الانحدار الخطي المتعدد

يتضح مما سبق أن الانحدار الخطي البسيط يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما المتغير المستقل (X) والآخر المتغير التابع (Y)، غير أن واقع الحياة الاقتصادية والاجتماعية مبني بشكل عام على تأثر أية ظاهرة بأكثر من متغير مستقل، فدالة الطلب مثلا، تحدد العلاقة بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة، والاسعار الخاصة بهذه السلعة، وغيرها من السلع (أسعار السلع البديلة) ويدخل فيها دخل المستهلك كأحد المتغيرات فضلا عن المتغيرات الأخرى، لذلك لابد من توسيع نموذج الانحدار السابق ليشتمل على انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $(X_1, X_2, \dots, X_k)$، ويسمى هذا بنموذج الانحدار الخطي المتعدد (Multiple Linear regression)

ويهدف هذا المحور إلى توضيح كيفية تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد، الذي يتكون من متغير تابع ومتغيرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة، لذلك سيتم مناقشة طبيعة نموذج الانحدار المتعدد، ثم تحديد أهم افتراضات النموذج التي سبق وأن تعرفنا عليها في المور السابق، يضاف إلى ذلك بيان عدم وجود علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة وكيف ان المصفوفة $(X'X)$، تكون مصفوفة غير شاذة $(Non-Singular)$ إذا كان محددها لا يساوي صفرا، ثم يتم بعد ذلك تقدير معلمات النموذج، تقدير التباين والتباين المشترك والانحراف المعياري لها للوصول إلى اختبار معاملات النموذج.

- **النموذج الخطي المتعدد:**

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة بين متغير مستقل تابع

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \mu_i \dots \dots \dots (I)$$

وفي واقع الأمر، فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي:

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \cdots + \beta_k X_{1k} + \mu_i$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \cdots + \beta_k X_{2k} + \mu_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \cdots + \beta_k X_{nk} + \mu_n$$

وهذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلمات المطلوب تقديرها، علما أن الحد الأول منها (β_0) يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، وعليه؛ يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{2k} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{N1} & X_{n2} & X_{n3} & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$$

وباختصار نقول:

$$Y = X\beta + \mu \dots \dots \dots \ (II)$$

Y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

X: مصفوفة أبعادها $(n \times k + 1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة، ويحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الثابت.

β: متجه عمودي أبعاده $(k + 1 \times 1)$ ، ويحتوي على المعالم المطلوب تقديرها.

μ: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

وبما أن المعادلة (II) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها بإستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع Y، والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_k$، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة بـ μ_i التالية:

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2 In)$$

والذي يعني أن μ_i يتوزع توزيعا طبيعيا (N) متعدد المتغيرات لمتجه وسطه صفري (0) ومصفوفة تباين وتبيان مشترك عددية هي: $(\sigma^2 In)$.

- فرضيات النموذج الخطي المتعدد:

عند استخدام طريقة (OLS) في تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد/ فإنخ يجب توفر الافتراضات الآتية:

1. القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن $E(\mu_i) = 0$

$$E(\mu_i) = E\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\mu_1) \\ E(\mu_2) \\ E(\mu_3) \\ \vdots \\ E(\mu_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

- تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا؛ أي أن:

$$Cov(\mu) = E(\mu\mu') = \sigma^2 In$$

$$E(\mu\mu') = E\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{bmatrix}[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n]$$

$$E(\mu\mu') = \begin{bmatrix}\mu_1^2 & \mu_1\mu_2 & \cdots & \mu_1\mu_n\\ \mu_2\mu_1 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2\mu_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mu_n\mu_1 & \mu_n\mu_2 & \cdots & \mu_n^2\end{bmatrix}$$

$$E(\mu\mu') = \begin{bmatrix}E(\mu_1^2) & E(\mu_1\mu_2) & \dots & E(\mu_1\mu_n)\\ E(\mu_2\mu_1) & E(\mu_2^2) & \dots & E(\mu_2\mu_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ E(\mu_n\mu_1) & E(\mu_n\mu_2) & \cdots & E(\mu_n^2)\end{bmatrix}$$

وبما أن: $Var(\mu_i) = E(\mu_i^2) = \sigma^2$، فإن:

$$E(\mu\mu') = \begin{bmatrix}Var(\mu_1) & Cov(\mu_1\mu_2) & \dots & Cov(\mu_1\mu_n)\\ Cov(\mu_2\mu_1) & Var(\mu_2) & \dots & Cov(\mu_2\mu_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Cov(\mu_n\mu_1) & Cov(\mu_n\mu_2) & \cdots & Var(\mu_n)\end{bmatrix}$$

و بما أن $Cov(\mu_i\mu_j) = E(\mu_i\mu_j) = 0$ حيث أن $i \neq j$؛ يصبح لدينا:

$$E(\mu\mu') = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix}$$

حيث أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2$، نجد ان:

$$E(\mu\mu') = \sigma^2\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$E(\mu\mu') = \sigma^2 In$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك، $(Variance -$ $Covariance\ Matrix)$ لحد الخطأ (μ)، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة، تبيان قيم (μ) بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر)، مساوية للصفر لإنعدام التباين المشترك والترابط بين قين قيم (μ_i)

- ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما وأن عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها، أي أن:

$$r(x) = k + 1 < n$$

حيث أن (r) رتبة مصفوفة البيانات، (X) تساوي عدد المتغيرات المستقلة، (k) زائد (1) الحد الثابت، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n)، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان إيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$، إذ ان وجود هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) أقل من $(k+1)$، وبالتالي فإن رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات (OLS) بدورها أقل من $(k+1)$، ولا يمكن إيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS).

- طرق تقدير معلمات النموذج:

في ضوء الفرضيات المذكورة أعلاه، يمكن استخدام (OLS)، في تقدير نعلمات النموذج الخطي المتعدد، ولهذا الغرض يمكن إعادة كتابة المعادلة (I) بصيغتاه التقديرية كالتالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$$

وبما أن هدفنا هو الحصول على قيم كل من $\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right)$ التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن، أي تصغير القيمة $\left(\sum e_i^2\right)$ (مبدأ المربعات الصغرى) إلى أقل قيمة ممكنة، أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\sum e_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

ومن خلال التعويض بـ $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right)$ ومساوتها بالصفر نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right)^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 2 \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right)(-1) = 0$$

$$2 \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right)(-1) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس؛ نجد:

$$\sum Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} - \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} \dots\dots\dots (III)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right)(-X_{i1}) = 0$$

$$-2\sum X_{i1}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس؛ نجد:

$$\sum X_{i1} Y_i - \hat{\beta}_0 \sum X_{i1} - \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}^2 - \hat{\beta}_2 \sum X_{i1} X_{i2} = 0$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{i1} X_{i2} \dots\dots\dots (IV)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right)(-X_{i2}) = 0$$

$$-2\sum X_{i2}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2}\right) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس؛ نجد:

$$\sum X_{i2} Y_i - \hat{\beta}_0 \sum X_{i2} - \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} X_{i2} - \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}^2 = 0$$

$$\sum X_{i2} Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}^2 \dots\dots\dots (V)$$

تمثل المعادلات (III) و (IV) و (V) المعادلات الطبيعية الثلاثة التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right)$، ويمكن حل هذه المعادلات بالطرق التالية:

- طريقة المحددات:

ويمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرايمر للحصول على قيم $\hat{\beta}_k$ من المعلمات وعلى النحو الآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{i1} X_{i2}$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

ومن خلال ذلك، نستطيع إيجاد المحددات التالية:

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}\,Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N_1| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}\,Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N_2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}\,Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}\,Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}\,Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{|N_2|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}\,Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}\,Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة لـ $\hat{\beta}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق:

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}_1-\hat{\beta}_2\bar{X}_2$$

- طريقة الانحرافات:

ويمكن تقدير معاملات الانحدار المتعدد باستخدام الانحرافات أو ما يسمى بالمتوسطات، أي إنحرافات القيم الاصلية عن وسطها الحسابي كالآتي:

ولهذا نأخذ نموذج يحتوي متغيرين مستقلين X_1 و X_2:

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_1X_{i1}+\hat{\beta}_{i2}X_{i2}+e_i$$

وبأخذ المتوسط لهه المعادلة نجد:

$$\bar{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\bar{X}_1+\hat{\beta}_2\bar{X}+\bar{e}_i \qquad , \qquad \bar{e}_i=0$$

$$\hat{Y}_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_1(X_{i1}-\bar{X}_1)+\hat{\beta}_2(X_{i2}-\bar{X})+e_i$$

$$\hat{y}_i=\hat{\beta}_1x_{i1}+\hat{\beta}_2x_{i2}+e_i \;\ldots\ldots\ldots\; (V)$$

في واقع الأمر فإن المعادلة أعلاه هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n معادلة تكون نظام المعادلات التالي:

$$y_1=\hat{\beta}_1x_{11}+\hat{\beta}_2x_{12}+\cdots+\hat{\beta}_kx_{1k}+e_1$$

$$y_2=\beta_1x_{21}+\beta_2x_{22}+\cdots+\hat{\beta}_kx_{2k}+e_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots$$

$$y_n=\hat{\beta}_1x_{n1}+\hat{\beta}_2x_{n2}+\cdots+\hat{\beta}_kx_{nk}+e_n$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$y = x\hat{\beta} + e$$

y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على انحرافات قيم المتغير التابع.

x: مصفوفة أبعادها $(n \times k-1)$ تحتوي على انحرافات قيم المتغيرات المستقلة، حيث أنها لا تتضمن العمود الأول الذي يمثل الحد لاثابت، حيث يمكن بذلك استخراج الحد الثابت $\hat{\beta}_0$ من خارج المصفوفة باستخدام القانون التالي:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}_1 - \hat{\beta}_2\bar{X}_2$$

$\hat{\beta}$: متجه عمودي أبعاده $(k-1 \times 1)$ تحتوي على المعالم المجهولة.

e: متجه عمودي ابعاده $(n \times 1)$ يحتوي على البواقي.

بإعادة كتابة المعادلة (V) على النحو التالي:

$$e_i = y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}$$

ولما كانت أفضل طريقة للحصول على أصغر قيمة ممكنة للإنحرافات تتم بواسطة تربيعها وبجعل مربعاتها أصغر ما يمكن، وبأخذ المشتقة الجزئية لها بالنسبة لكل من $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ ومساواتها بالصفر؛ نحصل على ما يلي:

$$\sum e_i^2 = \sum \left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum \left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)(-x_{i1}) = 0$$

$$-2\sum x_{i1}\left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right) = 0$$

وبالقسمة على $(2-)$ وفك القوس، نحصل على:

$$\sum x_{i1}\, y_i - \hat{\beta}_1 \sum (x_{i1})^2 - \hat{\beta}_2 \sum x_{i1}\, x_{i2} = 0$$

$$\sum x_{i1}\, y_i = \hat{\beta}_1 \sum (x_{i1})^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i1}\, x_{i2} \ldots\ldots\ldots (VI)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum \left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)(-x_{i2}) = 0$$

$$-2\sum x_{i2}\left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right) = 0$$

وبالقسمة على (-2) وفك القوس، نحصل على:

$$\sum x_{i2}\, y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}x_{i2} - \hat{\beta}_2 \sum (x_{i2})^2 = 0$$

$$\sum x_{i2}\, y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum (x_{i2})^2 \;\ldots\ldots\ldots (VII)$$

ويمكن صياغة المعادلتين السابقين على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sum x_{i1}\, y_i \\ \sum x_{i2}\, y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum (x_{i1})^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i1}x_{i2} & \sum (x_{i2})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن إعادة كتابته بالشكل التالي:

$$x'y = (x'x)\hat{\beta}$$

وعليه فإن تقدير المعالم باستخدام المصفوفة بأسلوب الانحرافات يأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = x'y(x'x)^{-1}$$

وبعد احتساب المتجه $x'y$ ومحدد المصفوفة $|x'x|$ الذي ينبغي أن لا يساوي صفرا، نوجد مقلوب المصفوفة الذي هو عبارة عن:

$$(x'x)^{-1} = \frac{adj(x'x)}{|x'x|}$$

ومن ثم تطبيق القانون أعلاه، أما $\hat{\beta}_0$ فيمكن حسابه بموجب القانون التالي:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

هذا ويمكن استخراج القيم بالانحرافات دون الرجوع الى البيانات الاصلية كما يلي:

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$