

# Chapitre 2 : STATIQUE DES FLUIDES

## 1 INTRODUCTION

Lors d'une plongée sous marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous marins, les réservoirs... etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.

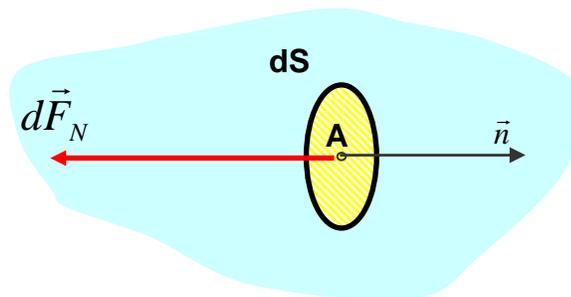
Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués.

Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir...etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

## 2 NOTION DE PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$$P_A = \frac{\|\vec{dF}_N\|}{dS}$$

où :

$dS$  : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$  : Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$\vec{dF}_N$  : Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

$P_A$  : pression en A (en Pascal),

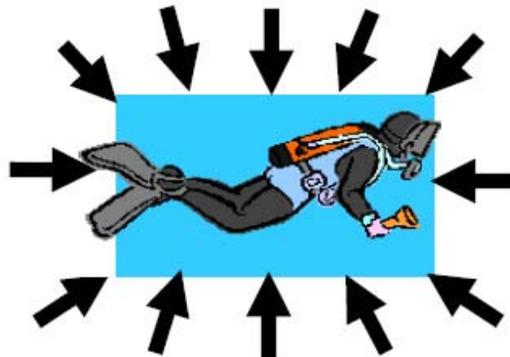
Sur la surface de centre A, d'aire  $dS$ , orientée par sa normale extérieure  $\vec{n}$ , la force de pression élémentaire  $\vec{dF}$  s'exprime par :

$$\vec{dF}_N = -P_A \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Exemple : Chaque  $\text{cm}^2$  de surface de notre peau supporte environ 1 kg (force) représentant le poids de l'atmosphère. C'est la pression atmosphérique au niveau de la mer. Nous ne la ressentons pas car notre corps est incompressible et ses cavités (estomac, poumons, etc. ) contiennent de l'air à la même pression.

Si on s'élève de 5 000 m, la pression atmosphérique est deux fois plus faible qu'au niveau de la mer car la masse d'air au-dessus de notre tête est alors moitié moindre. D'où la nécessité d'une pressurisation des avions.

En plongée sous-marine, pour mesurer la pression, on utilise le plus souvent le bar: 1 bar = 1 kg /  $\text{cm}^2$ .



Plus on descend en profondeur, plus la pression est élevée car il faut tenir compte du poids de l'eau au-dessus de nous : à 10 mètres de profondeur, chaque  $\text{cm}^2$  de notre peau supportera un poids égal à :

$1 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ m (profondeur)} = 1 \text{ cm}^2 \times 100 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^3 =$  l'équivalent du poids d'1 litre d'eau. Le poids d'un litre d'eau douce est égal à 1kg. Le poids d'un litre d'eau de mer est un peu plus important (à cause du sel qu'elle contient) : 1,026 kg.

En négligeant cette différence, on considérera que de manière générale un litre d'eau pèse 1 kg.

Par conséquent, la pression due à l'eau à 10 m de profondeur est donc de  $1 \text{ kg} / \text{cm}^2$ , c'est-à-dire 1 bar. Si on descend à nouveau de -10 m, la pression augmentera à nouveau de 1 bar. C'est ce qu'on appelle la pression hydrostatique (pression due à l'eau). On l'appelle aussi pression relative car c'est une pression par rapport à la surface.

La pression hydrostatique (comme la pression atmosphérique) s'exerce dans toutes les directions (et pas simplement de haut en bas).

Remarque :

L'unité internationale de pression est le Pascal :  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ . Cette unité est très petite. On utilise le plus souvent ses multiples. En construction mécanique, résistance des matériaux, etc., l'unité utilisée est le méga pascal :

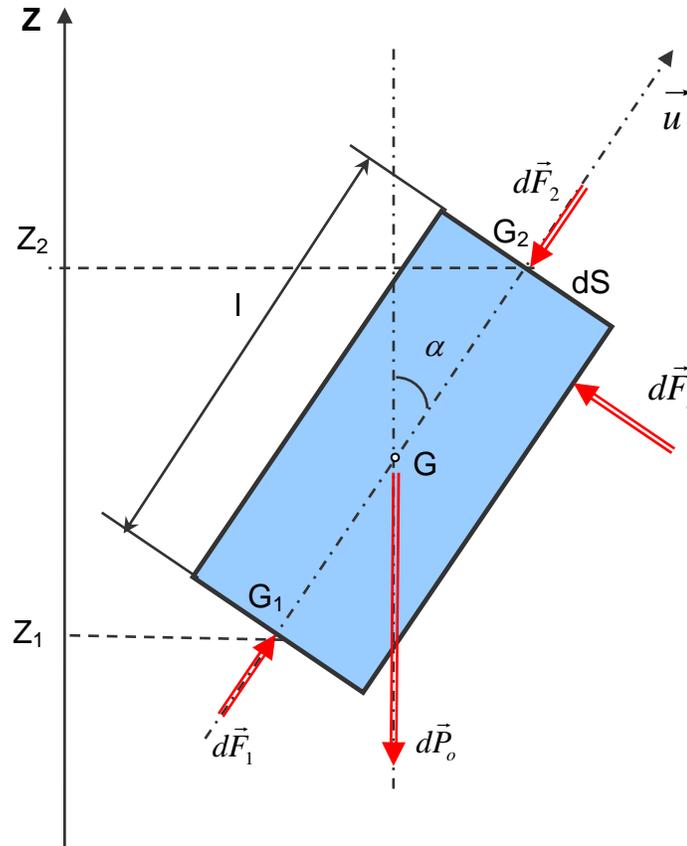
$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 10^6 \text{ Pa}$$

En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa.}$$

### 3 *RELATION FONDAMENTALE DE L'HYDROSTATIQUE*

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique  $\varpi$ ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{u})$  qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe vertical  $(O, \vec{Z})$  d'un repère  $R(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . Soit  $l$  la longueur du cylindre et soit  $dS$  sa section droite.



Soit  $G_1$  d'altitude  $Z_1$  et  $G_2$  d'altitude  $Z_2$ , les centres des sections droites extrêmes. Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- actions à distance : son poids :  $\vec{dP}_o = -\varpi l dS \vec{Z}$
- actions de contact : forces de pression s'exerçant sur :
  - o la surface latérale :  $\Sigma \vec{dF}_i$ .
  - o les deux surfaces planes extrêmes :  $\vec{dF}_1 = -P_1.dS.(-\vec{u}) = P_1.dS.\vec{u}$  et  $\vec{dF}_2 = -P_2.dS.\vec{u}$  avec  $P_1$  et  $P_2$  les pressions du fluide respectivement en  $G_1$  et en  $G_2$ .

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\vec{dP}_o + \Sigma \vec{dF}_i + \vec{dF}_1 + \vec{dF}_2 = \vec{0}$$

En projection sur l'axe de symétrie  $(G, \vec{u})$  du cylindre,

$$-\varpi.l.dS.\cos\alpha + P_1.dS - P_2.dS = 0$$

Exprimons la différence de pression  $P_1 - P_2$  après avoir divisé par  $dS$  et remarqué que  $l \cdot \cos \alpha = Z_2 - Z_1$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \varpi \cdot (Z_2 - Z_1) = \rho g (Z_2 - Z_1)} : \text{Relation fondamentale de l'hydrostatique.}$$

Autre forme plus générale :

En divisant les deux membres de la relation précédente par  $\varpi$  :

$$\frac{P_1}{\varpi} + Z_1 = \frac{P_2}{\varpi} + Z_2. \text{ Ou encore } \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

Comme  $G_1$  et  $G_2$  ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique  $\varpi$ , on peut écrire en un point quelconque d'altitude  $Z$ , ou règne la pression  $p$  :

$$\boxed{\frac{P}{\varpi} + Z = \frac{P}{\rho g} + Z = Cte}$$

## 4 THEOREME DE PASCAL

### 4.1 Enoncé

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

### 4.2 Démonstration

Supposons qu'au point  $G_1$  intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne  $P_1 + \Delta P_1$ .  $\Delta P_1$  étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression  $\Delta P_2$  qui en résulte en  $G_2$ .

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre  $G_1$  et  $G_2$  pour le fluide

- à l'état initial:  $P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1)$  (1)
- à l'état final :  $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \varpi \cdot (Z_2 - Z_1)$  (2)

En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient :

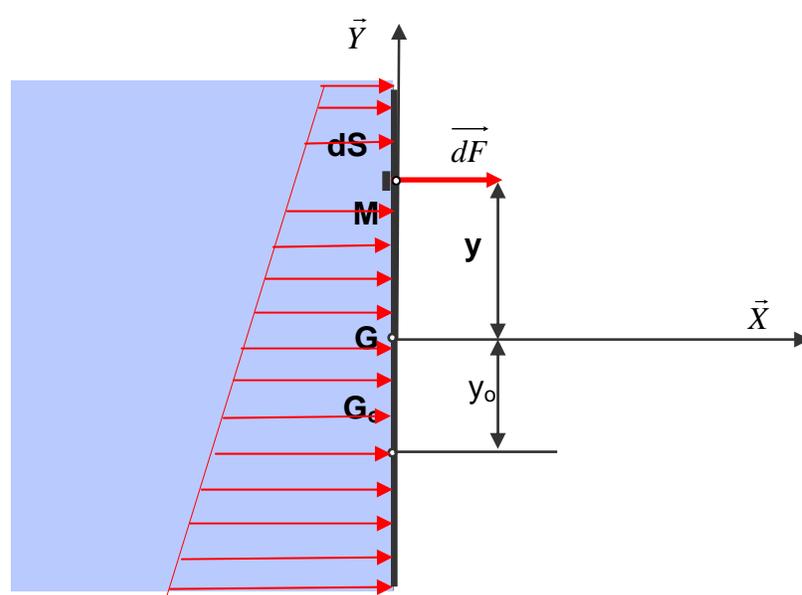
$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0.$$

$$\text{D'où } \boxed{\Delta P_1 = \Delta P_2}$$

## 5 POUSSEE D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI VERTICALE

### 5.1 Hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie  $(G, \vec{Y})$ . G est son centre de surface. D'un côté de la paroi il y a un fluide de poids volumique  $\varpi$ , de l'autre côté, il y a de l'air à la pression atmosphérique  $P_{\text{atm}}$ . On désigne par  $P_G$  la pression au centre de surface G du côté fluide.



### 5.2 Éléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression  $P_G$  au point G, la pression  $P_M$  au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique :  $P_M - P_G = \varpi.(Y_G - Y_M)$

Dans le repère  $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  défini sur la figure :  $y_G=0$  et  $y_M=y$ , donc  $P_M = P_G - \varpi.y$

Exprimons la force de pression en M :  $d\vec{F} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

Soit  $\{\tau_{\text{poussée}}\}$  le torseur associé aux forces de pression relative :

$$\{\tau_{\text{poussée}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \int d\vec{F} \\ \vec{M}_G = \int_s \vec{GM} \wedge d\vec{F} \end{array} \right\}_G$$

### 5.2.1 Résultante

$$\vec{R} = \int_{(S)} (P_G - \varpi \cdot y) \cdot dS \cdot \vec{X}$$

que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{R} = \left[ P_G \cdot \int_{(S)} dS - \varpi \cdot \int_{(S)} y \cdot dS \right] \cdot \vec{X}$$

On note que  $\int_{(S)} dS = S$  (aire de la paroi),

$\int_{(S)} y \cdot dS = y_G \cdot S = 0$  : Moment statique de la surface S par rapport à l'axe  $(G, \vec{Z})$ , donc

$$\boxed{\vec{R} = P_G \cdot S \cdot \vec{X}}$$

### 5.2.2 Moment

$$\vec{M}_G = \int \vec{GM} \wedge d\vec{F}$$

Dans le repère  $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  on peut écrire:

$$\vec{GM} = y \cdot \vec{Y} \text{ et } d\vec{F} = (P_G - \varpi \cdot y) \cdot dS \cdot \vec{X},$$

$$\text{donc } \vec{M}_G = \int_{(S)} [y \cdot \vec{Y} \wedge (P_G - \varpi \cdot y) \cdot dS \cdot \vec{X}]$$

$$\text{Sachant que } \vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{Z} \text{ donc } \vec{M}_G = \left[ P_G \cdot \int_{(S)} y \cdot dS - \varpi \cdot \int_{(S)} y^2 \cdot dS \right] \cdot (-\vec{Z})$$

On sait que  $\int_{(S)} y \cdot dS = y_G \cdot S = 0$  et  $\int_{(S)} y^2 \cdot dS = I_{(G, \vec{Z})}$  : Moment quadratique de la

surface S par rapport à l'axe  $(G, \vec{Z})$  passant par le centre de surface G. Donc

$$\boxed{\vec{M}_G = \varpi \cdot I_{(G, \vec{Z})} \cdot \vec{Z}}$$

En résumé :

$$\boxed{\left\{ \tau_{poussée} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} P_G \cdot S \cdot \vec{X} \\ \varpi \cdot I_{(G, \vec{Z})} \cdot \vec{Z} \end{array} \right\}_G}$$

### 5.3 Centre de poussée

On cherche à déterminer un point  $G_0$  où le moment résultant des forces de pression est nul.

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe  $(G, \vec{Y})$  et il est tel que :

$$\vec{M}_{G_0} = \vec{M}_G + \vec{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}.$$

Ecrivons alors que :  $\vec{GG_0} \wedge \vec{R} = \vec{M}_G$

Avec les résultats précédents, on obtient :  $y_0 \cdot \vec{Y} \wedge P_G \cdot S \cdot \vec{X} = \varpi \cdot I_{(G, \vec{Z})} \cdot \vec{Z}$ ,

ce qui conduit à

$$y_0 = -\frac{\varpi \cdot I_{(G, \vec{Z})}}{P_G \cdot S}$$

$G_0$  existe, il s'appelle le centre de poussée de la paroi.

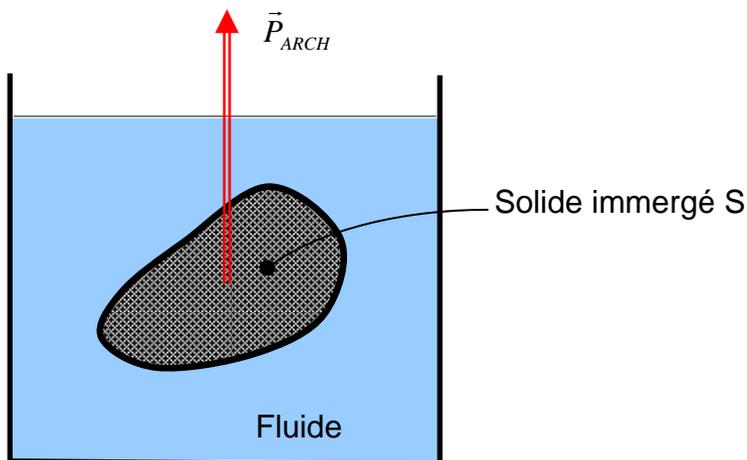
Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface  $G$ .

## 6 THEOREME D'ARCHIMEDE

### 6.1 Énoncé

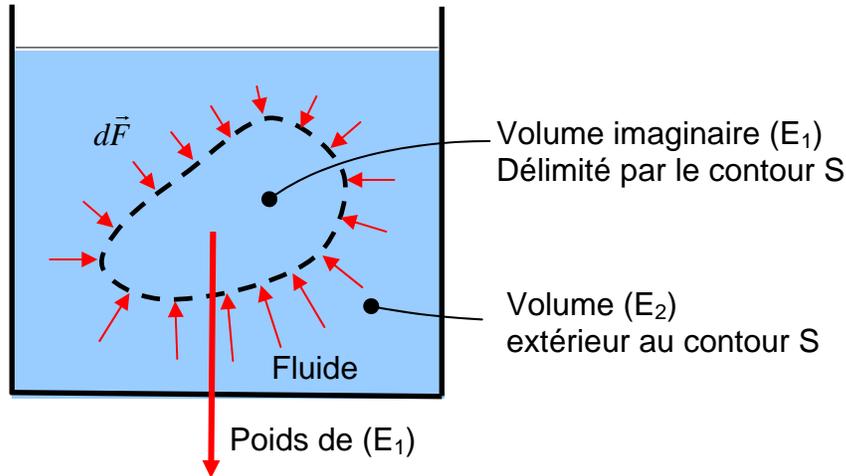
Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

$$P_{ARCH} = \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g$$



## 6.2 Démonstration

Dans un fluide (E) de poids volumique  $\varpi$ , imaginons un certain volume de fluide ( $E_1$ ) délimité par un contour fermé (S) :



Si le fluide est au repos, il est évident que ( $E_1$ ) est en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures suivantes :

- Action de la pesanteur, modélisable par le torseur :  $\{\tau(pes \rightarrow E_1)\}$
- Action des forces de pression  $d\vec{F}$  du fluide ( $E_2$ ) qui entoure ( $E_1$ ) modélisable par le torseur :  $\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\}$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre de ( $E_1$ ) :  $\{\tau(pes \rightarrow E_1)\} + \{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\} = \{\vec{0}\}$

Nous savons qu'en G, centre de gravité du fluide ( $E_1$ ) le torseur des forces de pesanteur se réduit à un glisseur :  $\{\tau(pes \rightarrow E_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$

Il est donc évident qu'au même point G le torseur des forces de pression  $\overrightarrow{dF}$  se réduira lui aussi à un glisseur :

$$\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

L'équation d'équilibre de la portion de fluide ( $E_1$ ) s'écrit :  $\int_{(S)} \overrightarrow{dF} + \vec{P} = \vec{0}$

( $E_1$ ) est ici une portion de fluide et  $\vec{P}$  est le poids du fluide occupant le volume ( $E_1$ ). Si le volume ( $E_1$ ) est occupé par un solide immergé ayant le même contour  $S$ , les forces de poussée sur ce contours ( $S$ ) sont les mêmes, ce qui revient à dire que la force de poussée ne dépend que du volume du fluide déplacé et non pas de la nature du solide immergé (plomb, acier, etc).

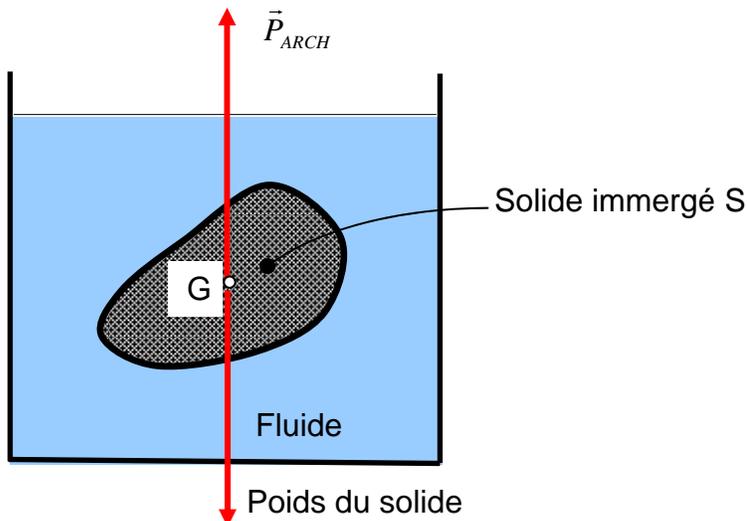
**Conclusion :**

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à des forces de pression  $d\vec{F}$  dont les actions mécaniques sont modélisables au centre de gravité du fluide déplacé par un glisseur dont la résultante est directement opposée au poids du fluide déplacé.

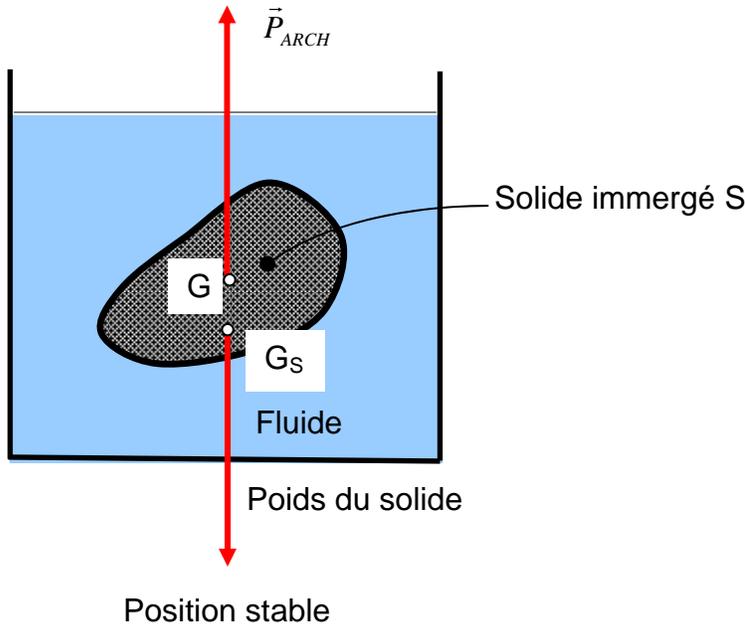
$$\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

**Remarques :**

- 1<sup>er</sup> cas : Si le solide immergé est homogène alors le centre de poussée  $G$ , point d'application de la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide. L'équilibre du solide est indifférent.



- 2<sup>ième</sup> cas : Si le solide immergé est hétérogène alors le centre de poussée  $G$ , point d'application de la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité  $G_s$  du solide. L'équilibre du solide est stable si  $G$  est au dessus de  $G_s$ . L'équilibre du solide est instable si  $G$  est au dessous de  $G_s$ .



## 7 CONCLUSION

La statique des fluides est basée principalement sur les résultats suivants:

a) La différence de pression entre deux points est proportionnelle à leur différence de profondeur :  $P_1 - P_2 = \varpi \cdot (Z_2 - Z_1) = \rho g (Z_2 - Z_1)$ :

C'est la **relation fondamentale de l'hydrostatique**,

b) Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en tout autre point d'après le **théorème de Pascal**.

c) Le torseur associé aux forces de pression d'un fluide sur une paroi plane

verticale est :

$$\left\{ \tau_{poussee} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} P_G \cdot S \cdot \vec{X} \\ \varpi \cdot I_{(G, \vec{Z})} \cdot \vec{Z} \end{array} \right\}_G$$

d) La position du centre de poussée. est  $y_0 = - \frac{\varpi \cdot I_{(G, \vec{Z})}}{P_G \cdot S}$

e) Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, orientée vers le haut **c'est la poussée d'Archimède** et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.

## 8 EXERCICES D'APPLICATION

### Exercice N° 1: Extrait du devoir surveillé du 30-10-2006

#### 1 ENONCE

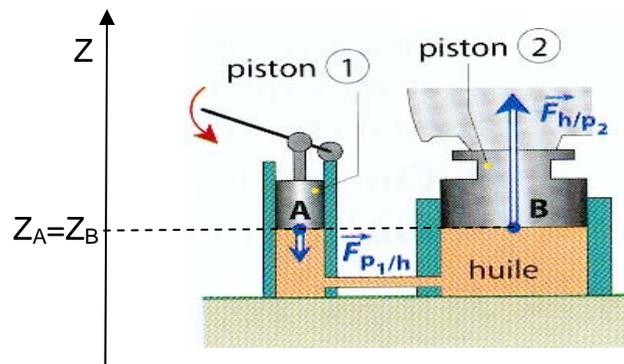
La figure ci-dessous représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire.

Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit, au point (A), par une force de pression  $\vec{F}_{p1/h}$  sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force

$\vec{F}_{h/p2}$

On donne :

- les diamètres de chacun des pistons :  $D_1 = 10 \text{ mm}$ ;  $D_2 = 100 \text{ mm}$ .
- l'intensité de la force de pression en A :  $F_{p1/h} = 150 \text{ N}$ .



Travail demandé :

- 1) Déterminer la pression  $P_A$  de l'huile au point A.
- 2) Quelle est la pression  $P_B$  ?
- 3) En déduire l'intensité de la force de pression  $F_{h/p2}$ .

#### 2 REPONSE

1) Pression  $P_A$  de l'huile au point A: 
$$P_A = \frac{4 \cdot F_{p1/h}}{\pi \cdot D_1^2} \text{ A.N} \quad P_A = \frac{4 \cdot 150}{\pi \cdot 0,01^2} = 19 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2) RfH entre A et B: 
$$P_A - P_B = \varpi \cdot (Z_B - Z_A), \text{ or } Z_A = Z_B \text{ donc } P_B = P_A = 19 \cdot 10^5 \text{ Pascal}$$

3) Force de pression en B : 
$$F_{h/p2} = P_B \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \text{ .N.} \quad F_{h/p2} = 19 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 14922,56 \text{ N}$$

**Commentaire:** On constate que la force  $F_{p1/h} = 150 \text{ N}$  est relativement faible par rapport à  $F_{h/p2} = 14922,56 \text{ N}$ . Avec ce système nous avons atteint un rapport de

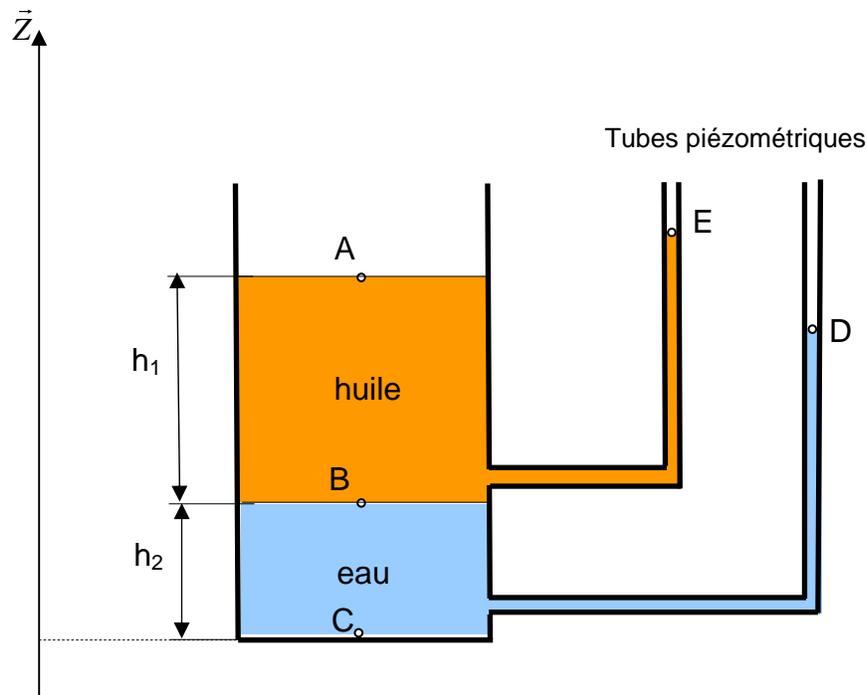
*réduction de force de presque 100. Ce rapport correspond au rapport des diamètres des cylindres. On utilise souvent le même principe de réduction d'effort dans plusieurs applications hydrauliques (exemple: presse hydraulique).*

**Exercice N°2:** EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2004

**1** ENONCE

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique  $\rho_1=850 \text{ kg/m}^3$  sur une hauteur  $h_1=6 \text{ m}$ ,
- de l'eau de masse volumique  $\rho_2=1000 \text{ kg/m}^3$  sur une hauteur  $h_2=5 \text{ m}$ .



On désigne par:

- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentant les niveaux dans les tubes piézométriques,
- $(O, \vec{z})$  est un axe vertical tel que  $Z_C=0$ .

Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points:

- 1)** B et A. En déduire la pression  $P_B$  (en bar) au point B.
- 2)** A et E. En déduire le niveau de l'huile  $Z_E$  dans le tube piézométrique.

- 3) C et B. En déduire la pression  $P_C$  (en bar) au point C.  
 4) C et D. En déduire le niveau de l'eau  $Z_D$  dans le tube piézométrique.

**2** REPONSE

1) RFH entre B et A :  $P_B - P_A = \rho_1 g (Z_A - Z_B)$  Or  $P_A = P_{atm}$  et  $Z_A - Z_B = h_1$

Donc  $P_B = P_{atm} + \rho_1 g \cdot h_1$  A.N.  $P_B = 10^5 + 850 \cdot 9,81 \cdot 6 = 150031 Pa = 1,5 bar$

2) RFH entre A et E :  $P_A - P_E = \rho_1 g (Z_E - Z_A)$  Or  $P_A = P_E = P_{atm}$

Donc  $Z_E = Z_A = h_1 + h_2$  A.N.  $Z_E = 6 + 5 = 11 m$

3) RFH entre C et B :  $P_C - P_B = \rho_2 g (Z_B - Z_C)$  Or  $Z_B - Z_C = h_2$

Donc  $P_C = P_B + \rho_2 g \cdot h_2$  A.N.  $P_C = 150031 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 5 = 199081 Pa = 2 bar$

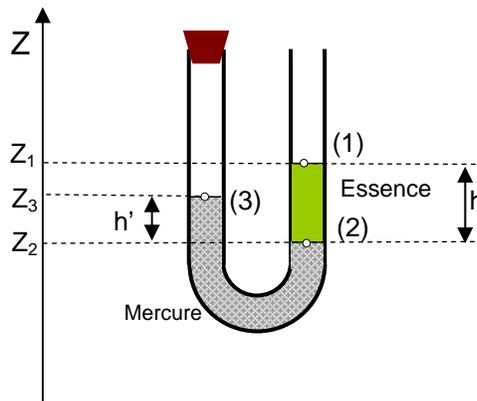
4) RFH entre C et D :  $P_C - P_D = \rho_2 g (Z_D - Z_C)$  Or  $P_D = P_{atm}$  et  $Z_C = 0$

Donc  $Z_D = \frac{P_C - P_{atm}}{\rho_2 \cdot g}$  A.N.  $Z_D = \frac{199081 - 10^5}{1000 \cdot 9,81} = 10,1 m$

**Exercice N° 3:** EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2007

**1** ENONCE

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique  $\rho_{essence} = 700 \text{ kg/m}^3$ .
- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique  $\rho_{mercure} = 13600 \text{ kg/m}^3$ .

La pression au-dessus de la surface libre (1) est  $P_1 = P_{atm} = 1 \text{ bar}$ .

L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression  $P_3$  qu'on cherche à calculer.

**1)** En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) pour l'essence, calculer la pression  $P_2$  (en mbar) au niveau de la surface de séparation  
(2) sachant que  $h = (Z_1 - Z_2) = 728$  mm.

**2)** De même, pour le mercure, calculer la pression  $P_3$  (en mbar) au niveau de la surface de la surface (3) sachant que  $h' = (Z_3 - Z_2) = 15$  mm.

## 2 REPONSE

**1)** RFH pour l'essence :  $P_2 - P_1 = \rho_{essence} \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2)$

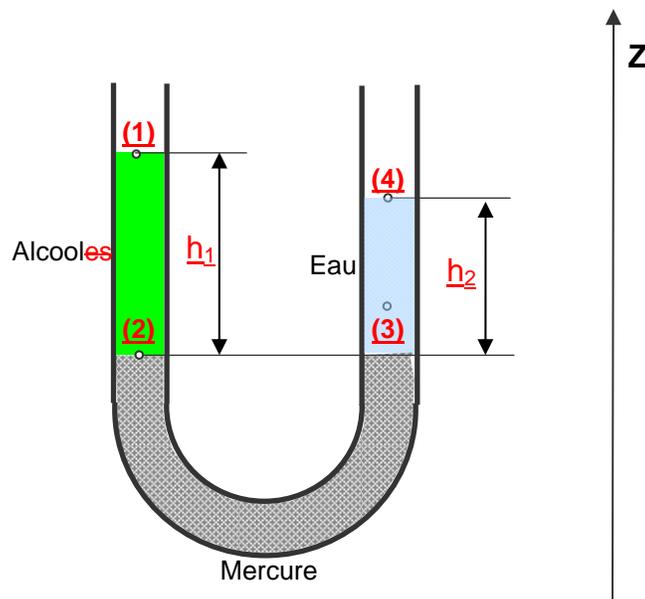
$$P_2 = P_1 + \rho_{essence} \cdot g \cdot h \quad \text{A.N.} \quad P_2 = 10^5 + 700 \cdot 9,8 \cdot 0,728 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ pascal} = 1050 \text{ mbar}$$

**2)** RFH pour le mercure :  $P_2 - P_3 = \rho_{mercure} \cdot g \cdot (Z_3 - Z_2)$

$$P_3 = P_2 - \rho_{mercure} \cdot g \cdot h' \quad \text{A.N.} \quad P_3 = 1050 \cdot 10^3 - 13600 \cdot 9,8 \cdot 0,015 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ pascal} = 1030 \text{ mbar}$$

## Exercice N°4: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 21-04-2003

### 1 ENONCE



Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau - alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur  $h_1 = 30$  cm. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure de masse volumique  $1000 \text{ kg/m}^3$ , jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau  $h_2 = 24$  cm.

**1)** Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour les trois fluides.

2) En déduire la masse volumique du mélange eau – alcool éthylique.

**2** REPONSE

1) Relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\text{Alcool : } P_2 - P_1 = \rho_{\text{alcool}} \cdot g \cdot h_1$$

$$\text{Mercure : } P_2 - P_3 = 0$$

$$\text{Eau : } P_3 - P_4 = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h_2$$

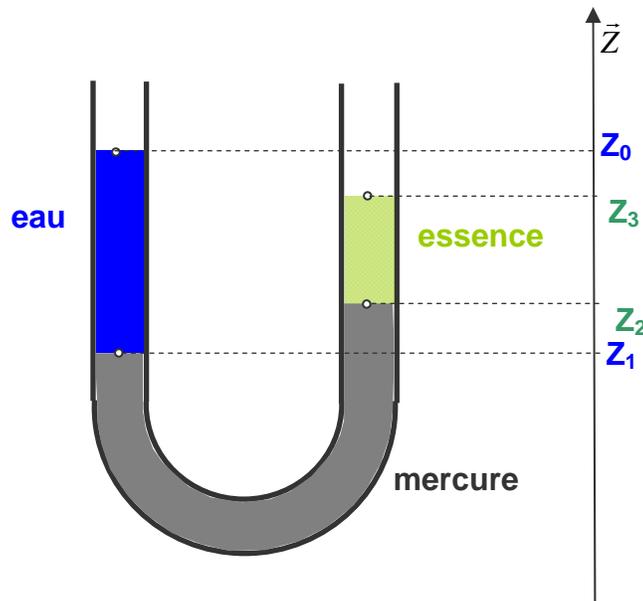
2) On sait que  $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$  et  $P_2 = P_3$  donc  $\rho_{\text{alcool}} \cdot g \cdot h_1 = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h_2$

Donc  $\rho_{\text{alcool}} = \rho_{\text{eau}} \cdot \frac{h_2}{h_1}$  A.N.  $\rho_{\text{alcool}} = 1000 \cdot \frac{24}{30} = 800 \text{ kg / m}^3$

**Exercice N° 5:**

**1** ENONCE

On considère un tube en U contenant trois liquides:



- de l'eau ayant une masse volumique  $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- du mercure ayant une masse volumique  $\rho_2 = 13600 \text{ kg/m}^3$ ,
- de l'essence ayant une masse volumique  $\rho_3 = 700 \text{ kg/m}^3$ .

On donne :

$$z_0 - z_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$z_3 - z_2 = 0,1 \text{ m}$$

$$z_1 + z_2 = 1,0 \text{ m}$$

On demande de calculer  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ .

**2** REPONSE

D'après (RFH), chapitre 2, on peut écrire:

$$P_1 - P_0 = \rho_1 \cdot g \cdot (Z_0 - Z_1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho_2 \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2)$$

$$P_3 - P_2 = \rho_3 \cdot g \cdot (Z_2 - Z_3)$$

Puisque que  $P_0 = P_3 = P_{atm}$ , en faisant la somme de ces trois équations on obtient :

$$\rho_1 \cdot (Z_0 - Z_1) + \rho_2 \cdot (Z_1 - Z_2) + \rho_3 \cdot (Z_2 - Z_3) = 0$$

$$\Rightarrow (Z_2 - Z_1) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (Z_0 - Z_1) - \frac{\rho_3}{\rho_2} \cdot (Z_3 - Z_2) \quad \text{A.N: } (Z_2 - Z_1) = 0,0096 \text{ m}$$

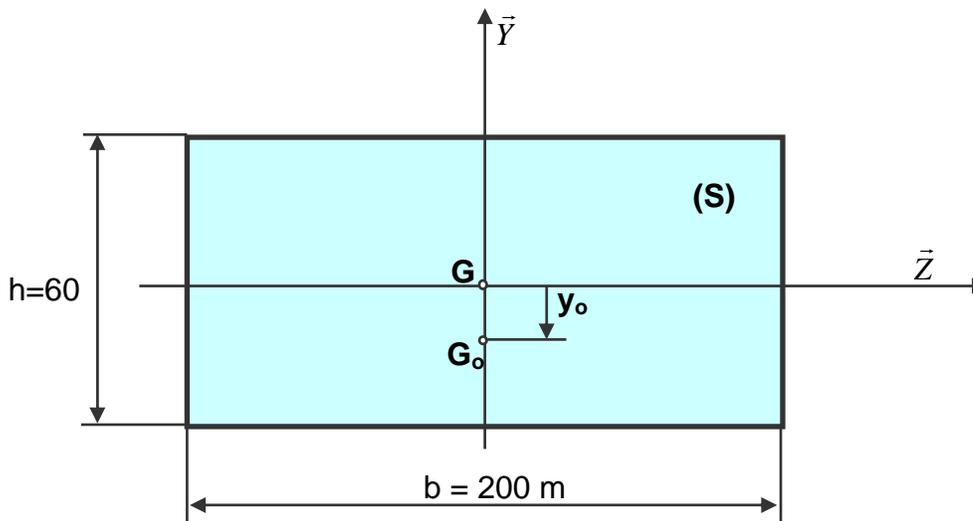
or  $(Z_1 + Z_2) = 1,0 \text{ m}$  donc  $Z_2 = 0,5048 \text{ m}$  et  $Z_1 = 0,4952 \text{ m}$

$(Z_3 - Z_2) = 0,1 \text{ m}$  donc  $Z_3 = 0,6048 \text{ m}$

$(Z_0 - Z_1) = 0,2 \text{ m}$  donc  $Z_0 = 0,6952 \text{ m}$

**Exercice N° 6:**

**1** ENONCE



La figure ci-dessus représente un barrage ayant les dimensions suivantes : longueur  $b=200$  m, hauteur  $h=60$  m

Le barrage est soumis aux actions de pression de l'eau.

Le poids volumique de l'eau est :  $\varpi = 9,81 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$ .

On demande de :

- 1) Calculer l'intensité de la résultante  $\|\vec{R}\|$  des actions de pression de l'eau.
- 2) Calculer la position  $y_0$  du centre de poussée  $G_0$ .

**2** REPONSE

- 1) Calcul de  $\|\vec{R}\|$  :

$$\|\vec{R}\| = P_G \cdot S,$$

On applique la RFH entre le point G et un point A à la surface de l'eau on obtient :

$$P_G = \varpi \cdot \frac{h}{2} + P_A$$

En A, sommet du barrage, la pression de l'eau est supposé égale à la pression atmosphérique.

La surface du barrage est :  $S = b \cdot h$ , donc :

$$\|\vec{R}\| = (P_{atm} + \varpi \cdot \frac{h}{2}) \cdot b \cdot h \quad \text{A.N.} \quad \|\vec{R}\| = (10^5 + 9810 \cdot \frac{60}{2}) \cdot 200 \cdot 60 = 4,73 \cdot 10^9 \text{ N}$$

- 2) Calcul de  $y_0$  :

$$y_0 = - \frac{\varpi \cdot I_{(G,\bar{z})}}{\|\vec{R}\|}$$

Le moment quadratique  $I_{(G,\bar{z})} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ , donc

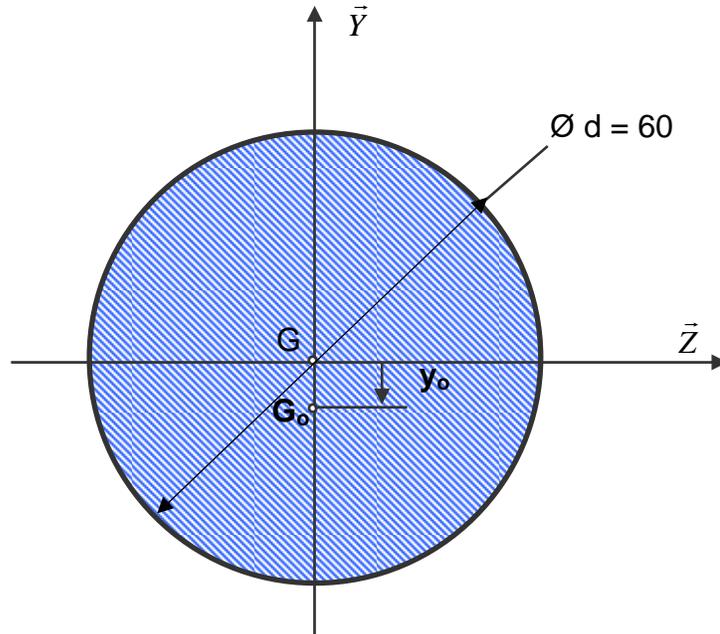
$$y_0 = - \frac{\varpi \cdot \frac{b h^3}{12}}{\|\vec{R}\|} \quad \text{A.N.} \quad y_0 = - \frac{9810 \cdot \frac{200 \cdot 60^3}{12}}{4,73 \cdot 10^9} = -7,46 \text{ m}$$

**Commentaire:** On remarque que le centre de poussée est très au dessous du centre de surface. Dans le calcul de stabilité du barrage il est hors de question de confondre ces deux points.

**Exercice N° 7:**

**1** ENONCE

Un piston de vérin a un diamètre  $d=60$  mm. Il règne au centre de surface G du piston une pression de 40 bar, soit environ  $P_G=4 \text{ MP}_a$ .



L'huile contenue dans le vérin a un poids volumique  $\varpi = 9,81.0,8.10^3 \text{ N/m}^3$ .

On demande de :

- 1) Calculer l'intensité de la résultante  $\|\vec{R}\|$  des actions de pression de l'huile.
- 2) Calculer la position  $y_0$  du centre de poussée  $G_0$ .

## 2 REPONSE

- 1) Calcul de  $\|\vec{R}\|$  :

$$\|\vec{R}\| = P_G \cdot S \text{ avec } S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ donc } \boxed{\|\vec{R}\| = P_G \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \text{ A.N. } \boxed{\|\vec{R}\| = 11,3 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

- 2) Calcul de  $y_0$  :

$$y_0 = -\frac{\varpi \cdot I_{(G, \vec{z})}}{\|\vec{R}\|} \text{ avec } I_{(G, \vec{z})} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \text{ donc } \boxed{y_0 = -\frac{\varpi \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\|\vec{R}\|}}$$

$$\text{A.N. } \boxed{y_0 = -\frac{9810,8 \cdot \frac{\pi \cdot 0,06^4}{64}}{11,3 \cdot 10^3} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

**Commentaire:** On remarque que le centre de poussée est très voisin du centre de surface. Dans le calcul de poussée du vérin il est, donc, tout à fait normal de les confondre.