلوب هو إيجاد إسم يناسب معظم المتغيرات المتشبعة بقوة مع العامل المعني.

الخطوة الثالثة درجات العوامل (Factor Scores)

بعد الانتهاء من استخراج العوامل الخاصة بظاهرة ما، يمكننا حساب درجات للمشاهدات على هذه العوامل، فبدلا من أن تكون هناك قيمة لكل مشاهدة على جميع المتغيرات يكون لكل مشاهدة درجة على كل عامل مستخرج. ويتم حساب درجات العوامل بطرق متعددة أشهرها الانحدار. وكما نلاحظ في بيانات المثال فقد تمت إضافة عمودين جديدين يحتويان على درجات جديدة للمشاهدات على كل عامل. إذا صار في البيانات متغيران (عاملان) إثنان فقط، وبالتالي يمكن استخدامهما الآن في هذا الوضع الجديد، أو يمكن إدخال هذه البيانات الجديدة في إجراء إحصائي آخر.

الجدول (7) درجات العوامل

	speed	power	cost	gallon	FAC1-1	FAC2-1
1	65.00	67.00	64.00	64.00	0.62230	1.75503
2	62.00	65.00	37.00	37.00	1.38404	-0.57941
3	45.00	43.00	40.00	40.00	-0.05304	-1.05094
4	34.00	35.00	62.00	62.00	-1.47855	0.42425
5	43.00	40.00	46.00	46.00	-0.43120	-0.64509
6	65.00	67.00	64.00	64.00	0.62230	1.75509
7	62.00	65.00	37.00	37.00	1.38404	0.30888
8	45.00	43.00	61.00	40.00	-0.41886	-1.02968
9	34.00	35.00	59.00	62.00	-1.42629	1.67811
10	43.00	40.00	36.00	46.00	-0.25700	-0.77170
11	65.00	67.00	62.00	64.00	0.65714	-0.24329
12	62.00	65.00	32.00	37.00	1.47114	0.30888
13	45.00	43.00	61.00	40.00	-0.41886	-1.02968
14	34.00	35.00	59.00	62.00	-1.42629	1.67811
15	43.00	40.00	36.00	46.00	-0.25700	-0.77170
16	65.00	67.00	62.00	64.00	0.65714	1.67811
17	62.00	65.00	32.00	37.00	1.47114	-0.77170
18	45.00	43.00	61.00	40.00	-0.41886	-0.24329
19	34.00	35.00	59.00	62.00	-1.42629	0.30888
20	43.00	40.00	36.00	46.00	-0.25700	-1.02968

هناك إجراء في غاية الأهمية في التحليل العاملي لم يتم التطرق إليه فيما سبق ألا وهو التدوير، وستتم مناقشته في المرحلة التالية:

المرحلة الرابعة: التدوير (Rotation)

التدوير عملية رياضية تتم على مصفوفة الارتباطات بهدف تحسين وضع العوامل المستخرجة، أي تكبير التشبعات الكبيرة وتقليل التشبعات القليلة، والسؤال المطروح لماذا نقوم بهذا لتدوير؟

من المعروف أن العوامل المستخرجة في التحليل العاملي هي التي تفسر أكبر مقدار من التباين، وأن عملية الاستخراج تتم بطرق رياضية بحتة. ومع ذلك فإن العوامل المستخرجة قد لا تمثل أفضل وضع يمكن الحصول عليه فيما يتعلق بفهم الظاهرة وتفسيرها، وقد يتم الحصول على الوضع الأفضل من خلال التدوير. وبعد التدوير قد لا يظل العامل الأول هو الذي يفسر أعلى نسبة من التباين، ولتوضيح أهمية التدوير في تحسين وضع العوامل المستخرجة نقارن بين حالتين: حالة بدون تدوير وحالة بتدوير (Varimax) على بيانات لمثال الخاص بالسيارات.

التدوير القائم:

سبق وأن حصلنا على الجدول (6) الذي يتضمن نتائج التحليل العاملي بدون التدوير. ولنجري الآن تطبيق خطوات التحليل العاملي مع التدوير من النوع (Varimax) لنحصل على النتائج في الجدول التالي:

الجدول (8) مصفوفة المركبات بعد التدوير القائم Rotated Component Matrix[a]

	Component	
	1	2
Speed	0.995	-0.071
Power	0.998	-0.025
Cost	-0.015	0.923
Gallon	-0.075	0.919

Extraction Method: Principal Component Analysis.
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.
a. Rotation converged in 3 iterations.

من خلال البيانات التي يحتويها الجدول (7) ومقارنتها بما يناظرها من بيانات في الجدول (5) (بدون تدوير) يتبين أن قيم التشبعات القوية قد تم تقويتها (أو تحسينها) وقيم التشبعات الأقل قد تم تخفيضها، بمعنى أنه تم تحسين وضع العوامل المستخرجة من خلال التدوير، وهي فائدة مباشرة ومهمة لعملية التدوير.

التدوير المائل:

ما يميز هذا النوع من التدوير أنه توجد ارتباكات بين العوامل المستخرجة فيه، وعند اجراء تدوير في التحليل العاملي تتم ملاحظة النتائج ومقارنتها واختيار الأفضل منها. وفيما يلي نجري تحليل عاملي مع تدوير من نوع (**Oblique**) فنحصل على النتائج التالية:

الجدول (9) مصفوفة التدوير المائل Pattern Matrix[a]

	Component	
	1	2
Speed	0.995	-0.023
Power	1.000	0.023
Cost	-0.030	0.926
Gallon	-0.031	0.918

Extraction Method: Principal Component Analysis.
Rotation Method: Oblimin with Kaiser Normalization.
a. Rotation converged in 3 iterations.

من خلال الجدول (9) نلاحظ أن عملية التدوير هنا قد حسنت أيضا من وضع العوامل المستخرجة مقارنة بالنموذج الأول بدون تدوير، ولتسهيل المقارنة سنعرض النتائج الثلاثة في جدول واحد كما يلي:

الجدول (10) نتائج التحليل العاملي الثلاثة قبل وبعد التدوير

	تحليل عاملي بدون تدوير		**تحليل عاملي قائم من نوع Varimax**		**تحليل عاملي مائل من نوع Oblimin**	
	Component		Component		Component	
	1	2	1	2	1	2
Speed	0.929	0.364	0.995	-0.071	0.995	-0.023
Power	0.911	0.407	0.998	-0.025	1.000	0.023
Cost	-0.411	0.827	-0.015	0.923	-0.030	0.926
Gallon	-0.463	0.797	-0.075	0.919	-0.031	0.918

نلاحظ في الجدول (10) أن قيم التشبعات قريبة جدا بين التدويرين لدرجة يصعب تفضيل أحدهما على الآخر، لكن هذا الوضع قد لا يحدث في بيانات أخرى، إذ عادة ما يكون الفرق في نتائج التدويرين واضحا لصالح أحدهما، والأفضل أن نجري أكثر من تدوير للبيانات وأن نختار في النهاية النموذج الأفضل من حيث قدرته على استخراج عوامل ترتبط بقوة مع المتغيرات التي تكون هذا العامل، وفي نفس الوقت لها ارتباطات ضعيفة مع بقية المتغيرات.