دالة الارتباط الذاتي Autocorrelation Function:

تقيس دالة التغاير الذاتي $\gamma(s,t)$ التي سبق تعريفها في المبحث السابق- درجة الاعتماد الخطي بين أي متغيرين من المتغيرات التي تقع على نفس السلسلة الزمنية. فعلي سبيل المثال يقيس التغاير الذاتي $\gamma(1,2)$ درجة الاعتماد الخطي بين المتغير العشوائي y_1 والذي يمثل قيمة السلسلة عند النقطة الزمنية الأولى والمتغير العشوائي y_2 والذي يمثل قيمة السلسلة عند النقطة الزمنية الثانية، أي أن $\gamma(1,2)$ يمثل درجة الاعتماد الخطي بين كل القيم التي يمكن أن تولدها العملية العشوائية عند النقطة الزمنية الأولى وتلك القيم التي يمكن أن تولدها نفس العملية العشوائية عند النقطة الزمنية الثانية. وبصفة عامة فإن التغاير الذاتي $\gamma(s,t)$ هو دالة في الدليلين s,t .

وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الملاحظات الهامة والجديرة بالذكر أهمها:

1- إذا كان $\gamma(s,t)=0$ فهذا يعني أن المتغيرين Y_s, Y_t غير مرتبطين خطيا ولكن قد يكون هناك ارتباط غير خطي بينهما.

2- إذا كان $\gamma(s,t)=0$ وكان المتغيران Y_s, Y_t لهما توزيع معتاد ثنائي Bivariate normal distribution فإن هذا يعني أن المتغيرين مستقلان.

3- يمكن اعتبار تباين العينة كحالة خاصة من دالة التغاير $\gamma(s,t)$ بوضع $s = t$، وهذا يعني أن $V(Y_t)=\gamma(t,t)$

4- إذا كانت السلسلة ساكنة فإن دالة التغاير $\gamma(s,t)$ تكون دالة في الفجوة الزمنية $k=|s-t|$ فقط وتكتب عادة في هذه الحالة $\gamma(|s-t|)$ أو $\gamma(k)$

2.2.1 ماهية الارتباط الذاتي:

من المعروف في علم الإحصاء أن استخدام التغاير لقياس درجة الاعتماد الخطي بين متغيرين يثير بعض المشاكل العملية، أولها عدم وجود حدود مرجعية (دنيا عليا) يمكن الرجوع إليها لتحديد مدى قوة أو ضعف العلاقة الخطية، وثانيها أن التغاير يعتمد على وحدات القياس المستخدمة. ومن ثم يفضل معايرة التغاير الذاتي بالقسمة على حاصل ضرب الانحرافين المعياريين للمتغيرين Y_s, Y_t لنحصل على ما يعرف بالارتباط الذاتي (التسلسلي).

تعريف:

يعرف معامل الارتباط الذاتي $\rho(s,t)$ بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_s, Y_t ويكتب على الصورة: $\rho(s,t)=\frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{Var(Y_s)\,.\,Var(Y_t)}}=\frac{E(Y_s-\mu_s)(Y_t-\mu_t)}{\sqrt{E(Y_s-\mu_s)^2\,.E(Y_t-\mu_t)^2}}\ ; s,t=0\pm1\pm2,\ldots$

y (s, t

وبالطبع – كما هو معروف في علم الإحصاء – يمكن حساب بسط معامل الارتباط من دالة الاحتمال الثنائية للمتغيرين Y_s, Y_t ، بينما يحسب المقام من دالتي الاحتمال الهامشي للمتغيرين وذلك لكل قيم (s,t)المختلفة. وبالتالي ينشأ لدينا علاقة دالية بين معاملات الارتباط الذاتي والزمنين (s,t) تسمى بدالة الارتباط الذاتي(act autocorrelation function) تقيس درجة الارتباط الخطي بين المتغيرات التي تقع على نفس السلسلة أو العملية العشوائية. وتتصف هذه الدالة بعدة خصائص أهمها:

1- الارتباط الذاتي بين المتغير Y_t ونفسه يساوي الواحد، أي أن: $\rho(t,t) = 1$

2- $\rho(t,s) = \rho(s,t)$ وذلك لأنّ $\gamma(t,s) = \gamma(s,t)$

3- قيمة $\rho(s,t)$ تقع دائماً على الفترة المغلقة $[-1,1]$

4- إذا كان $\rho(s,t) = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بين المتغيرين Y_s, Y_t. ولكن قد توجد علاقة غير خطية بينهما.

5- إذا كان $\rho(s,t) \pm 1$ فهذا يعني أنه يوجد علاقة خطية تامة (طردية أو عكسية) بين المتغيرين Y_s, Y_t ، أي أنه يمكن التنبؤ بأحد المتغيرين بالضبط باستخدام علاقة خطية يقوم فيها المتغير الآخر بدور المتغير المفسر regressor الوحيد في هذه العلاقة.

أما إذا كانت العملية العشوائية (السلسلة) ساكنة فإنه يمكن إعادة تعريف معامل الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي كما يلي:

تعريف: يعرف معامل الارتباط الذاتي للعملية الساكنة $\{y_t\}$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين y_t, y_{t-k} ويأخذ الصورة الآتية:

$$\rho(k) = \frac{E(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)}{E(Y_t - \mu)^2} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \ , k = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots.$$

حيث يرمز $\gamma(0)$ إلى تباين العملية الساكنة ويرمز $\gamma(k)$ إلى التغاير الذاتي عند الفجوة k لنفس العملية.

ومن ثم يمكن حساب معامل الارتباط الذاتي لكل فجوة من الفجوات الزمنية $k = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots.$ فينشأ لدينا علاقة دالية بين معاملات الارتباط الذاتي $\rho(k)$ والفجوة الزمنية k تسمى بدالة الارتباط الذاتي للعملية الساكنة $\{y_1\}$ تقيس الارتباط الخطي بين المتغيرات على نفس السلسلة الزمنية والتي تبعد عن بعضها البعض فجوة زمنية مقدارها k. فعلى سبيل المثال يقيس $\rho(1)$ درجة الارتباط الخطي بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما يساوي الوحدة أي درجة الارتباط بين Y_1, Y_2، أو بين Y_{11}, Y_{10} أو.. أو بصفة عامة الارتباط الخطي بين Y_t, Y_{t-1}، ويقيس $\rho(3)$ درجة الارتباط الخطي بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما يساوي ثلاث

وحدات أي درجة الارتباط الخطي بين Y_4, Y_1 أو بين Y_{14}, Y_{10} أو...أو بصفة عامة درجة الارتباط الخطي بين Y_t, Y_{t-3} وتعرض دالة الارتباط الذاتي في شكل رياضي أو جدولي أو بياني كما سنرى فيما بعد.

تعريف: تعرف مصفوفة الارتباط الذاتي للعملية العشوائية الساكنة التي تتكون من عدد n من المتغيرات في الصورة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(n-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \rho(n-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2.خصائص وأهمية دالة الارتباط الذاتي:

تتصف دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ لأي عملية ساكنة بعدة خصائص هامة نذكر منها ما يلي:

1- معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية صفر يساوي الواحد، أي أن $\rho(0) = 1$ لأي عملية ساكنة.

2- قيمة $\rho(k)$ تقع دائماً على الفترة المغلقة $[-1,1]$

3- إذا كان $\rho(k) = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة ، ولكن بالطبع قد توجد علاقة غير خطية بينهما.

4- إذا كان $\rho(k) = \pm 1$ فهذا يعني أنه توجد علاقة خطية تامة بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، أي أنه يمكن التنبؤ بأحدهما بالضبط باستخدام علاقة خطية يقوم فيها المتغير الآخر بدور المتغير المفسر الوحيد في هذه العلاقة.

5- الدالة $\rho(k)$ دالة متماثلة دائماً حول الفجوة $k = 0$، أي أن $\rho(k) = \rho(-k)$. ولذلك عادة ما يكتفي برسم هذه الدالة لقيم k الموجبة فقط كما سنرى فيما بعد في الأمثلة.

6- مصفوفة الارتباط دائما موجبة تامة Positive definite ، ولذلك ترتبط معاملات الارتباط المختلفة $\rho(0), \rho(1), \rho(2)$ .... فيما بينهما بعلاقات جبرية يمكن استنتاجها من العلاقة بين المصفوفة تامة الإيجاب والمحددات الرئيسية كما هو الحال في مصفوفة التغاير والتباين في نظرية الإحصاء.

وتأخذ الدالة $\rho(k)$ في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية أشكالاً متعددة، فتارة تجدها تتلاشى ببطء، وتارة تجدها تتلاشى بسرعة في صورة أسية exponential fashion ، وتارة ثالثة تقترب تدريجيا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب sinewaves، وتارة رابعة تقترب تدريجيًا من الصفر في شكل توليفة من الدوال الأسية، وتارة خامسة تنقطع كلية فجأة بعد عدد معين من الفجوات الزمنية. ففي شكل $(2.a)$ تتناقص $\rho(k)$ ببطء، وتتناقص برتابة وبسرعة وفي صورة أسية في شكل $(2.b)$، وتقترب تدريجياً من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب $(2.c)$، بينما تنقطع كلية فجأة بعد الفجوة الزمنية الثانية في شكل $(2.b)$

وتلعب دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ دورا هاما وخطيرا – إن لم يكن أهم دور على الإطلاق في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية بطريقة بوكس وجينكنز. فهي الأداة الرئيسية التي ارتضاها هذان العالمان لاختبار سكون السلسلة – بجانب الطرق التقريبية الأخرى وهي أحد الأدوات الرئيسية للتعرف على النموذج المبدئي الملائم للسلسلة. بالإضافة إلى ذلك فإن هذه الدالة من أهم أدوات تشخيص النموذج المبدئي من أجل تحسينه أو تطويره إذا ما طبقت على البواقي Residuals الناتجة من هذا النموذج. وسنتعرض للدور الذي تلعبه دالة الارتباط الذاتي بالتفصيل عند تقديم منهجية بوكس وجينكنز في الباب الرابع.

شكل (2): بعض دوال الارتباط الذاتي المشهورة

والأمثلة الآتية توضح كيفية إيجاد الارتباط الذاتي لبعض العمليات العشوائية والنماذج ذات الاتجاه المحدد (غير العشوائي).

مثال (6): أوجد دالة الارتباط الذاتي لعملية "الاضطرابات الهادئة" $\{\varepsilon_t\}$

الحل: حيث إن عملية $\{\varepsilon_t\}$ اضطرابات هادئة فإن:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \; ; \;\; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ..$$

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \; ; \;\; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ..$$

$$\gamma(k) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) \;\; ; \;\; k \neq 0; t = 0, \pm 1, \pm 2$$

وبالتالي فإن: $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = 0 \;,\; k \neq 0$ أي أن: $\rho(k) = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ 0 & ,k \neq 0 \end{cases}$

مثال (7):

إذا كانت السلسلة y_t تتبع النموذج $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ حيث ε_t عملية اضطرابات هادئة، أوجد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة y_t

الحـل:

$$V(y_t) = V(\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

وذلك لأن الدالة $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$ هي دالة محددة (غير عشوائية) Deterministi أي غير عشوائية.

$$y(s,t) = Cov(\beta_0 + \beta_1 s + \varepsilon_s \,, \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) = 0 \;\; , \qquad s \neq t$$

ومن ثم فإن: $\rho(k) = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ 0 & ,\; k \neq 0 \end{cases}$

وتجدر الإشارة هنا إلى حقيقة في غاية الأهمية وهي أن دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج تساوي الصفر بدءًا من الفجوة الزمنية الأولى، أي أن هناك انقطاع تام لهذه الدالة على الرغم من عدم سكون هذه السلسلة، حيث إن لها اتجاه عام خطي بالزيادة أو النقصان على عكس ما قد نرى في الفصول القادمة عند التعامل مع نماذج ARIMA. وفي الواقع أنه لا يوجد تعارض بالمرة كما سنرى في الفصول القادمة، حيث إن النموذج y_t في هذا

المثال الذي بين أيدينا ليس عشوائيًا nonstochastic بل هو نموذج محدد Deterministic كما أوضحنا سابقًا فــي الباب الأول، وبالتالي فعدم وجود ارتباط ذاتي بين مشاهدات السلسلة يبدو أمرًا منطقيًا. وقد ذكرنا هذا النموذج في هذا الباب لأنه عادة ما يحدث لبس للطالب أو الباحث الذي ليس لديه الخبرة والدراية الكافية بموضوعات النماذج المحددة والعشوائية وعلاقتها بالسكون وعلاقة هذا بالأخير بدالة الارتباط الذاتي. وبالطبع ما يقال عن النموذج y_t في هذا المثال يقال عن كل النماذج المحددة.

مثال (8): أوجد دالة الارتباط الذاتي للعملية$\{y_t\}$ في المثال (5)

الحل:

عند حل هذا المثال وجدنا أن:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) &, k=0 \\ -\theta\sigma^2 &, k=1 \\ 0 &, k\geq 2 \end{cases}$$

وبالتالي فإن:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 &; k=0 \\ -\frac{\theta}{1+\theta^2} &; k=1 \\ 0 &; k\geq 2 \end{cases}$$

2.2.3 تقدير دالة الارتباط الذاتي:

أوضحنا سابقاً أهمية وضع شروط السكون على العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المرصودة (المتاحة) وأهمها تخفيض عدد المعالم الرئيسية (عزوم الدرجة الأولي والثانية وسهولة تفسيرها وإمكانية تقديرها باستخدام مشاهدات السلسلة المتاحة $y_1, y_2, \dots\dots, y_n$ وبناء على هذه التقديرات يمكن تقدير دالة الارتباط الذاتي للعملية العشوائية الساكنة بأحد التقديرين الآتيين:

$$r(k) = \hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_1-\bar{y})(y_{t+k}-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_1-\bar{y})^2}$$

$$r_0(k) = \tilde{p}(k) = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(y_1-\bar{y})(y_{t+k}-\bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_1-\bar{y})^2}$$

وفي الحقيقة أن هذين التقديرين متحيزان biased ، ولذلك فليس هناك أية أفضلية لإحداهما على الآخر، وعادة ما يستخدم التقدير الأول $r(k)$ لتقدير دالة الارتباط الذاتي، وهذا التقدير هو الذي سنستخدمه بالفعل في هذا الكتاب. ويمكن إثبات أنه إذا كانت العملية العشوائية $\{y_t\}$ ساكنة وخطية وأن العزم الرابع $E(Y_1^4)$ محدود فإن تقدير دالة الارتباط الذاتي $r(k)$ يتبع تقاربياً (إذا كانت n كبيرة) توزيع معتاد (معتدل) Normal متوسطه $\rho(k)$ وله تباين معين معروف يعتمد على $\rho(k)$ أيضاً. ومن ثم يمكن إجراء الاختبارات الإحصائية الخاصة بمعنوية significance الارتباطات الذاتية المختلفة.

والحالة الخاصة الهامة إذا كانت العملية العشوائية موضع الدراسة عملية "اضطرابات هادئة فإن تباين $r(k)$ يأخذ الصورة البسيطة الآتية: $V[r(k)] \approx \frac{1}{n}$

ومن ثم يمكن اختبار معنوية الارتباط الذاتي في هذه الحالة بشكل تقريبي كما سنرى عند تشخيص نماذج ARIMA في الباب الرابع. والمثال الآتي يوضح كيفية حساب معاملات الارتباط الذاتي:

<u>مثال (9):</u> تمثل البيانات الآتية عدد الوحدات المباعة بالمائة سنويًا من إحدى السلع في أحد المحلات الكبرى :

السنة	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
عدد الوحدات المباعة	1	3	2	4	3	2	3	2

احسب معاملات الارتباط الذاتي وارسم دالة الارتباط المقدرة.

<u>الحل</u>:

$$\bar{y} = \frac{20}{8} = 2.5 \ ; \ \sum_{t=1}^{8}(y_t - \bar{y})^2 = 6$$

$$r(1) = \frac{\sum_{t=1}^{7}(y_1 - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})}{6}$$

$$r(1) = \frac{1}{6}[(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + (y_3 - \bar{y})(y_4 - \bar{y}) +$$
$$(y_4 - \bar{y})(y_5 - \bar{y}) + (y_5 - \bar{y})(y_6 - \bar{y}) + (y_6 - \bar{y})(y_7 - \bar{y})$$
$$+(y_7 - \bar{y})(y_8 - \bar{y})] = -0.29$$

$$r(2) = \frac{1}{6}[(y_1 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y})(y_4 - \bar{y}) + (y_3 - \bar{y})(y_5 - \bar{y}) +$$
$$(y_4 - \bar{y})(y_6 - \bar{y}) + (y_5 - \bar{y})(y_7 - \bar{y}) + (y_6 - \bar{y})(y_8 - \bar{y})] = 0.17$$

وبالمثل يمكن إثبات أنّ:

$$r(3) = -0.21; r'4) = -0.33 \ ; \ \ r(5) = 0.21 \ ; r(6) = -0.17; \ \ r(7) = 0.13$$

ومنه يمكن عرض دالة الارتباط الذاتي المقدرة في الشكل (3).

مثال (10): تمثل البيانات الآتية متوسط النسبة المئوية للسنوية للرطوبة في إحدى المدن:

السنة	1990	1991	1992	1993	1994
عدد الوحدات بالمائة	20	30	10	20	20

ارسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البيانات.

<u>الحل</u>:

$$\bar{y} = \frac{100}{58} = 20 \ ; \ \sum_{t=1}^{5} (y_t - \bar{y})^2 = 200$$

يمكن بسهولة إثبات أنّ: $r(1) = -\frac{1}{2} \ ; \ r(2) = r(3) = r(4) = 0$

ويمكن رسم هذه الدالة في الشكل (4).

ويلاحظ أن $r(\mathrm{K})$ تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الأولى.

2.3 دالة الارتباط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation Function

تلعب دالـة الارتبـاط الـذاتي الجزئـي دوراً لا يقل أهميـة عن دور دالـة الارتبـاط الـذاتي $\rho(k)$ – والتـي سبق تقديمها فـي المبحث السـابق فـي التعرف علـى النموذج الملائم للبيانـات الزمنيـة المرصـودة فـي منهجيـة بـوكس وجينكنز. وقبل تعريف هذه الدالة ودراسة خصائصها في السلاسل الزمنية قد يكون من الأفضل أن نستهل هذا المبحث بمقدمة عن مفهوم الارتباط الجزئي بصفة عامة في مجالات الانحدار المألوفة لدى القارئ ثم ننتقل إلى تعميم هذا المفهوم فـي مجـالات السلاسل الزمنيـة ودراسـة خصـائص دالـة الارتبـاط الـذاتي الجزئـي وأهم طـرق تقديرها باستخدام بيانات سلسلة زمنية متاحة.

2.3.1 مقدمة:

افترض أن $\mathrm{X}, \mathrm{Z}, \mathrm{W}$ ثلاثة متغيرات عشوائية لهم دالة كثافة احتمال مشترك $f(x, z, w)$. من المعروف في موضوعات الإحصاء بصفة عامة – وفي موضوعات الانحدار بصفة خاصة – أن معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين X, Z يعرف في: $\rho(X, Z) = \rho_{X,Z} = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{Var(X)Var(Z)}}$

ويقيس المعامل $\rho_{X,Z}$ درجة الاعتماد الخطي (الكلي) بين المتغيرين X, Z أي قوة الارتباط الخطي بينهما إذا كانت العلاقة بينهما على الشكل التالي (بافتراض أن X هو المتغير التابع):

$$E(X \ / \ Z) = \beta_0 + \beta_1 Z$$

ويمثل بسط معامل الارتباط الخطي التغاير بين المتغيرين والذي يمكن الحصول عليه من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X, Z, وذلك بإيجاد $E(X - \mu_X)(Z - \mu_Z)$ ، بينما يمثل المقام الجذر التربيعي لحاصل ضرب تباين المتغيرين. ويمكن الحصول على تباين المتغير X بإيجاد $E(X - \mu_X)^2$ باستخدام دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير X ، بينما يمكن الحصول على تباين المتغير Z بإيجاد $E(Z - \mu_Z)^2$ باستخدام دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Z. إذا كان $\rho_{X,Z} > 0$ فإن هذا يعني أن القيم الكبرى للمتغيرين تميل أن تحدث معاً، كما أن القيم الصغرى لهما تميل أيضاً أن تحدث معاً. أما إذا كان $\rho_{X,Z} < 0$ فإن هذا يعني أن القيم الكبرى لأحد المتغيرين تميل أن تحدث مع القيم الصغرى للمتغير الآخر.

ولكن من جهة أخرى قد يكون هناك علاقة بين كل من المتغيرين X, Z بالمتغير الأخر W ، وفي هذه الحالة فإن $\rho_{X,Z}$ لا يعبر عن صافي العلاقة بين المتغيرين X, Z وإنما تعتمد قيمة هذا المعامل – بالإضافة إلى

العلاقة بين X, Z – إلى مدى ارتباط كل من هذين المتغيرين بالمتغير الثالث W . فتغير المتغير الثالث W يساهم في تغير كل من المتغيرين X, Z ومن ثم يتأثر معامل الارتباط $\rho_{X,Z}$ بهذا التغير. وفي كثير من الأحيان قد يكون من المرغوب فيه البحث في صافي العلاقة المتغيرين X, Z بعد حذف تأثير المتغير W على هذين المتغيرين أي بافتراض ثبات المتغير W . ولإيجاد مثل هذا الارتباط – والذي يرمز له عادة بالرمز $\rho_{X,Z,W}$– يجب أولاً إيجاد التوزيع الشرطي $f(x, z|w)$ واستخدام هذا التوزيع لإيجاد معامل الارتباط الشرطي.

$$\rho_{X,Z,W} = \frac{Cov(X, Z|W)}{\sqrt{Var(X|W).Var(Z|W)}} = \frac{E[X - E(X|W)][Z - E(Z|W)]}{\sqrt{E[X - E(X|W)]^2.E[Z - E(Z|W)]^2}}$$

والسبب في اقتراح الصيغة السابقة لقياس الارتباط الجزئي بين المتغيرين X, Z يعود إلى أن المتغير العشوائي $[X - E(X|W)]$ يمثل المتغير العشوائي X بعد حذف تأثير المتغير W، كما أن المتغير العشوائي– $[Z$ $E(Z|W)]$ يمثل المتغير العشوائيZ بعد حذف تأثير المتغير W. ومن ثم فإن معامل الارتباط بين المتغير $[X - E(X|W)]$ والمتغير $[Z - E(Z|W)]$ والمعرف بالصيغة السابقة – يكون اقتراح منطقي لقياس درجة الارتباط الجزئي بين المتغيرين X, Z بعد حذف تأثير المتغير W.

نظرية (1):

إذا كانت المتغيرات العشوائية X, Z, W تتبع توزيع معتاد ثلاث trivariate normal distribution فإن:

$$\rho_{X,Z,W} = \frac{\rho_{X,Z} - (\rho_{X,W})(\rho_{,Z,W})}{\sqrt{(1 - \rho^2\ )(1 - \rho^2\ )}}$$

ولن نتعرض لإثبات هذه النظرية هنا لأننا سنثبت الوجه الآخر لهذه النظرية في مجال السلاسل الزمنية في المبحث التالي.

2.3.2 ماهية الارتباط الذاتي الجزئي:

في موضوعات السلاسل الزمنية تحظى دراسة معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الثانية بأهمية خاصة، حيث يقيس هذا المعامل درجة الارتباط الخطي بين متغيرين يبعدان عن بعضهما البعض وحدتان زمنيتان بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما، أي بافتراض ثبات هذا المتغير. فهذا المعامل يقيس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين Y Y بعد حذف تأثير المتغير Y2 ، ويقيس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين Y_4, Y_2 بعد حذف تأثير المتغير Y_3، ... وهكذا. وبصفة عامة يقيس هذا المعامل قوة الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-2} بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما وهو Y_{t-1}، أي بافتراض ثبات هذا المتغير ويرمز لهذا المعامل عادة بالرمز ϕ_{22} ويمكن تفسيره على أنه معامل الارتباط الخطي بين المتغير– $[Y_t$ $E(Y_t|Y_{t-1})]$ والمتغير $[Y_{t-2} - E(Y_{t-2}|Y_{t-1})]$، ويمكن حسابه باستخدام دالتي الاحتمال الشرطي $f(Y_t, Y_{t-2}|Y_{t-1})$ و $f(Y_1|Y_{t-1})$

نظرية (2):

إذا كانت العملية $\{Y_t\}$ ساكنة وكانت المتغيرات Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} تتبع توزيعاً معتاداً (معتدلاً) ثلاثياً فإن:

حيث إن المتغيرات الثلاثة تتبع توزيع معتاد متعدد فإن: $\phi_{22} = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)}$

البرهان:

حيث أن المتغيرات الثلاثة تتبع توزيع معتاد متعدد فإن:

$$E(Y_{t-2}|Y_{t-1}) = \mu + \rho(1)[Y_{t-1} - \mu] \qquad (1)$$
$$E(Y_t|Y_{t-1}) = \mu + \rho(1)[Y_{t-1} - \mu] \qquad (2)$$
$$Var(Y_{t-2}|Y_{t-1}) = \sigma^2[1 - \rho^2(1)] \qquad (3)$$
$$Var(Y_t|Y_{t-1}) = \sigma^2[1 - \rho^2(1)] \qquad (4)$$
$$\phi_{22} = Corr\{[Y_t - E(Y_t|Y_{t-1})] \ , [Y_{t-2} - E(Y_{t-2}|Y_{t-1})]\}$$
$$= \frac{E[Y_t - E(Y_t|Y_{t-1})]\ [Y_{t-2} - E(Y_{t-2}|Y_{t-1})]}{\sqrt{Var(Y_t|Y_{t-1}).E(Y_{t-2}|Y_{t-1})}} \qquad (5)$$

بالتعويض من (1) و (2) في بسط المعامل ϕ_{22} نصل إلى:

$$\text{البسط} = E[Y_1 - \mu - \rho(1)(Y_{t-2} - \mu)][Y_{t-2} - \mu - \rho(1)(Y_{t-1} - \mu)]$$
$$= E[Y_1 - \mu][Y_{t-2} - \mu] - \rho(1)E(Y_1 - \mu)(Y_{t-1} - \mu)$$
$$-\rho(1)E(Y_{t-1} - \mu)(Y_{t-2} - \mu) + \rho^2 E(Y_1 - \mu)^2$$
$$= \gamma(2) - \rho(1)\gamma(1) - \rho(1)\gamma(1) + \frac{\rho(1)\gamma(0)\gamma(1)}{\gamma(0)} = \gamma(2) - \rho(1)\gamma(1) \qquad (6)$$

بالتعويض من (1) و (2) في مقام المعامل ϕ_{22} في المعادلة (5) نصل إلى:

$$\text{المقام} = \gamma(0)[1 - \rho^2(1)] \qquad (7)$$

بقسمة (6) على (7) نصل إلى: $\phi_{22} = \frac{[\gamma(2)-\rho(1)\gamma(1)]}{\gamma(0)[1-\rho^2(1)]} = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)}$

وهو المطلوب إثباته.

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن بسهولة إثبات النظرية (2) بالتعويض عن النظرية (1) مباشرة وذلك بوضع:

$$Y_{t-2} = X\ ;\ Y_t = Z\ ;\ \ Y_{t-1} = W$$

<u>تعريف:</u>

يعرف معامل الارتباط الجزئي للعملية الساكنة $\{Y_t\}$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-k} بعد حذف تأثير المتغيرات الت تقع بينهما وهي $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots Y_{t-k+1}$

ويرمز عادة لمعامل الارتباط الجزئي عند الفجوة k بالرمز ϕ_{22} ويمكن تفسيره على أنه معامل الارتباط الخطي بين المتغير $[Y_t - E(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]$ والمتغير $[Y_{t-k} -$

$E(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]$. ويمكن حساب معامل الارتباط الذاتي باستخدام دوال الاحتمال الشرطي المناسبة لجميع قيم .... $k = 1, 2,$

<u>تعريف:</u>

تعرف دالة الارتباط الذاتي الجزئي بأنها علاقة دالية بين معاملات الارتباط الجزئي ϕ_{kk} والفجوة الزمنيةk.

وتعرض دالة الارتباط الجزئي – شأنها في ذلك شأن دالة الارتباط الذاتي – عادة في شكل رياضي وأحيانًا في شكل جدولي أو بياني.

2.3.3 خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

تتصف دالة الارتباط بعدة خصائص هامة نذكر منها ما يلي:

1- معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية صفر يساوي واحد، أي أن: $\phi_{00} = 4$لأي عملية ساكنة.

2- قيمة ϕ_{00} تقع دائمًا على الفترة المغلقة $[-1,1]$

3- معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الأولي دائمًا يساوي معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى، أي أن$\phi_{11} = \rho(1)$ وذلك لعدم وجود متغيرات بين المتغيرين Y_t, Y_{t-1}

4- إذا كان $\phi_{kk} = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية جزئية بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، ولكن بالطبع قد توجد علاقة جزئية غير خطية بينهما.

وتأخذ الدالة ϕ_{kk} في التحليل الحديث أشكالاً قريبة الشبه من أشكال دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ ، فتارة تتلاشى ببطء، وتارة تتلاشي بسرعة في صورة أسية وتارة تقترب تدريجيًا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب أو في شكل توليفة من الدوال الأسية، وتارة تنقطع كلية بعد عدد معين من الفجوات الزمنية. وتلعب دالة الارتباط الذاتي الجزئي دوراً لا يقل أهمية عن دور دالة الارتباط الذاتي، فتستخدم لاختبار سكون السلسلة بجانب الطرق الأخرى، وهى أحد الأدوات الرئيسية الت وظفت بواسطة بوكس وجينكنز للتعرف على النموذج المبدئي وتشخيص هذا النموذج من أجل تحسينه أو تطويره وسنتعرض للدور الذي تلعبه هذه الدالة بالتفصيل عند تقديم منهجية بوكس وجينكنز في الباب الرابع.

2.3.4 تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

قدم الفكر الخاص بالسلاسل الزمنية أساليب عديدة لتقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي ويعتبر أسلوب أو نظام يوول – والكر من أهم هذه الأساليب على الإطلاق. ونظرا لأهمية هذا النظام والدور الهام الذي يلعبه في منهجية بوكس وجينكنز فقد خصَّصنا المبحث القادم بالكامل لعرض هذا النظام بالتفصيل، بينما نقدم في هذا المبحث أسلوبين آخرين لتقدير الارتباط الذاتي الجزئي.

الأسلوب الأول:

لدراسة الارتباط الجزئي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-k} يفترض هذا الأسلوب أن علاقة الانحدار بين المتغير Y_{t-k} والمتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_t على الصورة الخطية الآتية:

$$Y_{t-k} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-k+1} + \beta_2 Y_{t-k+2} + \cdots + \beta_{k-1} Y_{t-1} + \varepsilon_{t-k} \; ; k = 2,3, \ldots n-1 \qquad (2.3.1)$$

وبالتالي فإن المتغير العشوائي:

$$\varepsilon_{t-k} = Y_{t-k} - (\beta_0 + \beta_1 Y_{t-k+1} + \beta_2 Y_{t-k+2} + \cdots + \beta_{k-1} Y_{t-1})$$

يمثل المتغير Y_{t-k} بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_t . وبالمثل يفترض هذا الأسلوب أن علاقة الانحدار بين المتغير Y_t والمتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_{t-k} على الصورة الخطية:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-k+1} + \alpha_2 Y_{t-k+2} + \cdots + \alpha_{k-1} Y_{t-1} + \varepsilon_{t-k} \; ; k = 2,3, \ldots n-1 \qquad (2.3.2)$$

ومن ثم فإن المتغير العشوائي: $e_t = Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-k+1} + \alpha_2 Y_{t-k+2} + \cdots + \alpha_{k-1} Y_{t-1})$

يمثل المتغير Y_t بعد حذف المتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_{t-k} وبناءً على ذلك يمكن تقدير ϕ_{kk} عن طريق إجراء الخطوات الآتية:

1- نضع $k = 2$ ونجري الانحدار (2.3.1) ونحصل منه على البواقي $\hat{\varepsilon}_t$، ثم نجري الانحدار (2.3.2) ونحصل منه على البواقي $\hat{e}_t$.

2- نحسب معامل بيرسون للارتباط الخطي بين قيم القيم$\hat{\varepsilon}_t$ والقيم $\hat{e}_t$. هذا المعامل يعطي تقدير مناسب لمعامل الارتباط الجزئي ϕ_{22} ، ويرمز له عادة بالرمز $\widehat{\phi}_{22}$.

3- نضع $k = 3$ ونكرر الخطوتين السابقتين ونحصل على تقدير لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{33} وليكن $\widehat{\phi}_{33}$.

4- نكرر الخطوتين 2,1 لجميع القيم الأخرى للفجوة الزمنية k ، وبالتالي يمكن الحصول على التقديرات $\widehat{\phi}_{22}, \widehat{\phi}_{33}$. .

الأسلوب الثاني:

بالرغم من سهولة الأسلوب الأول، إلا إنه يحتاج إلى توفيق معادلتي انحدار مختلفتين لتقدير كل معامل. ومن ثم لا بد من توفيق عدد من معادلات الانحدار يساوي ضعف عدد معاملات الارتباط الذاتي الجزئي المطلوب تقديرها. الأسلوب الثاني يوفر نصف هذا العدد وذلك بتوفيق مجموعة معادلات الانحدارات الآتية والحصول على آخر تقدير في كل معادلة ليمثل التقدير المطلوب.

$$\begin{aligned} &1. \quad Y_t = \phi_{21} Y_{t-1} + \phi_{22} Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ &2. \quad Y_t = \phi_{31} Y_{t-1} + \phi_{32} Y_{t-2} + \phi_{33} Y_{t-3} + \varepsilon_t \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

$$k. \qquad Y_t = \phi_{k1}Y_{t-1} + \phi_{k2}Y_{t-2} + \cdots . + \phi_{kk}Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

وقبل أن نختتم هذا المبحث تجدر الإشارة بالقول بأنه قد لا يكون هناك داع لتقدير المعامل ϕ_{11} بشكل مستقل حيث إن هذا المعامل يساوي بالتعريف معامل الارتباط الذاتي $\rho(1)$ ، لأنه ليس هناك أي متغيرات تقع بين Y_t, Y_{t-1} ، ومن ثم يمكن تقدير ϕ_{11} كما يلي: $\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1) = r(1)$

وقد سبق تعريف $r(1)$ في المبحث السابق.