الفصل الخامس:
مقاييـــس الشكـــل

I- العـــزوم:

I-1- العـــزوم اللامركزية.

I-2- العـــزوم المركزية.

I-3- العلاقة بين العـــزوم المركزية والعزوم اللامركزية.

II- الالتواء:

II-1- معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة).

II-2- معامل بيرسون للالتواء.

II-3- معامل يول للالتواء.

III- التفرطح.

✓ تمـــارين محلـولـة.

الغرض من مقاييس الشكل، هو إعطاء صورة عن شكل (منحنى) انتشار القيم، وذلك لمعرفة مدى اعتباره مفرطح أو مدبب، ملتوي نحو اليمين أو نحو اليسار.

I- العـــزوم: عبارة عن قيم احصائية تكون حول نقطة البدء (الصفر)، أو حول المتوسط الحسابي، ورتبة العزم تتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن الصفر أو المتوسط الحسابي، ويتم دراستها هنا، لأنها تدخل في حساب مقاييس الشكل (التي هي محور دراستنا هنا).

I-1- العـــزوم اللامركزية: هي قيم احصائية من الرتبة r ($r \in N$)، تتمركز حول الصفر ($b=0$).

نرمز للعزم اللامركزي بـ $\boldsymbol{m_r}$، حيث r تشير إلى درجة العزم، فمثلا: $\boldsymbol{m_1}$ هو العزم اللامركزي الأول (من الدرجة الأولى)، $\boldsymbol{m_2}$ هو العزم اللامركزي الثاني (من الدرجة الثانية)، $\boldsymbol{m_3}$ هو العزم اللامركزي الثالث (من الدرجة الثالثة)،.....وهكذا.

أ- البيانات غير المبوبة: القانون العام للعزوم اللامركزية هو: $m_r = \frac{\sum x_i^r}{n}$

وبالتالي يكون: $m_1 = \frac{\sum x_i}{n}$، $m_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$، $m_3 = \frac{\sum x_i^3}{n}$،.......الخ.

ب- البيانات المبوبة:

- المتغير المنفصل: القانون العام في هذه الحالة هو:

$$m_r = \frac{\sum(F_i.x_i^r)}{\sum F_i} = \sum(Fr.x_i^r)$$

من خلال القانون العام يمكن حساب مختلف العزوم كالآتي:

$$m_1 = \frac{\sum(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \bar{X}\text{،}\quad m_2 = \frac{\sum(F_i.x_i^2)}{\sum F_i} = \sum(Fr.x_i^2)\text{،}\quad m_3 = \frac{\sum(F_i.x_i^3)}{\sum F_i} = \sum(Fr.x_i^3)\text{،...الخ.}$$

- المتغير المتصل: القانون العام في هذه الحالة هو:

$$m_r = \frac{\sum(F_i.c_i^r)}{\sum F_i} = \sum(Fr.c_i^r)$$

من خلال القانون العام يمكن حساب مختلف العزوم كالآتي:

$$m_1 = \frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \bar{X}\text{،}\quad m_2 = \frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i} = \sum(Fr.c_i^2)\text{،}\quad m_3 = \frac{\sum(F_i.c_i^3)}{\sum F_i} = \sum(Fr.c_i^3)\text{،...الخ.}$$

I-2- العـــزوم المركزية: هي قيم احصائية من الرتبة r ($r\in N$)، تتمركز حول الوسط الحسابي ($b=\bar{X}$).

نرمز للعزم اللامركزي بـ $\boldsymbol{U_r}$، حيث r تشير إلى درجة العزم، فمثلا: $\boldsymbol{U_1}$ هو العزم المركزي الأول (من الدرجة الأولى)، $\boldsymbol{U_2}$ هو العزم المركزي الثاني (من الدرجة الثانية)، $\boldsymbol{U_3}$ هو العزم المركزي الثالث (من الدرجة الثالثة)،.....وهكذا.

أ- البيانات غير المبوبة: القانون العام للعزوم المركزية هو: $U_r = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^r}{n}$

وبالتالي يكون: $U_1 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})}{n} = 0$، $U_2 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n} = \sigma_x^2$، $U_3 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^3}{n}$،.......الخ.

ب- البيانات المبوبة:

- المتغير المنفصل: القانون العام في هذه الحالة هو: $U_r = \frac{\sum[F_i.(x_i-\bar{X})^r]}{\sum F_i}$

ومنه يكون: $U_1 = \frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{x_i}-\bar{\boldsymbol{X}})]}{\sum \boldsymbol{F_i}} = 0$، $U_2 = \frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{x_i}-\bar{\boldsymbol{X}})^2]}{\sum \boldsymbol{F_i}} = \sigma_x^2$،

$U_3 = \frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{x_i}-\bar{\boldsymbol{X}})^3]}{\sum \boldsymbol{F_i}}$،....الخ.

- المتغير المتصل: القانون العام في هذه الحالة هو: $U_r = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^r]}{\sum F_i}$

ومنه يكون: $U_1 = \frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{c_i}-\bar{\boldsymbol{X}})]}{\sum \boldsymbol{F_i}} = 0$، $U_2 = \frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{c_i}-\bar{\boldsymbol{X}})^2]}{\sum \boldsymbol{F_i}} = \sigma_x^2$،

$U_3 = \frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{c_i}-\bar{\boldsymbol{X}})^3]}{\sum \boldsymbol{F_i}}$،....الخ.

I-3- العلاقة بين العـــزوم المركزية والعزوم اللامركزية:

$$U_2 = m_2 - m_1^2$$

$$U_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$U_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

II- الالتواء:

II-1- معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة):

$$\gamma_F = \frac{U_3}{\sigma_x^3}$$

II-2- معامل بيرسون للالتواء: وهنا يمكن أن نميز بين:

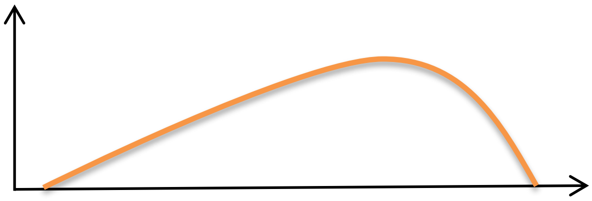
معامل بيرسون الأول $\gamma_1 = \frac{\bar{X}-Mo}{\sigma_x}$ معامل بيرسون الثاني: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X}-Me)}{\sigma_x}$

II-3- معامل يول للالتواء: يعتمد على الرُبيعيات، وبالتالي عكس المعاملات السابقة التي تعتمد على الوسط الحسابي وبالتالي لا يمكن استخدامها في الجداول المفتوحة؛ لأنه لا يمكن في الجداول المفتوحة حساب الوسط الحسابي، فإن هذا المعامل يمكن استخدامه في الجداول المغلقة والمفتوحة، ويُرمز له بـ : $\boldsymbol{\gamma_3}$ ، حيث:

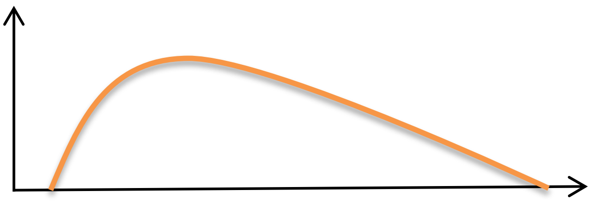
$$\gamma_3 = \frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}$$

ملاحظة: من خلال قيم معاملات الالتواء يمكن أن نحكم على شكل الالتواء، وليس شرط أن تدل كل المعاملات على نفس الاتجاه للالتواء؛ أي أنه قد يكون حسب بعض قيم المعاملات فإن شكل التوزيع ملتوي نحو اتجاه معين، وحسب معاملات أخرى فإن شكل التوزيع ملتوي نحو اتجاه آخر، ويمكن التمييز بين الحالات الثلاثة الآتية:

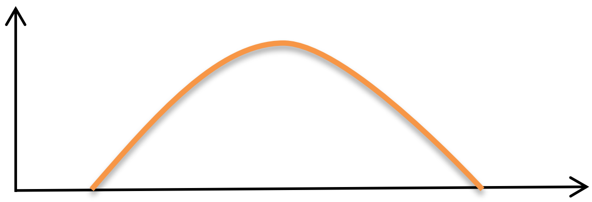
- الالتواء سالب (التواء نحو اليسار): معناه تكون قيمة المعامل أقل تماما من الصفر (قيمة سالبة)، ويكن شكل الالتواء كالآتي:



- الالتواء موجب (التواء نحو اليمين): معناه تكون قيمة المعامل أكبر تماما من الصفر (قيمة موجبة)، ويكن شكل الالتواء كالآتي:



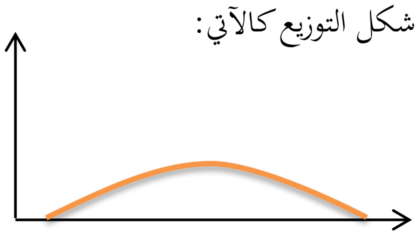
– غير ملتوي: معناه تكون قيمة المعامل تساوي الصفر، ويكون شكل الالتواء متناظر؛ أي أن الجزء على اليمين من قمة المنحنى (الذروة) يطابق ويناظر الجزء على اليسار، وذلك كالآتي:



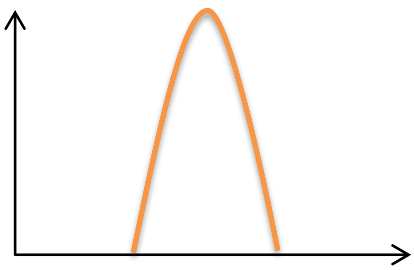
III– التفرطح: يُرمز لمعامل التفرطح بـ $\boldsymbol{K}$، حيث: $K=\frac{U_4}{U_2^2}=\frac{u_4}{\sigma_x^4}$

ونميز بين الحالات الآتية:

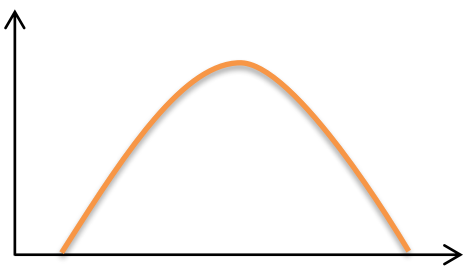
– إذا كان: $K< 3$ فإن التوزيع مفرطح، ويكون شكل التوزيع كالآتي:



– إذا كان: $K>3$ فإن التوزيع مدبب؛ ويكون شكل التوزيع كالآتي:



– إذا كان: $K=3$ فيكون التوزيع معتدل القمة؛ ويكون شكل التوزيع كالآتي:



ملاحظة: قد يكون الشكل يأخذ أحد حالات التفرطح، وفي نفس الوقت يأخذ أي حالة من حالات الالتواء، فمثلا قد يكون الشكل مفرطح وملتوي نحو اليسار، أو مدبب وغير ملتوي،...الخ.

تمارين محلولة

تمرين (1-5): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
F_i	8	15	16	24	12

المطلوب:

1- حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4؟

2- حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4؟

3- استنتاج شكل الالتواء لهذا التوزيع؟

4- حساب مختلف معاملات الالتواء، وما هو شكل الالتواء لهذا التوزيع؟

5- حساب معامل التفرطح K، وهل التوزيع مفرطح القمة؟

الحل:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	Σ
c_i	55	65	75	85	95	//
F_i	8	15	16	24	12	75
$F_i.c_i^3$	1331000	4119375	6750000	14739000	10288500	37227875
$F_i.c_i^4$	73205000	267759375	506250000	1252815000	977407500	3077436875
$(c_i-\bar{X})^3$	-11039,96	-1845,79	-11,65	462,48	5576,59	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^3$	-88319,68	-27668,85	-186,4	11099,52	66919,08	-38156,65
$(c_i-\bar{X})^4$	245823,52	22641,80	26,40	3576,51	98891,34	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^4$	1966588,16	339627	422,4	85836,24	1186696,08	3579169,88

1- حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4:

$$m_1=\frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i}=\bar{X}\approx 77,26667 \quad \text{(تم حسابه سابقا)}$$

$$m_2=\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i}=\left(\sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i}}\right)^2=(MQ)^2=(78{,}2538)^2\approx 6123{,}6667$$

$$m_3=\frac{\sum(F_i.c_i^3)}{\sum F_i}=\frac{37227875}{75}\approx 496371{,}6667$$

$$m_4=\frac{\sum(F_i.c_i^4)}{\sum F_i}=\frac{3077436875}{75}=41032491{,}67$$

2- حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4:

$$U_1=\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})]}{\sum F_i}=0$$

$$U_2=\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^2]}{\sum F_i}=\sigma_x^2=(12{,}3906)^2\approx 153{,}53$$ (تم حساب x سابقا)

$$U_3=\frac{\sum\left[F_i.(c_i-\bar{X})^3\right]}{\sum F_i}=\frac{-38156{,}65}{75}\approx -508{,}75$$

$$U_4=\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^4]}{\sum F_i}=\frac{3579169{,}88}{75}\approx 47722{,}26$$

3- استنتاج شكل الالتواء لهذا التوزيع: مما سبق وجدنا أن: $\bar{X}=77{,}27$، $Me=79{,}06$، $Mo=84$، إذن نلاحظ أن: $Mo=84>Me=79{,}06>\bar{X}=77{,}2667$، إذن يمكن أن نستنتج مسبقا أن التوزيع ملتوي نحو اليسار؛ أي سالب الالتواء.

4- حساب مختلف معاملات الالتواء:

- معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة):

$$\gamma_F=\frac{U_3}{\sigma_x^3}=\frac{-508{,}75}{(12{,}39)^3}=\frac{-508{,}75}{1902{,}01}\approx -0{,}27$$

- معامل بيرسون للالتواء:

معامل بيرسون الأول: $$\gamma_1=\frac{\bar{X}-Mo}{\sigma_x}=\frac{(77{,}27-84)}{12{,}39}\approx -0{,}54$$

معامل بيرسون الثاني: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X}-Me)}{\sigma_x} = \frac{3(77,27-79,06)}{12,39} = \frac{-5,37}{12,39} \approx -0,43$

– **معامل يول للالتواء:** وجدنا قبل أن: $Q_1 = 67,17$، $Q_3 = 87,19$، $Me = Q_2 = 79,06$، إذن يمكن حساب معامل يول كالآتي:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{(87,19 - 79,06) - (79,06 - 67,17)}{(87,19 - 67,17)}$$
$$= \frac{18,13 - 11,89}{20,02} \approx 00,31$$

نلاحظ أن مختلف معاملات الالتواء التي تم حسابها، ذات قيم سالبة (باستثناء معامل يول)، إذن فالتوزيع هو سالب الالتواء (ملتوي نحو اليسار)، وهذا من منطلق أغلب معاملات الالتواء المحسوبة، وهذا ما يؤكد استنتاجه سابقا.

5– حساب معامل التفرطح: $K = \frac{U_4}{U_2^2} = \frac{u_4}{\sigma_x^4} = \frac{47722,26}{(12,39)^4} = \frac{47722,26}{23565,96} \approx 02,025$

نلاحظ أن $K<3$، إذن فالتوزيع مفرطح القمة.

تمرين (5–2): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[00–02[	[02–04[	[04–06[	[06–08[	[08–10[
F_i	03	05	08	06	02

المطلوب:

1– حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4؟

2– حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4؟

3– استنتاج قيمة العزوم المركزية: U_2، U_3، U_4، وهذا بالاعتماد على قيمة العزوم اللامركزية؟

4– حساب مختلف معاملات الالتواء، وما هو شكل الالتواء لهذا التوزيع؟

5– حساب معامل التفرطح K، وهل التوزيع مفرطح القمة؟

الحل:

الفئات	[00-02[	[02-04[	[04-06[	[06-08[	[08-10 [	Σ
c_i	01	03	05	07	09	//
F_i	03	05	08	06	02	24
$F_i.c_i$	03	15	40	42	18	118
$F_i.c_i^2$	03	45	200	294	162	704
$F_i.c_i^3$	03	135	1000	2058	1458	4654
$F_i.c_i^4$	03	405	5000	14406	13122	32936
$(c_i-\bar{X})^2$	15,34	03,67	0,0069	04,34	16,67	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^2$	46,02	18,35	0,055	26,04	33,34	123,805
$(c_i-\bar{X})^3$	-60,10	-07.04	0,00057	09,04	68,07	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^3$	-180,3	-35,2	0,00456	54,24	136,14	-25,115
$(c_i-\bar{X})^4$	235,40	13,50	0,000047	18,82	277,92	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^4$	706,2	67,5	0,000376	112,92	555,84	1442,46
Fcc	00	03	08	16	22	24

1– حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4:

$$m_1=\frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i}=\bar{X}=\frac{118}{24}\approx 04{,}917$$

$$m_2=\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i}=\frac{704}{24}\approx 29{,}33$$

$$m_3=\frac{\sum(F_i.c_i^3)}{\sum F_i}=\frac{4654}{24}\approx 193{,}92$$

$$m_4=\frac{\sum(F_i.c_i^4)}{\sum F_i}=\frac{32936}{24}=1372{,}33$$

2– حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4:

$$U_1=\frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{c_i}-\bar{\boldsymbol{X}})]}{\sum \boldsymbol{F_i}}=0$$

$$U_2=\frac{\sum[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{c_i}-\bar{\boldsymbol{X}})^2]}{\sum \boldsymbol{F_i}}=\sigma_x^2=\frac{123{,}805}{24}\approx 05{,}158$$

$$U_3=\frac{\sum\left[F_i.(c_i-\bar{X})^3\right]}{\sum F_i}=\frac{-25{,}115}{24}\approx -01{,}046$$