المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ماستر : اقتصاد نقدي و مالي

المحاضرة 4 : مشاكل قياسية

من إعداد الأستاذ : لفيلف عبد الحق

أستاذ بالمركز الجامعي ميلة

دكتوراه في العلوم المالية والمصرفية

السنة الجامعية 2023 –2024

تمهيد:

تهدف هذه المحاضرة إلى التعامل مع حالات انتهاك الفرضيات الأساسية لنموذج الانحدار الخطي البسيط والمتعدد على حد سواء وعلاجها، في إطار ما يتعارف على تسميته بالمشاكل القياسية لنموذج الانحدار الخطي، وهذه الأخيرة تتمثل في ثلاثة مشاكل شهيرة هي التعدد الخطي، الارتباط الذاتي للأخطاء وعدم ثبات تباين الأخطاء إضافة إلى ارتباط المتغير المستقل بأخطاء التقدير.

1. معاملات الارتباط الجزئية:

قبل الخوض في المشاكل القياسية نعرج إلى التعرف على معاملات الارتباط الجزئية ضمن نموذج الانحدار الخطي المتعدد، حيث نقتبس هنا المثال الذي أدرجه Regis Bourbonnais في كتابه Econométrie في الصفحة 107 من النسخة الثامنة، حين أشار إلى محل لبيع المثلجات قرب برج إيفل في باريس أراد أن يقيس معامل الارتباط بين مبيعات المثلجات وعدد السياح الوافدين، هنا من الطبيعي سوف يكون معامل الارتباط طردي ومرتفع جدا حيث كلما كثر السياح كثرت مبيعات المثلجات، لكن تجدر الإشارة هنا إلى عامل جدا مهم، ألا وهو درجة الحرارة حيث أن درجة الحرارة هي اللاعب المحوري في هذه العلاقة حيث أن إقبال السياح يتبع درجات الحرارة، هذا ما يجعل معامل الارتباط البسيط الأول زائفا إلى حد ما ولا يعبر عن العلاقة الحقيقية بين المتغيرين، من هنا صار من المهم التعامل مع معاملات الارتباط الجزئية، حيث لدينا مثلا:

- ✓ r_{x_1,x_2} هو معامل الارتباط البسيط بين x_1 و x_2.
- ✓ r_{x_1,x_3} هو معامل الارتباط البسيط بين x_1 و x_3.
- ✓ r_{x_2,x_3} هو معامل الارتباط البسيط بين x_2 و x_3.

أما معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الأولى فتكون على النحو التالي:

- ✓ $r_{x_1x_2,x_3}$ ويمثل معامل الارتباط الجزئي بين x_1 و x_2 مع حذف تأثير x_3.
- ✓ $r_{x_1x_3,x_2}$ ويمثل معامل الارتباط الجزئي بين x_1 و x_3 مع حذف تأثير x_2.
- ✓ $r_{x_2x_3,x_1}$ ويمثل معامل الارتباط الجزئي بين x_2 و x_3 مع حذف تأثير x_1.

كما يمكننا أيضا حساب معاملات الارتباط من الدرجة الثانية على النحو التالي:

- ✓ $r_{x_1x_2,x_3x_4}$ ويمثل معامل الارتباط الجزئي بين x_1 و x_2 مع حذف تأثير x_3 و x_4.

من هنا يمكننا حساب معاملات الارتباط الجزئية من خلال طريقتين كالتالي:

الطريقة الأولى:

لدينا على سبيل المثال ثلاثة متغيرات مستقلة ومتغير تابع، نقوم كأول مرحلة بتقدير المعادلة التالية واستخراج البواقي على النحو التالي:

$$e_{1t} = y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 x_{2t})$$

في حالة ما كنا نريد حساب معامل الارتباط الجزئي بين x_3 و y_t مع حذف تأثير x_1 و x_2 نقوم باستخراج بواقي معادلة التقدير التالية:

$$e_{2t} = x_{3t} - (\hat{a}'_0 + \hat{a}'_1 x_{1t} + \hat{a}'_2 x_{2t})$$

وكمرحلة ثالثة وأخيرة يكون معامل الارتباط الجزئي بين x_3 و y_t مع حذف تأثير x_1 و x_2 كالتالي:

$$r^2_{yx_3,x_1x_2} = r^2_{e_{1t},e_{2t}}$$

وتجدر الإشارة إلى أنه كلما ارتفع معامل الارتباط الجزئي في هذه الحالة كان يعني ذلك أهمية المتغير قيد الدراسة في النموذج المقدر الكلي.

الطريقة الثانية:

في حالة وجود k متغير مستقل وبغية حساب معامل الارتباط الجزئي ذي الدرجة $k-1$ يمكننا حسابه من خلال إحصائية ستيودنت المحسوبة على النحو التالي (مثال وجود 3 متغيرات مستقلة):

$$r^2_{yx_3,x_1x_2} = \frac{t_i^2}{t_i^2 + (n-k-1)}$$

أما الحالة العامة فتكون كالتالي:

$$r^2_{yx_3,(autres\ variables)} = \frac{t_i^2}{t_i^2 + (n-k-1)}$$

حالة خاصة:

في حالة وجود ثلاثة متغيرات يمكن استخراج علاقة بين معاملات الارتباط البسيطة ومعاملات الارتباط الجزئية على النحو التالي:

$$r_{x_1x_2,x_3} = \frac{r_{x_1,x_2} - (r_{x_1,x_3})(r_{x_2,x_3})}{\sqrt{(1-r^2_{x_1,x_3})(1-r^2_{x_2,x_3})}}$$

أو:

$$r_{x_1x_3,x_2} = \frac{r_{x_1,x_3} - (r_{x_1,x_2})(r_{x_2,x_3})}{\sqrt{(1 - r_{x_1,x_2}^2)(1 - r_{x_2,x_3}^2)}}$$

كما يمكننا استخراج علاقة عامة بين معامل الارتباط البسيط، الجزئي والمتعدد على النحو التالي:

لدينا في حالة نموذج الانحدار الخطي البسيط مجموع مربعات البواقي يحسب كالتالي:

$$\text{SCR} = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 (1 - R_{y,x_1}^2) = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 (1 - r_{y,x_1}^2)$$

حيث كما سبق وأوضحنا R_{y,x_1}^2 هو معامل التحديد الذي هو نفسه في حالة نموذج الانحدار الخطي المتعدد مربع معامل الارتباط البسيط، لكن لنفترض لدينا معادلة التقدير التالية:

$$y_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 x_{2t} + e_t$$

يكون مجموع مربعات الأخطاء على النحو التالي:

$$\text{SCR} = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 (1 - R_{y,x_1x_2}^2)$$

أين يمثل $R_{y,x_1x_2}^2$ معامل التحديد للنموذج ككل، حيث يمكننا كتابة هذه العلاقة على النحو التالي:

$$\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 (1 - R_{y,x_1x_2}^2) = (1 - r_{yx_2,x_1}^2) \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 (1 - r_{y,x_1}^2)$$

وبالتبسيط يصبح لدينا:

$$1 - R_{y,x_1x_2}^2 = (1 - r_{yx_2,x_1}^2)(1 - r_{y,x_1}^2)$$

ومع تعميم هذه العلاقة نتحصل على:

$$1 - R_{y,x_1x_2x_3}^2 = (1 - r_{y,x_1}^2)(1 - r_{yx_2,x_1}^2)(1 - r_{yx_3,x_1x_2}^2)$$

وفي حالة أربعة متغيرات مستقلة تصبح العلاقة:

$$1 - R_{y,x_1x_2x_3x_4}^2 = (1 - r_{y,x_1}^2)(1 - r_{yx_2,x_1}^2)(1 - r_{yx_3,x_1x_2}^2)(1 - r_{yx_4,x_1x_2x_3}^2)$$

كما تجدر الإشارة إلى أن الترتيب غير مهم حيث يمكن كتابة العلاقة كالتالي:

$$1 - R_{y,x_1x_2x_3x_4}^2 = (1 - r_{y,x_3}^2)(1 - r_{yx_4,x_3}^2)(1 - r_{yx_1,x_3x_4}^2)(1 - r_{yx_2,x_1x_3x_4}^2)$$

2. مشكلة التعدد الخطي (أو الازدواج الخطي):

تتمثل هذه المشكلة في نقض الفرضية التاسعة من فرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد التي تنص على أن المتغيرات المستقلة منفصلة عن بعضها البعض مما يجعل المصفوفة $X'X$ مصفوفة ذات محدد يمكن استخراج معكوسها ومن ثم تقدير المعلمات حيث أنها تصبح مصفوفة غير تامة وأقل رتبة من المصفوفة X، حيث كما سبق وأشرنا في الفصل السابق فإن معامل التغير $\hat{a}_k$ يعبر عن مقدار تغير المتغير التابع كاستجابة لتغير المتغير المستقل k بوحدة واحدة مع بقاء المتغيرات المستقلة الأخرى على حالها بلا تغير، لكن في حالة وجود متغيرين مستقلين يمتازان بارتباط بينهما، فعندما يتغير أحدهما سيتغير الآخر مباشرة كاستجابة لذلك، الأمر الذي يصعب من تمييز أثر أحد المتغيرات عن الآخر ومن ثم على المتغير التابع.

1.2. أسباب التعدد الخطي وآثاره:

من أهم أسباب التعدد الخطي يمكننا تمييز ما يلي:

- ارتباط المتغيرات الاقتصادية فيما بعضها حيث تتغير مع بعض على مرور الزمن على غرار الدخل، الاستهلاك، الاستثمار والادخار هذا ما يعد ويعتبر دليل هام وواضح لوجود التعدد الخطي بين المتغيرات الاقتصادية.
- استخدام الإبطاءات والفجوات الزمنية للمتغيرات المستقلة على غرار استعمال تأخر المتغير المستقل x بفترة زمنية واحدة على سبيل المثال والتي بدورها تتحدد بالقيمة التي قبلها مما يسبب تعدد خطي.

أما فيما يخص آثار التعدد الخطي فيمكننا تلخيصها فيما يلي:

- ارتفاع قيمة التباين والتباين المشترك للمقدرات بدرجات كبيرة مما يعني ابتعادها عن القيم الحقيقية والتأثير على التنبؤ.
- القيم المقدرة للمعاملات لن تكون محدد ولا دقيقة.
- عدم ثبات المعلمات عبر الزمن حيث تصبح كثيرة التغير مع مرور الوقت.

2.2. طرق الكشف عن وجود التعدد الخطي:

1.2.2. اختبار Klein: يعمد هذا الاختبار إلى مقارنة معامل التحديد R^2 للنموذج المقدر ومربع معاملات الارتباط البسيطة $r^2_{x_i,x_j}$، حيث إذا كان $R^2 < r^2_{x_i,x_j}$ فهذا دليل على وجود تعدد وازدواج خطي في النموذج المقدر والعكس صحيح.

2.2.2. اختبار Farrar-Glauber: يتم هذا الاختبار وفق المراحل التالية:

1. نقوم بحساب مصفوفة معاملات الارتباط البسيطة لكل المتغيرات المستقلة كالتالي:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1,x_2} & r_{x_1,x_3} & \cdots & r_{x_1,x_k} \\ r_{x_2,x_1} & 1 & r_{x_2,x_3} & \cdots & r_{x_2,x_k} \\ r_{x_3,x_1} & r_{x_3,x_2} & 1 & \cdots & r_{x_3,x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{x_k,x_1} & r_{x_k,x_2} & r_{x_k,x_3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. نقوم بحساب محدد المصفوفة D الذي كلما اتجه حول الصفر كان ذلك دليلا على وجود تعدد خطي في النموذج المقدر والعكس صحيح، حيث:

- في حالة متغيرين مستقلين مرتبطين كليا بينهما أي $r_{x_1,x_2} = 1$ يكون لدينا:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1,x_2} \\ r_{x_2,x_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- أما حالة متغيرين مستقلين غير مرتبطين إطلاقا أي $r_{x_1,x_2} = 0$ فيكون لدينا:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1,x_2} \\ r_{x_2,x_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

3. في هذه المرحلة نقوم بتحديد الفرضيتين العدمية والبديلة للاختبار وهما:

$$\begin{cases} H_0: |D| = 1 \ (\text{حالة عدم وجود تعدد خطي}) \\ H_1: |D| < 1 \ (\text{حالة وجود تعدد خطي}) \end{cases}$$

4. في هذه المرحلة نقوم بحساب إحصائية قيمة χ^2 المحسوبة وفق العلاقة التالي:

$$\chi^{2*} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}\,(2K + 5)\right].\,ln|D|$$

حيث K هو عدد المتغيرات المستقلة إضافة إلى الحد الثابت $(K = k + 1)$.

5. المرحلة الأخيرة هي اختبار الفرضيتين من مقارنة إحصائية كاي تربيع المحسوبة والجدولية وفق طريقة القرار التالية:

- $\chi^{2*} \geq \chi^2$ نرفض الفرضية العدمية ونقول بوجود تعدد خطي.
- $\chi^{2*} < \chi^2$ نقبل الفرضية العدمية ونقول بعدم وجود تعدد خطي.

حيث أن درجات الحرية لإحصائية كاي تربيع الجدولية هي $\frac{1}{2}K(K - 1)$.

3.2.2. حلول مشكلة التعدد الخطي:

للتعامل مع مشكلة التعدد الخطي توجد بعض الإجراءات التي تساعد على تفاديه، على غرار مثلا توسيع حجم العينة من خلال زيادة الوحدات أو السنوات كجعلها معطيات شهرية أو أسبوعية بدلا من سنوية، مع ضرورة التأكد أن البيانات المضافة

تختلف معنويا عن البيانات الموجودة مسبقا كي لا يتم تعزيز المشكل، يمكن أيضا حذف بعض المتغيرات من خلال العودة إلى النظرية الاقتصادية الأمر الذي يساهم في تخفيف وحذف مشكلة التعدد الخطي، ومن بين الحلول التقنية أيضا إمكانية تحويل المصفوفة $X'X$ إلى المصفوفة $X'X + cI$ ما يعني إضافة عدد حقيقي ثابت مختار عشوائيا c إلى قطر المصفوفة $X'X$ فيما يعرف في عمليات التقدير ب Ridge Regression الأمر الذي قد يساهم في تخفيف أثر التعدد الخطي بين المتغيرات.

3. مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

ينتج هذا المشكل من نقض الفرضية السادسة في إطار نموذج الانحدار الخطي المتعدد والانحدار الخطي البسيط التي تنص على أن الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض $COV(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = E(\varepsilon_t - E\varepsilon_t)(\varepsilon_{t'} - E\varepsilon_{t'}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0$، حيث أن نقض هذه الفرضية يعني أن مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة لا تساوي التباين المقدر للأخطاء في المصفوفة الوحدوية أي $E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon \neq \delta_\varepsilon^2 I$ ما يعني أن التباينات المشتركة بين الأخطاء (أي القيم غير القطرية) لا تساوي الصفر كما أشرنا في الفرضية السادسة:

$$\Omega_\varepsilon = \begin{bmatrix} V(e_1) & Cov(e_2,e_1) & \cdots & Cov(e_n,e_1) \\ Cov(e_1,e_2) & V(e_2) & \cdots & Cov(e_n,e_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(e_2,e_n) & Cov(e_2,e_n) & \cdots & V(e_n) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \delta_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_\varepsilon^2 \end{bmatrix} \neq \delta_\varepsilon^2 I$$

الأمر الذي يتعدى إلى مصفوفة التباينات للمقدرات $\Omega_{\hat{a}}$ التي تصبح على النحو التالي:

$$\Omega_{\hat{a}} = E\big((\hat{a} - a)(\hat{a} - a)'\big) = (X'X)^{-1}X'E\big(\varepsilon\varepsilon'\big)X(X'X)^{-1}$$
$$= (X'X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon X)(X'X)^{-1} \neq \delta_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$$

هذا ما يستلزم استعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة MCG (Moindres Carrés Généralisés) حيث تسمى المقدرات المتحصل عليها من خلال هذه الطريقة بمقدرات Aitken لتقدير المعالم مع ضرورة الحفاظ على نفس الخصائص لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، حيث تكون على النحو التالي:

$$\hat{a} = \left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y\right)$$

$$\Omega_{\hat{a}} = \left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X\right)^{-1}$$

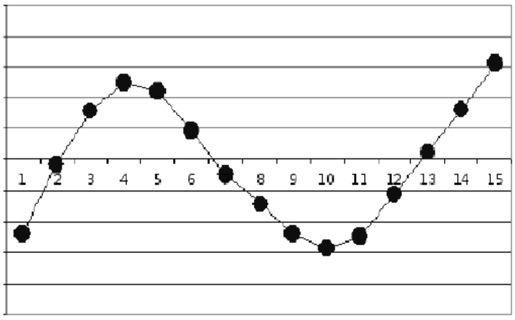
حيث تجدر الإشارة أن في حالة توفر الشروط سوف يكون مقدر Aitken هو نفسه مقدر طريقة المربعات الصغرى:

$$\hat{a}_{MCG} = \left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y\right) = \left(X'\left(\frac{1}{\delta_\varepsilon^2}I\right)X\right)^{-1}\left(X'\left(\frac{1}{\delta_\varepsilon^2}I\right)Y\right)$$
$$= (X'X)^{-1}(X'Y) = \hat{a}_{MCO}$$

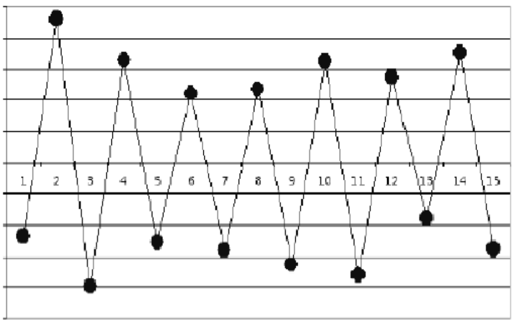
1.3. أنواع وأسباب الارتباط الذاتي للأخطاء:

في هذا الإطار لدينا نوعين من الارتباطات الذاتية للأخطاء كما يوضح الشكل أدناه، حيث يمثل الشكل على اليمين ما يعرب بالارتباط الذاتي الموجب حيث كما نلاحظ الأخطاء تمتاز بإشارة متماثلة تسلسليا قبل الانتقال إلى الإشارة الأخرى (من الموجب إلى السالب أو العكس) ثم تبقى مرة أخرى متماثلة لبعض الوقت قبل الانتقال مجددا، في حين الشكل المقابل على اليسار يمثل الارتباط الذاتي السالب حيث يمثل في هذه الحالة تناوب الإشارات بين الموجبة والسالبة على التوالي:

الشكل رقم 01: شكل يبين أنواع الارتباط الذاتي للأخطاء:



الارتباط الذاتي الموجب



الارتباط الذاتي السالب

أما أسبابه فتتمثل في على سبيل المثال إهمال بعض المتغيرات المستقلة المهمة في النموذج المقدر الأمر الذي يضعف القدرة التفسيرية للمتغير التابع مما يسبب ارتباط الأخطاء ذاتيا، كما يمكن إيعازه أيضا إلى خطأ اختيار الصياغة الرياضية للنموذج إضافة إلى عدم دقة البيانات المستعملة، أما ما قد ينجر عن وجود هذا المشكل هو عدم تحيز المقدرات بعد التقدير أين تبتعد عن قيمها الحقيقية والنظرية الأمر الذي يساهم أيضا في كبر التباينات المقدرة للمقدرات في النموذج مما يسبب ضعف في القدرة التنبؤية للنموذج المقدر.

2.3. طرق الكشف عن وجود ارتباط ذاتي للأخطاء:

1.2.3. اختبار داربن واتسن Durbin-Watson (1950-1951):

يستعمل هذا الاختبار للكشف عن وجود ارتباط ذاتي لأخطاء التقدير من الدرجة الأولى (يعني إمكانية ارتباط الخطأ بالخطأ الذي يسبقه فقط)، حيث لدينا النموذج التالي:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \mu_t \rightarrow N(0, \delta_\mu^2)$$

حيث نقوم باختبار الفرضيتين التاليتين:

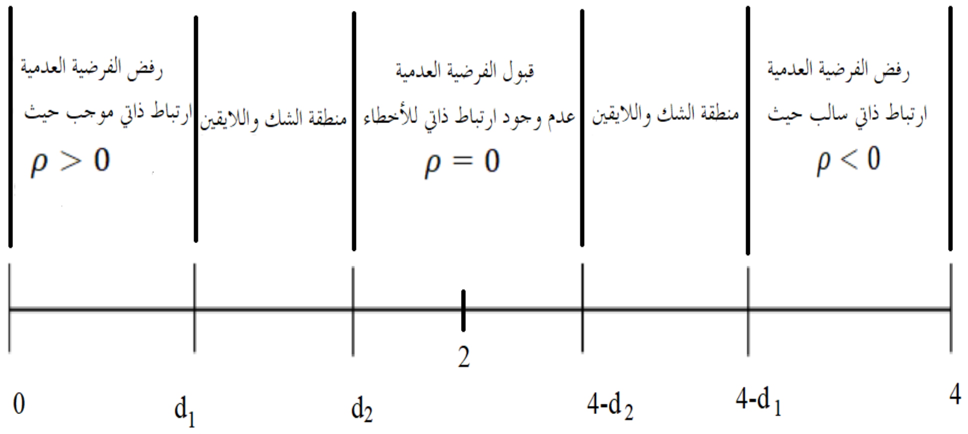
$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

ولغرض اختبار فرضية العدم أعلاه نلجأ لحساب إحصائية داربن واتسن DW المحسوبة وفق العلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وما يميز هذه الإحصائية أنها محصورة بين القيمتين 0 و4، حيث تكون القيمة $DW = 2$ تمثل حالة مساواة معامل الارتباط المقدر للصفر $\hat{\rho} = 0$، كما أن إحصائية DW الجدولية عند درجة معنوية $\alpha\%$ وn مشاهدات وk متغير مستقل تسمح بقراءة قيمتين جدوليتين هما d_1 وd_2 محصورتين بين 0 و2، والشكل التالي يبين كيفية القرار:

الشكل رقم 02: شكل يبين طريقة التعامل مع اختبار داربن واتسن:

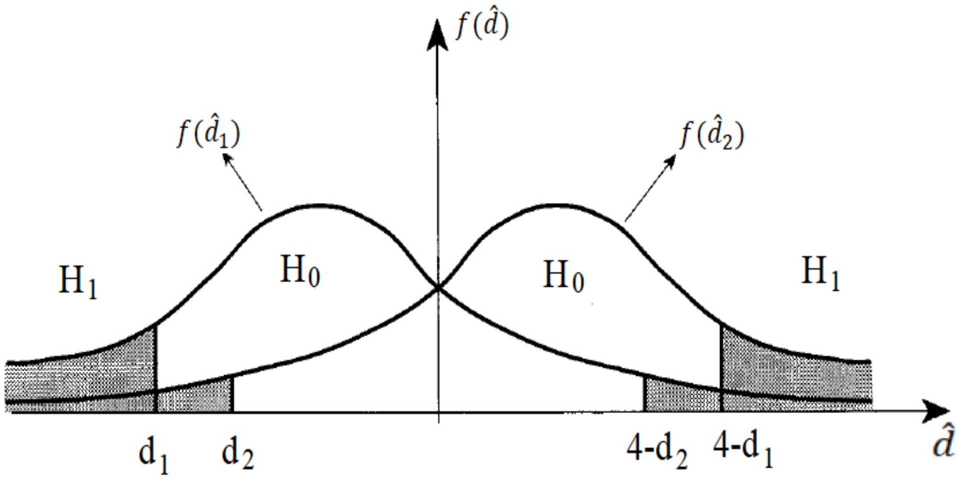


بالتالي يكون القرار على النحو التالي وفق وقوع إحصائية داربن واتسن المحسوبة ضمن الشكل أعلاه:

- ✓ $d_2 < DW < 4 - d_2$ نقبل الفرضية العدمية بعدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء و$\rho = 0$.
- ✓ $0 < DW < d_1$ نرفض الفرضية العدمية ونقول بوجود ارتباط ذاتي موجب للأخطاء $\rho > 0$.
- ✓ $4 - d_1 < DW < 4$ نرفض الفرضية العدمية ونقول بوجود ارتباط ذاتي سالب للأخطاء $\rho < 0$.
- ✓ $d_1 < DW < d_2$ و$4 - d_2 < DW < 4 - d_1$ هذين الحالتين لا يمكن اتخاذ قرار بشأن وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء.

كما يمثل الشكل التالي الكثافة الاحتمالية لكل من d_1 وd_2:

الشكل رقم 03: شكل يبين الكثافة الاحتمالية لكل من d_1 وd_2:



هنا يجب الإشارة إلى أن هذا الاختبار لا يستعمل في حالة عدم وجود حد ثابت في النموذج المقدر أو وجود متغيرات تابعة ذات إبطاءات كمتغيرات مستقلة كما أنه لا يستعمل إلا لدراسة الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى، كما يجب أن لا تقل عدد المشاهدات عن 15.

ملاحظة:

من خلال إحصائية DW أعلاه يتضح أن البسط جداء شهير من الشكل $(a-b)^2$ والذي يساوي a^2+b^2-2ab بالتالي يصبح لدينا:

$$DW=\frac{\sum_{t=1}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}=\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2+\sum_{t=1}^{n}e_{t-1}^2-2\sum_{t=1}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}$$

$$DW=\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}+\frac{\sum_{t=1}^{n}e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}-\frac{2\sum_{t=1}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}$$

نلاحظ أنه كلما ارتفع n كانت $\sum_{t=1}^{n}e_t^2=\sum_{t=1}^{n}e_{t-1}^2$ فتصبح العلاقة كالتالي:

$$DW=\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}+\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}-\frac{2\sum_{t=1}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}$$

$$DW=1+1-\frac{2\sum_{t=1}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}=2-2\frac{\sum_{t=1}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}$$

ولابد من الإشارة إلى أن معامل الارتباط $\hat{\rho}=\frac{\sum_{t=1}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}$ منه تصبح العلاقة على النحو التالي:

$$DW=2-2\hat{\rho}\rightarrow\hat{\rho}=1-\frac{DW}{2}$$

2.2.3. اختبار Breusch-Godfrey (1978):

من نقائص اختبار داربن واتسن هو اقتصاره على الارتباط الخطي من الدرجة الأولى كما تعتبر منطقتي الشك في القرار من أكبر عيوبه، هذا ما أدى إلى ظهور اختبارات أخرة على غرار ما نحن بصدده اختبار BG، وهذا الأخير يرتكز على مضاعف لاجرانج Lagrange Multiplier لاختبار وجود ارتباط ذاتي للأخطاء في درجة أكبر من الواحد، ويبدأ الاختبار من معادلة الانحدار الذاتي للأخطاء التي تكتب على النحو التالي:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + \mu_t$$

بتعميم النموذج ليشمل المتغير التابع ومتغيراته المستقلة يكون النموذج الكلي كالتالي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \cdots + a_k x_{kt} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + \mu_t$$

ويتم هذا الاختبار على ثلاثة مراحل متتالية هي كالتالي:

1) تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى واستخراج البواقي e_t.
2) تقدير معادلة وسيطية تكون البواقي فيه هي المتغير التابع على النحو التالي:

$$e_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \cdots + a_k x_{kt} + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_p e_{t-p} + \mu_t$$

3) ثم استخراج معامل التحديد للمعادلة الوسيطية R^2 مع ضرورة معرفة أنه سوف يتم فقدان p مشاهدة من أجل فروقات الأخطاء، وهذا مع اختبار الفرضيتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_p = 0 \ (\text{فرضية استقلالية الأخطاء}) \\ H_1: \rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_p \neq 0 \ (\text{فرضية الارتباط الذاتي للأخطاء}) \end{cases}$$

كما أشرنا أعلاه فاختبار Breusch-Godfrey يعتمد على إحصائية مضاعف لاغرانج LM التي تحسب وفق العلاقة $LM = (n-p)R^2$، هذه الإحصائية تتبع توزيع كاي تربيع ب p درجة حرية، حيث في حالة ما كانت قيمة مضاعف لاغرانج أكبر من قيمة كاي تربيع الجدولية $\chi^2(p) \leq LM$ فإننا نرفض فرضية العدم ونقول بعدم استقلالية الأخطاء (وجود مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء)، أما في حالة ما إذا كان $\chi^2(p) > LM$ نقبل فرضية العدم ونقول باستقلالية الأخطاء وعدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء.

3.3. طرق التقدير في حالة وجود ارتباط ذاتي للأخطاء:

في حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى لدينا النموذج الخطي التالي:

$$Y = Xa + \varepsilon$$

كما لدينا أيضا:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \mu_t \qquad |\rho| < 1$$

فتصبح لدينا المعادلة التالي:

$$\varepsilon_t = \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + \mu_{t-1}) + \mu_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + (\rho\mu_{t-1} + \mu_t)$$

$$\varepsilon_t = \mu_t + \rho\mu_{t-1} + \rho^2\mu_{t-2} + \rho^3\mu_{t-3} + \cdots$$

وبما أن $|\rho| < 1$ فإن هذا النظام الأخير يتجه نحو الصفر، كما لدينا من خصائص الأخطاء ما يلي:

$$E(\varepsilon_t) = E(\rho\varepsilon_{t-1} + \mu_t) = \rho E(\varepsilon_{t-1}) + E(\mu_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\rho\varepsilon_{t-1} + \mu_t)^2 = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(\mu_t^2)$$

حيث أن الأخطاء ε_t مستقلة عن الأخطاء μ_t، هذا ما يجعل تباين الأخطاء ثابت عبر الزمن كالتالي:

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2) = \delta_\varepsilon^2$$

لدينا أيضا: $\delta_\varepsilon^2 = \frac{\delta_\mu^2}{(1-\rho^2)} \rightarrow \delta_\varepsilon^2 (1 - \rho^2) = \delta_\mu^2$.

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) = E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) = E\big(\varepsilon_t, (\rho\varepsilon_t + \mu_{t+1})\big) = \rho\delta_\varepsilon^2$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+2}) = E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+2}) = E\big(\varepsilon_t, (\rho\varepsilon_{t+1} + \mu_{t+2})\big) = \rho^2\delta_\varepsilon^2$$

ومنه نصل إلى مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للأخطاء لهذا الحالة حيث تكون على النحو التالي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \frac{\delta_\mu^2}{(1-\rho^2)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho \neq 1$$

كنا قد أشرنا أعلاه أن المقدرة بطريقة MCG تحسب وفق العلاقة:

$$\hat{a} = \left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y\right) \dots\dots\dots\dots (1)$$

ومنه يكون لدينا:

$$\Omega_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\delta_\mu^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

ولغرض تقدير كلا من ρ و δ_μ^2 نقوم بالتحويل المصفوفي التالي $\mathrm{MY} = \mathrm{MXa} + \mathrm{M}\varepsilon$ الذي يسمح لنا باستخلاص أخطاء مستقلة وثابتة عبر الزمن حيث تحقق لنا:

$$E(\mathrm{M}\varepsilon(\mathrm{M}\varepsilon)') = E(M\varepsilon\varepsilon'M') = ME(\varepsilon\varepsilon')M' = M\Omega_\varepsilon M' = \delta_\varepsilon^2 I$$

وفي هذه الحالة يمكننا تقدير المقدرة BLUE ل a بطريقة المربعات الصغرى كالتالي:

$$\hat{a} = ((MX)'MX)^{-1}((MX)'MY = (X'M'MX)^{-1}X'M'MY \ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) يكون لدينا $M'M = \lambda\Omega_\varepsilon^{-1} = \delta_\mu^2\Omega_\varepsilon^{-1}$ حيث المصفوفة M تكون كالتالي:

$$M = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

وتصبح لدينا:

$$M'M = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أنها نفس المصفوفة $\delta_\mu^2\Omega_\varepsilon^{-1}$ الأمر يحول طريقة المربعات الصغرى المعممة إلى طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث يتم تقدير النموذج المصحح من الارتباط الذاتي للأخطاء من خلال طريقة شبه الفروقات من الدرجة الأولى وفق المصفوفتين التاليتين:

$$MY = \begin{pmatrix} y_2 - \rho y_1 \\ y_3 - \rho y_2 \\ \vdots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{pmatrix} ; MX_k = \begin{pmatrix} x_{2k} - \rho x_{1k} \\ x_{3k} - \rho x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} - \rho x_{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أن استخدام شبه الفروقات سوف يتسبب في فقدان المشاهدة الأولى ولتجنب ضياعها يمكننا أن نضع:

$$Y_1^* = Y_1\sqrt{1-\rho^2}$$

$$X_{1k}^* = X_{1k}\sqrt{1-\rho^2}$$

ومنه يكون النموذج المصحح على النحو التالي الذي يمكن تقديره باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = a_0(1-\rho) + a_1\left(X_{1t} - \rho X_{1,t-1}\right) + a_2\left(X_{2t} - \rho X_{2,t-1}\right) + \cdots + a_k\left(X_{kt} - \rho X_{k,t-1}\right) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

لكن لابد أيضا من تقدير معامل الارتباط الذاتي بين الأخطاء من الدرجة الأولى $\hat{\rho}$ وذلك وفق الطرق التالية:

الطريقة الأولى: عن طريق إحصائية داربن واتسن:

المرحلة الأولى: تقدير ρ من خلال إحصائية داربن واتسن كما أوضحنا مسبقا $\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$.

المرحلة الثانية: تقدير النموذج التالي من بعد إجراء الحساب بشبه الفروقات:

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = a_0(1-\hat{\rho}) + a_1\left(X_{1t} - \hat{\rho} X_{1,t-1}\right) + a_2\left(X_{2t} - \hat{\rho} X_{2,t-1}\right) + \cdots + a_k\left(X_{kt} - \hat{\rho} X_{k,t-1}\right) + \mu_t$$

حيث:

$$Y_t^* = a_0^* + a_1 X_{1t}^* + a_2 X_{2t}^* + \cdots + a_k X_{kt}^* + \mu_t$$

والمعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى تكون $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ و $\hat{a}_0^* = \hat{a}_0(1-\hat{\rho})$.

الطريقة الثانية: التقدير باستعمال طريقة Theil-Nagar:

يتم حساب معامل الارتباط الذاتي وفق هذه المنهجية مباشرة باستعمال العلاقة التالية؟

$$\hat{\rho} = \frac{n^2[1-(DW/2)] + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث يمثل k عدد المتغيرات المستقلة، ثم نمر على نفس المراحل لتقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

الطريقة الثالثة: التقدير باستعمال طريقة Cochrane-Orcutt:

تتم هذه المنهجية من خلال أربع مراحل هامة هي كالتالي:

المرحلة الأولى: تتم بتقدير وحساب معامل الارتباط المقدر وفق العلاقة الموضوعة سابقا وهي:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

حيث تمثل $\hat{\rho}$ قيمة مبدئية لمعامل الارتباط الذاتي للأخطاء حيث تكون $\hat{\rho} = \hat{\rho}_0$.

المرحلة الثانية: تقدير نموذج شبه الفروقات التالي:

$$\begin{aligned} Y_t - \hat{\rho}_0 Y_{t-1} = {} & a_0(1-\hat{\rho}_0) + a_1\left(X_{1t} - \hat{\rho}_0 X_{1,t-1}\right) + a_2\left(X_{2t} - \hat{\rho}_0 X_{2,t-1}\right) + \cdots \\ & + a_k\left(X_{kt} - \hat{\rho}_0 X_{k,t-1}\right) + \mu_t \end{aligned}$$

حيث المعلمات المقدرة هي $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ و $\hat{a}_0 = \hat{a}_0/(1-\hat{\rho}_0)$.

المرحلة الثالثة: تقدير معامل الارتباط من جديد ببواقي التقدير الجديدة كالتالي:

$$e_t^1 = Y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{1t} - \cdots - \hat{a}_k x_{kt}$$

حيث يحسب معامل الارتباط الذاتي كالتالي:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^1 e_{t-1}^1}{\sum_{t=2}^{n} (e_t^1)^2}$$

المرحلة الرابعة: نكرر مرة أخرى تقدير النموذج لشبه الفروقات التالي:

$$\begin{aligned} Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} = {} & a_0(1-\hat{\rho}_1) + a_1\left(X_{1t} - \hat{\rho}_1 X_{1,t-1}\right) + a_2\left(X_{2t} - \hat{\rho}_1 X_{2,t-1}\right) + \cdots \\ & + a_k\left(X_{kt} - \hat{\rho}_1 X_{k,t-1}\right) + \mu_t \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة السابقة في المرحلة الثالثة من خلال حساب البواقي الجديدة ومعامل الارتباط الجديد $\hat{\rho}_2$ ثم إعادة الأمر مجددا إلى غاية ثبات مقدرات النموذج a_k حيث من المرجح أن تثبت وتسكن بعد المحاولة الثالثة أو الرابعة.

الطريقة الرابعة: التقدير باستعمال طريقة Hildreth-Lu:

تتم هذه المنهجية وفق مرحلتين أساسيتين هما:

المرحلة الأولى: من خلال إحصائية داربن واتسن المحسوبة نحدد نوعية الارتباط هل موجب أم سالب أي هل معامل الارتباط الذاتي أكبر أم أصغر من الصفر.

المرحلة الثانية: نقوم بتحديد مجالات على حسب إشارة معامل الارتباط الذاتي ρ فمثلا إذا كان معامل الارتباط موجب وينتمي للمجال $[0; 1]$ فنقوم بتقدير المعادلة الوسيطية لكل معاملات الارتباط البينية $\rho = \{0,1; 0,2; \dots; 0,9; 1\}$ من خلال معدل انتقال ثابت على غرار المجال الذي وضعناه هي معدل الانتقال هو $0,1$.

$$Y_t - \hat{\rho}_i Y_{t-1} = a_0(1-\hat{\rho}_i) + a_1\left(X_{1t} - \hat{\rho}_i X_{1,t-1}\right) + a_2\left(X_{2t} - \hat{\rho}_i X_{2,t-1}\right) + \cdots + a_k\left(X_{kt} - \hat{\rho}_i X_{k,t-1}\right) + \mu_t$$

وتمثل قيمة معامل الارتباط الأمثل القيمة المقترنة مع أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي للنماذج المقدرة المختلفة.

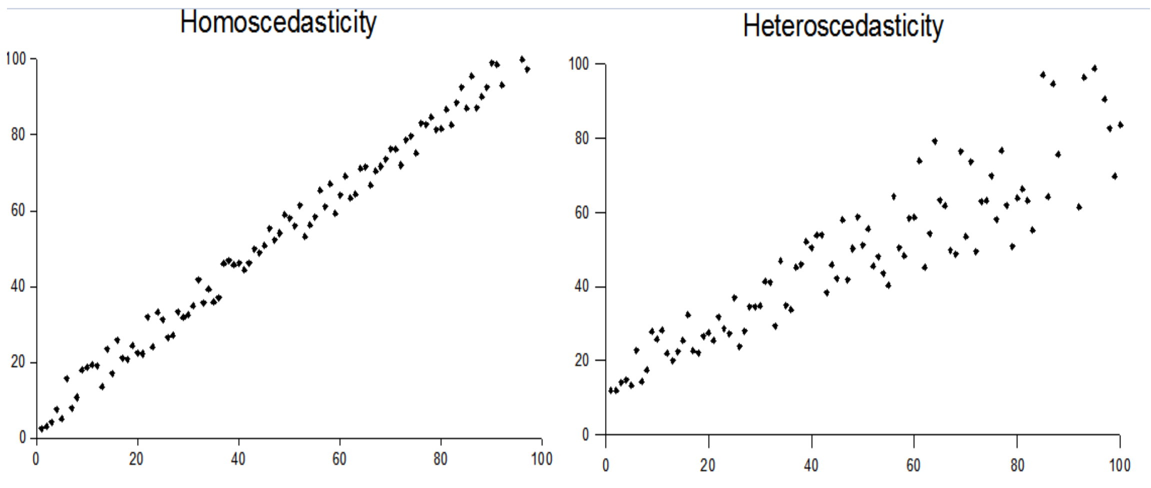
4. مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء:

تتمثل هذه المشكلة في نقض الفرضية الخامسة لكل من نموذج الانحدار الخطي البسيط والمتعدد، حيث أن تباين الأخطاء المقدر في هذه الحالة غير ثابت عبر الزمن وهذا ما تعبر عنه العلاقة التالية:

$$\Omega_\varepsilon = \begin{bmatrix} V(e_1) & Cov(e_2,e_1) & \cdots & Cov(e_n,e_1) \\ Cov(e_1,e_2) & V(e_2) & \cdots & Cov(e_n,e_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(e_2,e_n) & Cov(e_2,e_n) & \cdots & V(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^2_{\varepsilon 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^2_{\varepsilon 2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^2_{\varepsilon n} \end{bmatrix} \neq \delta^2_\varepsilon I$$

حيث تعرف حالة ثبات تباين الأخطاء ب Homoscedasticity في حين تعرف حالة عدم ثبات تباين الأخطاء ب Heteroscedasticity وذلك كما يبين الشكل أدناه، حيث نلاحظ أن حالة ثبات تباين الأخطاء تمتاز بالحفاظ على مجال تركز المشاهدات في إطار ضيق لا يتسع ولا ينخفض مع مرور الزمن، في حين نلاحظ أن حالة عدم ثبات تباين الأخطاء المشاهدات تعمد على الانتشار والتوسع أكثر فأكثر مع مرور الزمن مقارنة مع بداية الفترة.

الشكل رقم 04: شكل يبين حالة Homoscedasticity و Heteroscedasticity



1.4. أسباب وآثار عدم ثبات تباين الأخطاء:

من أهم الأسباب لمشكل عدم ثبات تباين الأخطاء نجد عدم دقة تجميع البيانات مما قد يسبب اختلالات وتباينات كبيرة بين القيم الحقيقية والمجمعة أو بين القيم المجمعة بحد ذاتها، كما يمكن إيعاز السبب إلى تكرار نفس قيمة المتغير التابع مقارنة بالمتغيرات

المستقلة، أما فيما يخص أثاره فهي كثيرة لعل أهمها عدم كفاءة المقدرات بطريقة المربعات الصغرى العادية بالرغم من المحافظة على عدم التحيز والاتساق، كذلك كبر التباينات والتباينات المشتركة المقدرة للمعالم المقدرة مما يفقد فعالية اختبار الفرضيات، كما أن المشكل يتعدى بضرورة الحالة إلى التأثير على التنبؤ الذي سيكون بعيدا عن الواقع.

وتجدر الإشارة أنه في حالة عدم ثبات تباين الأخطاء (بعبارة أخرى عدم تجانسه) يجعل من المقدرة BLUE بطريقة المربعات الصغرى المعممة تحسب كالتالي:

$$\hat{a} = (X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}Y)$$

$$\Omega_{\hat{a}=} (X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X)^{-1}$$

2.4. طرق الكشف عن عد ثبات تباين الأخطاء:

1.2.4. اختبار Goldfeld-Quandt:

الهدف الأساسي من هذا الاختبار هو التأكد من وجود علاقة بين تباين الأخطاء وأحد المتغيرات المستقلة ضمن النموذج المقدر، ولهذا الغرض لدينا النموذج التالي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t ; t = 1,2, \dots , n$$

من هنا لدينا بعض المراحل الأساسية على النحو التالي:

المرحلة الأولى: ترتيب مشاهدات المتغير x ترتيبا تصاعديا.

المرحلة الثانية: نقوم بحذف المشاهدات الوسطى m للمتغير التابع والمتغير المستقل مع تكوين مجموعتين من المشاهدات طولها $(n - m)/2$ بحيث يكون لكل مجموعة معادلة خاصة بها على النحو التالي:

$$y_{1t} = a_{10} + a_{11}x_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = a_{20} + a_{21}x_{2t} + \varepsilon_{2t}$$

ثم نقوم بتقدير كلا المعادلتين باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية مع استخراج البواقي لكلا المعادلتين على التوالي.

المرحلة الثالثة: حساب إحصائية فيشر المحسوبة للاختبار وفق العلاقة التالية:

$$F^* = \frac{SCR^1/n - m - 2(k+1)}{SCR^2/n - m - 2(k+1)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_{1t}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_{2t}^2}$$

حيث يمثل $n - m - 2(k+1)$ عدد درجات الحرية وSCR^1 مجموع مربعات البواقي للمعادلة الأولى في حين SCR^2 مجموع مربعات البواقي للمعادلة الثانية.

المرحلة الرابعة: استخراج قيمة إحصائية فيشر الجدولية وإجراء المقارنة مع القيمة المحسوبة حيث:

$$\begin{cases} H_0: \text{فرضية ثبات تباين الأخطاء} \\ H_1: \text{فرضية عدم ثبات تباين الأخطاء} \end{cases}$$

- إذا كانت إحصائية فيشر المسحوبة أكبر من الجدولية نرفض الفرضية العدمية ونقول أن النموذج المقدر يعاني من مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء.
- إذا كانت إحصائية فيشر المسحوبة أصغر من الجدولية نقبل الفرضية العدمية ونقول أن النموذج المقدر لا يعاني من مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء وتباين الخطأ متجانس وثابت عبر الزمن.

من عيوب هذا الاختبار إمكانية تطبيقه فقط في حالة وجود متغير مستقل واحد مشكوك في تسببه في عدم ثبات تباين الأخطاء.

2.2.4. اختبار Park:

هذا الاختبار أيضا يستعمل في حالة متغير مستقل واحد يسبب عدم ثبات تباين الأخطاء، حيث الهدف الأساسي منه هو فحص معنوية تأثير المتغير قيد الاختبار على مربع الأخطاء للتقدير من خلال المراحل التالية:

المرحلة الأولى: تقدير المعادلة أدناه باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t$$

المرحلة الثانية: استخراج بواقي التقدير وتربيعها ثم إدخال اللوغاريتم النيبيري عليها $\ln e_t^2$.

المرحلة الثالثة: تقدير باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية المعادلة التالية:

$$\ln e_t^2 = a_0 + a_1^* \ln x_t + \varepsilon_t$$

المرحلة الرابعة: اختبار معنوية a_1^* من خلال اختبار ستيودنت للمعنوية، حيث في حالة ما إذا كانت إحصائية ستيودنت المحسوبة أكبر من ستيودنت الجدولية عند $n-2$ درجات معنوية نقول بوجود مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء في النموذج المقدر.

3.2.4. اختبار Gleisjer:

على غرار الاختبارين السابقين يعمد هذا الاختبار إلى اختيار متغير مستقل واحد مشكوك في تسببه لعدم ثبات تباين الأخطاء، لكن ما يميز هذا الاختبار هو إمكانية تحديد نوعية عدم ثبات تباين الأخطاء وذلك وفق المراحل التالية:

المرحلة الأولى: تقدير المعادلة أدناه باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t$$

المرحلة الثانية: تقدير ثلاثة نماذج مختلفة للقيم المطلقة للأخطاء، والمعادلات هي:

$$|e_t| = a_{01} + a_{11} x_t + \mu_{1t}$$

$$|e_t| = a_{02} + a_{12}x_t^{1/2} + \mu_{2t}$$

$$|e_t| = a_{03} + a_{13}x_t^{-1} + \mu_{3t}$$

المرحلة الرابعة: تتمثل في اختبار معنوية a_{1i} لكل معادلة وذلك على النحو التالي:

- ✓ إذا كانت a_{11} معنوية (أي إحصائية ستيودنت المحسوبة لها أكبر من الجدولية) فإن النموذج المقدر يعاني من مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء من النوع $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = k^2x_t^2$ حيث k قيمة ثابتة.
- ✓ إذا كانت a_{12} معنوية فإن النموذج المقدر يعاني من مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء من النوع $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = k^2x_t$ حيث k قيمة ثابتة.
- ✓ إذا كانت a_{13} معنوية فإن النموذج المقدر يعاني من مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء من النوع $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = k^2x_t^{-2}$ حيث k قيمة ثابتة.

أما في حالة ما إذا كانت كل المعلمات الثلاثة معنوية فإن نوع عدم التجانس يكون مقترن بأكبر قيمة ستيودنت محسوبة بين النماذج الثلاثة.

4.2.4. اختبار White:

اقترح هذا الاختبار سنة 1980 ويعتمد أساسا على العلاقة بين مربعات البواقي وجميع المتغيرات المستقلة ضمن النموذج الكلي إضافة إلى مربعاتها، وذلك وفق المراحل التالية:

المرحلة الأولى: تقدير النموذج العام واستخراج البواقي ثم تربيعها.

$$y_t = a_0 + a_1x_{1t} + a_2x_{2t} + \cdots + a_kx_{kt} + \varepsilon_t$$

المرحلة الثانية: تقدير المعادلة الوسيطية التالية مع استخراج معامل تحديدها:

$$e_t^2 = a_0 + a_1x_{1t} + b_1x_{1t}^2 + a_2x_{2t} + b_2x_{2t}^2 + \cdots + a_kx_{kt} + b_kx_{kt}^2 + \mu_t$$

المرحلة الثالثة: تتمثل في اختبار الفرضيتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_k = b_k = 0 \\ H_1: a_1 \neq b_1 \neq a_2 \neq b_2 \neq \cdots \neq a_k \neq b_k \neq 0 \end{cases}$$

المرحلة الرابعة: تتمثل في حساب إحصائية مضاعف لاغرانج وفق العلاقة التالية:

$$LM = n \times R^2$$

وهذه الإحصائية تتبع توزيع كاي تربيع χ^2 بدرجة حرية $2k$ (حيث k عدد المتغيرات المستقلة)، حيث يكون القرار كالتالي:

- ✓ إذا كانت $\chi^2(2k) \leq LM$ نرفض الفرضية العدمية ونقول بعدم ثبات تباين الأخطاء نظرا لوجود معلمة واحدة على الأقل من معلمات المعادلة الوسيطية معنوية مما يدل على ارتباط الخطأ بأحد المتغيرات المستقلة.
- ✓ إذا كانت $\chi^2(2k) > LM$ نقبل الفرضية العدمية ونقول بثبات تباين الأخطاء نظرا لعدم وجود أي معلمة من معلمات المعادلة الوسيطية معنوية مما يدل على عدم ارتباط الخطأ بأي من المتغيرات المستقلة.

5.2.4. اختبار ARCH-LM:

يشبه هذا الاختبار كثيرا اختبار White حيث تختلف فقط المعادلة الوسيطية التي تكتب على الشكل التالي:

$$e_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \cdots + a_p e_{t-p}^2 + \mu_t$$

فتصبح الفرضيتين كالتالي:

$$\begin{cases} H_0: a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0 \\ H_1: a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_p \neq 0 \end{cases}$$

وهنا يجب الانتباه إلى أننا نفقد مشاهدات مع كل إبطاء مدرج جديد في المعادلة مما يغير إحصائية مضاعف لاغرانج التي تساوي في هذه الحالة:

$$LM = (n - p) \times R^2$$

وهذه الإحصائية تتبع توزيع كاي تربيع χ^2 بدرجة حرية p (حيث p عدد التأخرات المدرجة في المعادلة الوسيطية)، ويكون القرار كالتالي:

- ✓ إذا كانت $\chi^2(p) \leq LM$ نرفض الفرضية العدمية ونقول أن التباين الشرطي للأخطاء غير متجانس (عدم ثبات أو تجانس الأخطاء) نظرا لوجود معلمة واحدة على الأقل من معلمات المعادلة الوسيطية معنوية.
- ✓ إذا كانت $\chi^2(p) > LM$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن التباين الشرطي للأخطاء غير متجانس نظرا لعدم وجود أي معلمة من معلمات المعادلة الوسيطية معنوية.

3.4. معالجة مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء:

عموما لأجل تصحيح مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء يجب أولا معرفة نوع عدم ثبات تباين الأخطاء التي يسمح بها اختبار Gleisjer حيث لدينا الحالات التالية التي يتم تقديرها بطريقة المربعات الصغرى المرجحة:

الحالة الأولى: في حالة ما يكون تباين الخطأ من النوع $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = k^2 x_t^2$ نقوم بتقدير المعادلة التي تعمد إلى قسمة كل عناصرها على القيمة $1/x_{1t}$ حيث يكون النموذج ذو تباين الأخطاء الثابت في هذه الحالة على النحو التالي (حيث على سبيل المثال المتغير المستقل x_{1t} هو السبب في عدم ثبات تباين الأخطاء):

$$\frac{y_t}{x_{1t}} = \frac{a_0}{x_{1t}} + a_1 + a_2 \frac{x_{2t}}{x_{1t}} + \cdots + a_k \frac{x_{kt}}{x_{1t}} + \frac{e_i}{x_{1t}} \rightarrow E\left(\frac{e_i}{x_{1t}^2}\right)^2 = \frac{1}{x_{1t}^2} \hat{\delta}_\varepsilon^2$$
$$= \frac{1}{x_{1t}^2} \times k^2 x_{1t}^2 = k^2$$

ومنه نلاحظ أن تباين الخطأ في هذه الحالة ثابت ويساوي k^2.

الحالة الثانية: في حالة ما يكون تباين الخطأ من النوع $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = k^2 x_{1t}$ نقوم بتقدير المعادلة التي تعمد إلى قسمة كل عناصرها على القيمة $\sqrt{x_{1t}}$ حيث يكون النموذج ذو تباين الأخطاء الثابت في هذه الحالة على النحو التالي (حيث على سبيل المثال المتغير المستقل x_{1t} هو السبب في عدم ثبات تباين الأخطاء):

$$\frac{y_t}{\sqrt{x_{1t}}} = \frac{a_0}{\sqrt{x_{1t}}} + a_1 + a_2 \frac{x_{2t}}{\sqrt{x_{1t}}} + \cdots + a_k \frac{x_{kt}}{\sqrt{x_{1t}}} + \frac{e_i}{\sqrt{x_{1t}}} \rightarrow E\left(\frac{e_i}{\sqrt{x_{1t}}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{x_{1t}} \hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{1}{x_{1t}} \times k^2 x_{1t} = k^2$$

الحالة الثالثة والعامة: كحالة عامة لكل الحالات الأخرى يكون تباين الخطأ من نوع $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = k^2 f(x_{1t})$ حيث $f(x_{1t})$ دالة في المتغير المستقل المتسبب في عدم ثبات تباين الخطأ نقوم بقسمة كل عناصر المعادلة على الدالة $f(x_{1t})$ كي نتحصل على تباين أخطاء متجانس وثابت عبر الزمن.

5. مشكلة ارتباط المتغير المستقل مع الأخطاء:

تتمثل هذه المشكلة في نقض الفرضية السابعة في نموذج الانحدار الخطي والبسيط والمتعدد على حد سواء والتي تتمثل في استقلالية المتغيرات المفسرة والأخطاء $Cov(x_t, \varepsilon_t) = 0$، وقد يحدث هذا الإشكال بسبب خطأ القياس الذي يتمثل في كون المشاهدات سواء للمتغير التابع أو المستقل ليست مقاسة بدقة مما يجعلها لا تعبر عن الواقع المدروس والمجتمع قيد الدراسة، حيث لدينا المعطيات والبيانات الحقيقية غير المعلومة التالية $y^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ للمشاهدات المتحصل عليها من التجميع أو القياس وهي ملاحظة ومعروفة $y, x_1, x_2, \dots, x_k$ حيث نقوم بدراسة خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى على النحو التالي:

لدينا النموذج العام التالي: $Y^* = X^* a + \varepsilon$ حيث $X = X^* + \mu$ و $Y = Y^* + \nu$ مع الافتراضات التالية:

$$E(\mu) = 0;\ E(\nu) = 0; E\left({X^*}'\mu\right) = 0;\ E\left({Y^*}'\nu\right) = 0;\ E\left({X^*}'\nu\right) = 0;\ E\left({Y^*}'\mu\right) = 0$$

كما يمكننا إثبات أن:

$$E(\varepsilon'\mu) = E\{(Y^* - X^*a)'\mu\} = E(Y^*\mu) - a'E\left({X^*}'\mu\right) = 0$$

$$E(\varepsilon'\nu) = E\{(Y^* - X^*a)'\nu\} = E(Y^*\nu) - a'E\left({X^*}'\nu\right) = 0$$

هذا ما يعني استقلالية خطأ القياس ε للنموذج العام عن أخطاء المتغيرات μ و ν ، ومنه العلاقة بين المتغيرات الملاحظة Y و X تكون كالتالي:

$$Y^* = Y - \nu = (X - \mu)a + \varepsilon \ \rightarrow Y = Xa + \nu - \mu a + \varepsilon = Xa + \ \gamma$$

حيث $\gamma = \nu - \mu a + \varepsilon$ الذي خصائصه تكون على النحو التالي:

$$E(\gamma) = E(\nu - \mu a + \varepsilon) = E(\nu) - E(\mu)a + E(\varepsilon) = 0$$

$$E\left({X^*}'\gamma\right) = E\left({X^*}'\nu\right) - E\left({X^*}'\mu\right)a + E\left({X^*}'\varepsilon\right) = 0$$

$$\begin{aligned} E(X'\gamma) = E\{(X^* + \mu)'\gamma\} = E(\mu'\gamma) = E(\mu'\nu) - E(\mu'\mu)a + E(\mu'\varepsilon) \\ = -E(\mu'\mu)a \ \neq 0 \end{aligned}$$

وهذا ما يؤكد أن المتغيرات X مرتبطة بالأخطاء γ مما ينقض الفرضية السابعة ويجعل من مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية غير فعالة.

1.5. طريقة التقدير بالمتغيرات الوسيطة *Instrumental Variables*:

كما أشرنا أعلاه في حالة ارتباط المتغيرات بالأخطاء من الشكل $Y = Xa + \ \gamma$ فإن المقدرات $\hat{a}$ لن تتجه نحو القيم الحقيقية للمعلمات a، الأمر الذي يتطلب طرق جديدة للتقدير، حيث يجب تحديد k متغيرات التي تكون من الشكل $z_1, z_1, \dots, z_k$ حيث يكون لدينا:

$$E(Z'\gamma) = 0 \ ; \ Z = \ (z_1, z_1, \dots, z_k) \ ; Cov(Z'X) \neq 0$$

كما لدينا أيضا:

$$E(Z'Y) = E\{Z'(Xa + \gamma)\} = E(Z'X)a + E(Z'\gamma) = \ E(Z'X)a$$

وتكون المقدرات على النحو التالي:

$$\hat{a} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

كما يمكننا أن نلاحظ أن تباين المقدرات $\hat{a}$ يكون ضعيف كلما زادت قوة الارتباط بين Z' و X وذلك من خلال مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للمقدرات التي تكون على النحو التالي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \ \hat{\delta}^2_{\varepsilon}(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}$$

تتشمل صعوبة هذه المنهجية في تحديد المتغير الوسيطي Z بحيث يكون غير مرتبط بالأخطاء γ ويكون قوي الارتباط بالمتغيرات X، لكن في بعض الحالات يمكن اعتبار المتغير الوسيطي هو المتغير المستقل بتأخر فترة زمنية.

.2.5 اختبار التجانس Hausman (1978):

يستعمل هذا الاختبار في فحص إمكانية وجود علاقة بين المتغير المستقل x_{it} و الأخطاء ε_t وفق الفرضتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: Cov(x_t, \varepsilon_t) = 0 \\ H_1: Cov(x_t, \varepsilon_t) \neq 0 \end{cases}$$

لدينا في هذه الحالة طريقتين لإجراء الاختبار وذلك كالتالي:

الطريقة الأولى: اختبار الفروقات:

تقوم هذه الطريقة من خلال حساب الإحصائية التالية:

$$H = (\hat{a}_{VI} - \hat{a}_{MCO})'[Var(\hat{a}_{VI}) - Var(\hat{a}_{MCO})]^{-1}(\hat{a}_{VI} - \hat{a}_{MCO})$$

حيث $\hat{a}_{VI}$ مقدرات طريقة المتغيرات الوسيطة في حين $\hat{a}_{MCO}$ مقدرات طريقة المربعات الصغرى.

إحصائية H تتبع توزيع كاي تربيع χ^2 ب k درجة حرية، حيث يكون القرار كالتالي:

- ✓ إذا كان $H < \chi^2(k)$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى غير متحيزة مما يعني أنه لا يوجد ارتباط بين المتغير المستقل x_{it} و الأخطاء ε_t عند درجة معنوية $\alpha\%$.
- ✓ إذا كان $H \geq \chi^2(k)$ نرفض الفرضية العدمية ونقول أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى متحيزة مما يعني أنه يوجد ارتباط بين المتغير المستقل x_{it} و الأخطاء ε_t عند درجة معنوية $\alpha\%$.

الطريقة الثانية: طريقة الانحدار المتصاعد أو الموسع:

تتشمل هذه الطريقة في أربعة مراحل:

المرحلة الأولى: تقدير نموذج بطريقة المربعات الصغرى حيث يكون المتغير التابع هو المتغير المستقل الذي نريد دراسة ارتباطه مع الأخطاء إضافة والمتغير المستقل هو المتغير الوسيط حيث عموما يكون المتغير المستقل متأخرة بفترة زمنية واحدة.

$$xx_t = a_{01} + a_{11}Z_t + \varepsilon_{1t}$$

المرحلة الثانية: استخراج القيم ل $\widehat{xx}_t$ من خلال معادلة التقدير المتحصل إليها.

المرحلة الثالثة: تتشمل في إدراج القيم المقدرة للمرحلة الأولى ضمن النموذج التالي:

$$y_t = a_{02} + a_{12}x_t + a_{22}\widehat{xx}_t + \varepsilon_{2t}$$

حيث تمثل $\widehat{xx}_t$ القيم المقدرة من خلال المرحلة الأولى.

المرحلة الرابعة: نقوم باختبار معنوية المعلمة a_{22} حيث إذا كانت معنوية نرفض الفرضية العدمية ونقول بوجود ارتباط بين المتغير المستقل قيد الدراسة والأخطاء مما يعني $Cov(x_t, \varepsilon_t) \neq 0$.

3.5. طريقة العزوم المعممة للتقدير La méthode des moments généralisés:

طريقة العزوم المعممة GMM (Generalized Method of Moments) تستعمل في حالة الإخلال بالفرضيتين السادسة والسابعة ($Cov(x_t, \varepsilon_t) = 0$ و $E(\varepsilon_t, \varepsilon_t') = \delta_\varepsilon^2 I$) حيث تتميز هذه الطريقة بدمج كلا من طريقتي المربعات الصغرى المعممة وطريقة التقدير بالمتغيرات الوسيطية في إطار مقدرة واحد تحسب كالتالي:

$$\hat{a} = (X'Z\left(Z'\hat{\Omega}Z\right)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z\left(Z'\hat{\Omega}Z\right)^{-1}Z'y$$

حيث: y: المتغير التابع، X: المتغيرات المستقلة، Z: المتغيرات الوسيطية، Ω: مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدرة في المرحلة الأولى بواسطة طريقة المتغيرات الوسيطية.

مع الإشارة إلى أنه في حالة تحقق الفرضية $E(\varepsilon_t, \varepsilon_t') = \delta_\varepsilon^2 I$ فمقدرة GMM سوف تصبح هي نفسها المقدرة VI للتقدير بواسطة المتغيرات الوسيطية$\hat{a} = (Z'X)^{-1}Z'Y$.

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

لدينا معادلة التقدير التالية التي تربط بين متغير تابع وثلاثة متغيرات مستقلة على النحو التالي:

$$y_t = 112.25 + 23.1x_{1t} - 10.23x_{2t} + 32.56x_{3t} + e_t$$

$$(3.22) \quad (5.3) \quad (4.2) \quad (4.6)$$

كما لدينا: $R^2 = 0.74; n = 85, (.) = t\ de\ student;\ r^2_{y,x_1} = 0.63$

المطلوب:

1. حساب معامل الارتباط الجزئي $r^2_{yx_2,x_1}$.

الحل:

لغرض حساب هذا المعامل لدينا العلاقة التالية:

$$1 - R^2_{y,x_1x_2x_3} = (1 - r^2_{y,x_1})(1 - r^2_{yx_2,x_1})(1 - r^2_{yx_3,x_1x_2})$$

$$\left(1 - r^2_{yx_2,x_1}\right) = \frac{1 - R^2_{y,x_1x_2x_3}}{(1 - r^2_{y,x_1})(1 - r^2_{yx_3,x_1x_2})}$$

لكن بداية نحسب مايلي:

$$\left(1 - r^2_{yx_3,x_1x_2}\right) = \frac{t^2_{\hat{a}_3}}{t^2_{\hat{a}_3} + (n-k-1)} = \frac{4.6^2}{4.6^2 + (85-3-1)} = 0.2071$$

وبالتعويض نجد:

$$\left(1 - r^2_{yx_2,x_1}\right) = \frac{1 - R^2_{y,x_1x_2x_3}}{(1 - r^2_{y,x_1})(1 - r^2_{yx_3,x_1x_2})} = \frac{1 - 0.74}{(1-0.63)(1-0.2071)} = 0.886$$

$$r^2_{yx_2,x_1} = 0.1137$$

التمرين الثاني:

لدينا الجدول التالي للمتغير التابع y_i والمتغيرات المستقلة x_1, x_2, x_3 كالتالي:

i	y_i	x_1	x_2	x_3
1	4	7	1	8
2	5	2	5	5
3	2	3	6	1
4	3	9	7	3
5	4	4	8	6
6	5	8	2	4
7	8	6	3	8

8	6	5	0	2
9	1	1	4	0
10	5	2	8	1
11	6	3	9	4
12	4	5	3	6
13	5	7	5	8
14	8	6	1	5
15	2	5	6	2
16	2	6	8	7
17	6	0	2	9
18	5	2	6	5
19	4	4	4	3
20	2	8	2	1

حيث أن معادلة التقدير في هذه الحالة هي:

$$y_i = 4.324 - 0.113x_{1i} - 0.198x_{2i} + 0.328x_{3i} + e_t$$

$$(3.22) \quad (5.3) \quad (4.2) \quad (4.6)$$

$$R^2 = 0.3115; (.) = t\ de\ student$$

$$r^2_{x_1x_2} = 0.0519;\ r^2_{x_1x_3} = 0.00951;\ r^2_{x_2x_3} = 0.0181$$

المطلوب:

1. اختبر فرضية التعدد الخطي للنموذج المقدر باستعمال اختبارين.
2. اختبر فرضية الارتباط الذاتي للأخطاء للنموذج باستعمال اختبار داربن واتسن.
3. اختبر مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء عند درجة أكبر من واحد حيث لدينا:

$$e_i = -0.284 + 0.117x_{1i} - 0.060x_{2i} + 0.038x_{3i} - 0.055\,e_{t-1} - 0.445\,e_{t-2} + \mu_{1t}$$

$$R^2 = 0.211$$

$$e_i = -0.549 + 0.252x_{1i} - 0.020x_{2i} + 0.074x_{3i} + 0.103\,e_{t-1} - 0.566\,e_{t-2} + 0.526\,e_{t-3} + \mu_{1t}$$

$$R^2 = 0.469$$

الحل:

1. اختبار التعدد الخطي:

بداية مع إجراء اختبار Klein الذي يتضح جليا من خلال المعطيات أن معامل التحديد أكبر من مربعات معاملات الارتباط البسيطة كلها حيث $R^2 > r^2_{x_i x_j}$ مما يدل على عدم وجود مشكل التعدد الخطي في النموذج المقدر من خلال هذا الاختبار.

ننتقل الآن إلى الطريقة الثانية المتمثلة في اختبار Farrar-Glauber حيث بداية لابد من تحديد مصفوفة معاملات الارتباط البسيطة على النحو التالي:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{0.0519} & \sqrt{0.00951} \\ \sqrt{0.0519} & 1 & \sqrt{0.0181} \\ \sqrt{0.00951} & \sqrt{0.0181} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.227 & 0.0975 \\ 0.227 & 1 & 0.134 \\ 0.0975 & 0.134 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث قيمة المحدد لهذه المصفوفة هو $= 0.9263|D|$

المرحلة الموالية تتمثل في حساب إحصائية كاي تربيع المحسوبة وفق العلاقة التالية:

$$\chi^{2*} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2K+5)\right].ln|D|$$
$$= -\left[20 - 1 - \frac{1}{6}(2 \times 4 + 5)\right].\ln(0.9263) = 1.288$$

وأخيرا نستخرج قيمة χ^2 الجدولية عند $\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \times 4(4-1) = 6$ منه $\chi^2(6) = 12.59$.

بالتالي لدينا $\chi^{2*} < \chi^2(6)$ الأمر الذي يعني قبول الفرضية العدمية والقول بعدم وجود تعدد خطي في النموذج المقدر أعلاه عند درجة معنوية 5% الأمر الذي يعزز نتيجة اختبار Klein.

2. اختبار الارتباط الذاتي للأخطاء:

لغرض تطبيق اختبار داربن واتسن لابد من حساب الإحصائية المحسوبة للاختبار وفق العلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

التي بداية تتطلب حساب كلا من $\sum_{t=1}^{n}(e_t - e_{t-1})^2$ و $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$ من خلال الجدول أدناه:

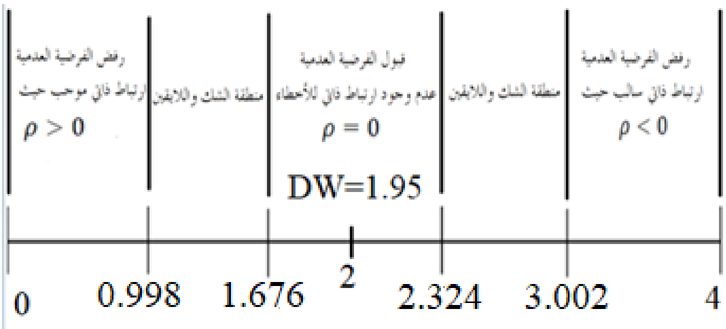
i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2	$e_i - e_{i-1}$	$(e_i - e_{i-1})^2$
1	4	5,959	-1,959	3,837681		
2	5	4,748	0,252	0,063504	2,211	4,888521
3	2	3,125	-1,125	1,265625	-1,377	1,896129
4	3	2,905	0,095	0,009025	1,22	1,4884
5	4	4,256	-0,256	0,065536	-0,351	0,123201
6	5	4,336	0,664	0,440896	0,92	0,8464
7	8	5,676	2,324	5,400976	1,66	2,7556

8	6	4,415	1,585	2,512225	-0,739	0,546121
9	1	3,419	-2,419	5,851561	-4,004	16,032016
10	5	2,842	2,158	4,656964	4,577	20,948929
11	6	3,515	2,485	6,175225	0,327	0,106929
12	4	5,133	-1,133	1,283689	-3,618	13,089924
13	5	5,167	-0,167	0,027889	0,966	0,933156
14	8	5,088	2,912	8,479744	3,079	9,480241
15	2	3,227	-1,227	1,505529	-4,139	17,131321
16	2	4,358	-2,358	5,560164	-1,131	1,279161
17	6	6,88	-0,88	0,7744	1,478	2,184484
18	5	4,55	0,45	0,2025	1,33	1,7689
19	4	4,064	-0,064	0,004096	-0,514	0,264196
20	2	3,352	-1,352	1,827904	-1,288	1,658944
$\sum$				49,945133		97,422573

ومنه نطبق العلاقة أعلاه حيث:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{97{,}422573}{49{,}945133} = 1.950$$

أما فيما يخص إحصائيتي داربن واتسن الجدوليتين فلدينا عند درجة معنوية 5%، 20 مشاهدة و3 متغيرات القيم التالية من الجدول في الملاحق $d_1 = 0.998$ و$d_2 = 1.676$ ولتبسيط القرار نقوم برسم الشكل التالي:



من خلال الشكل نلاحظ أن قيمة داربن واتسن المحسوبة تقع ضمن المجال d_2 و$4 - d_2$ مما يدل على عدم وجود مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء في النموذج المقدر من الدرجة الأولى عند درجة معنوية 5%.

3. اختبار Breusch-Godfery:

لهذا الغرض نقوم بحساب إحصائية مضاعف لاغرانج للمعادلة الأولى وفق العلاقة التالية:

$$LM = (n-p)R^2 = (20-2)0.211 = 3.798$$

أما إحصائية كاي تربيع عند 2 درجات حرية فهي $\chi^2(2) = 5.99$، بالتالي بما أن $LM < \chi^2(2)$ نقبل الفرضية العدمية ونقول بعدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثانية للنموذج المقدر عند درجة معنوية 5%.

أما فيما يخص الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الثالثة فبنفس الطريقة لدينا:

$$LM = (n - p)R^2 = (20 - 3)0.496 = 7.97$$

أما إحصائية كاي تربيع عند 3 درجات حرية فهي $\chi^2(3) = 7.81$، بالتالي بما أن $LM > \chi^2(2)$ نرفض الفرضية العدمية ونقول بوجود ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثالثة للنموذج المقدر عند درجة معنوية 5%.

التمرين الثالث:

لدينا المعطيات التالية ل 31 سنة من سنة 1989 الى غاية 2019 لمتغيرين على النحو التالي:

t	y	x	t	y	x	t	y	x
1989	11,08667	9,521641	2000	10,86597	9,422625	2011	11,05917	9,572341
1990	11,13071	9,536907	2001	10,5072	9,199583	2012	10,37748	9,24619
1991	10,39385	9,161465	2002	10,35003	9,105202	2013	10,35704	9,334768
1992	9,525005	8,579229	2003	10,65408	9,24619	2014	10,39385	9,391411
1993	10,88303	8,940105	2004	10,88211	9,391161	2015	10,31311	9,30556
1994	10,3951	8,644707	2005	10,07103	9,276596	2016	11,29385	9,739909
1995	9,524202	8,372167	2006	11,4432	9,700453	2017	9,639652	9,680281
1996	11,49489	9,754523	2007	11,24155	9,572828	2018	9,968994	9,392662
1997	10,88979	9,569412	2008	10,88208	9,547027	2019	11,05491	9,595126
1998	10,39381	9,213535	2009	11,49915	9,818039			
1999	10,51797	9,213834	2010	9,586171	9,522081			

المطلوب:

1) اختبر تباين الخطأ إن كان ثابتا ومتجانسا عبر الزمن بطرق مختلفة.

الحل:

1) طريقة Goldfeld-Quandt:

تتم هذه الطريقة وفق عدة مراحل كما سبق وأشرنا وأولى هذه المراحل هي تقدير معادلة الانحدار للمتغيرين والتي باستعمال برنامج Eviews 10 تحصلنا على النتائج التالية:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X	1.037598	0.245463	4.227106	0.0002
C	0.910358	2.294331	0.396786	0.6944

R-squared	0.381247	Mean dependent var	10.60244
Adjusted R-squared	0.359910	S.D. dependent var	0.575197
S.E. of regression	0.460190	Akaike info criterion	1.347985
Sum squared resid	6.141460	Schwarz criterion	1.440500
Log likelihood	-18.89376	Hannan-Quinn criter.	1.378142
F-statistic	17.86842	Durbin-Watson stat	2.015557
Prob(F-statistic)	0.000215		

نلاحظ من خلال النتائج أن المتغير المستقل يؤثر معنويا على المتغير التابع نظرا لأن قيمة ستيودنت المحسوبة له (4.227) أكبر من القيمة الجدولية ب 29 درجة معنوية (2.045) عند مستوى احتمال 5%، كما أن النموذج المقدر ككل معنوي أيضا بسبب كبر إحصائية فيشر المحسوبة (17.868) على الجدولية (4.18) عند مستوى احتمال 5%، أيضا النموذج خالي من الارتباط الذاتي للأخطاء نظرا لأن قيمة داربن واتسن قريبة من 2 (2.015) حيث $d_1 = 1.363$ و $d_2 = 1.496$، هذا ما يعني لحد الساعة النموذج المقدر مقبول من الناحية الإحصائية لكن يتبقى مشكل عدم ثبات تباين الأخطاء.

كمرحلة ثانية نقوم بترتيب المشاهدات تصاعديا حسب قيم المتغير المستقل وذلك على النحو التالي:

t	y	x	t	y	x	t	y	x
1	9,524202	8,372167	12	10,071034	9,276596	23	10,889789	9,569412
2	9,525005	8,579229	13	10,313111	9,305560	24	11,059173	9,572341
3	10,395100	8,644707	14	10,357044	9,334768	25	11,241550	9,572828
4	10,883035	8,940105	15	10,882114	9,391161	26	11,054914	9,595126
5	10,350031	9,105202	16	10,393845	9,391411	27	9,639652	9,680281
6	10,393845	9,161465	17	9,968994	9,392662	28	11,443200	9,700453
7	10,507202	9,199583	18	10,865975	9,422625	29	11,293849	9,739909
8	10,393815	9,213535	19	11,086671	9,521641	30	11,494894	9,754523
9	10,517970	9,213834	20	9,586171	9,522081	31	11,499151	9,818039
10	10,654078	9,246190	21	11,130713	9,536907			
11	10,377483	9,246190	22	10,882077	9,547027			

ثم نقوم باستبعاد بعض القيم من وسط السلسلة المرتبة، وبما أنه لدينا 31 مشاهدة سوف نقوم بحذف 9 مشاهدات وسطى كي تتبقى لنا 22 مشاهدة كليا بحيث يكون الجزء الأول مكونا من 11 مشاهدة من 1 إلى 11 والجزء الثاني من 21 إلى 31 بحيث $m = 9$.

ثم نقوم كمرحلة رابعة بتقدير المعادلتين لكل جزء من المشاهدات أعلاه على النحو التالي:

المشاهدات من 1 إلى 11.

$$\hat{y}_1 = 1.411 + 0.990\, x_1$$

$$R_1^2 = 0.543; SCR_1 = 0.817461; n = 11$$

المشاهدات من 21 إلى 31.

$$\hat{y}_2 = -1.783 + 1.331\,x_2$$

$$R_2^2 = 0.0625; SCR_2 = 2.530609; n = 11$$

بعد ذلك نقوم بحساب إحصائية فيشر المحسوبة التي تساوي:

$$F^* = \frac{SCR^1/n-m-2(k+1)}{SCR^2/n-m-2(k+1)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_{1t}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_{2t}^2} = \frac{2.530609}{0.817461} = 3.095$$

ولغرض استخراج قيمة فيشر الجدولية عند درجة معنوية 5% لابد من تحديد عدد درجات الحرية للإختبار وفق العلاقة التالية:

$$ddl = ddl_1 = ddl_2 = \frac{n-m-2(k+1)}{2} = \frac{31-9-2(2+1)}{2} = 9$$

ومن الجدول في الملاحق إحصائية فيشر الجدولية هي $F_{9,9}^{0.05} = 3.18$ وبما أن القيمة المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية نقبل الفرضية العدمية ونقول بثبات تباين الأخطاء في النموذج المقدر عند درجة معنوية 5%.

2) اختبار White:

كما أشرنا اختبار White يعتمد على تقدير معادلة وسيطية مبنية على المعادلة العامة للتقدير والتي من الشكل:

$$e_t^2 = a_0 + a_1x_{1t} + b_1x_{1t}^2 + a_2x_{2t} + b_2x_{2t}^2 + \cdots + a_kx_{kt} + b_kx_{kt}^2 + \mu_t$$

حيث كانت نتائج التقدير:

$$\hat{e}_t^2 = 28.076 - 6.340x_{1t} + 0.358x_{1t}^2$$

$$R_1^2 = 0.057156; n = 31$$

ومن المعادلة يمكننا حساب إحصائية مضاعف لاغرانج كالتالي:

$$LM = n \times R^2 = 0.057156 \times 31 = 1.771$$

أما قيمة كاي تربيع الجدولية عند درجة حرية $2k$ هي $\chi^2(2) = 5.99$ وبما أن القيمة المحسوبة لمضاعف لاغرانج أصغر من القيمة الجدولية لكاي تربيع $LM < \chi^2(2)$ نقبل الفرضية العدمية ونقول أن بعدم وجود مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء مما يعني أن خطأ التقدير في المعادلة ذو تباين ثابت ومتجانس عند درجة معنوية 5%.

3) اختبار ARCH-LM:

كما أشرنا اختبار ARCH-LM يعتمد على تقدير معادلة وسيطية مبنية على المعادلة العامة للتقدير والتي من الشكل:

$$e_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \cdots + a_p e_{t-p}^2 + \mu_t$$

وكانت نتائج التقدير لثلاثة معادلات بثلاثة تأخرات متتالية على النحو التالي:

$$e_t^2 = 0.187 + 0.070 e_{t-1}^2$$

$$R_1^2 = 0.005024; n = 30; AIC = 1.098$$

$$e_t^2 = 0.220 + 0.082 e_{t-1}^2 - 0.167 e_{t-2}^2$$

$$R_2^2 = 0.031929; n = 29; AIC = 1.76$$

$$e_t^2 = 0.238 + 0.072 e_{t-1}^2 - 0.171 e_{t-2}^2 - 0.054 e_{t-3}^2$$

$$R_3^2 = 0.034488; n = 28; AIC = 1.278$$

حيث سنقوم بحساب مضاعف لاغرانج لكل معادلة وفق العلاقة التالية:

$$LM = (n-p) \times R^2$$

$$LM_1 = (31 - p_1) \times R_1^2 = (31-1) \times 0.005024 = 0.15072$$

$$LM_2 = (31 - p_1) \times R_2^2 = (31-2) \times 0.031929 = 0.92594$$

$$LM_3 = (31 - p_1) \times R_3^2 = (31-3) \times 0.034488 = 0.96566$$

أما قيم إحصائية كاي تربيع الجدولية عند p درجة حرية على التوالي $\chi^2(p=1) = 3.84$، $\chi^2(p=2) =$ 5.99 و$\chi^2(p=3) = 7.81$ ونلاحظ أن كل قيم كاي التربيع الجدولية أكبر من القيم المحسوبة $(LM < \chi^2(p_i))$ مما يجعلنا نقبل الفرضية العدمية في الحالات الثلاثة أي أن تباين الخطأ المقدر في المعادلة تباين ثابت ومتجانس عبر الزمن عند درجة معنوية 5%.

ملاحظة: تعبر إحصائية AIC في النتائج أعلاه معيار Akaike والذي يمثل إضافة إلى معايير SCH (Schwarz) و HQ (Hannan-Quinn) معايير الاختيار، حيث يتم استعمالها في حالة وجود أكثر من نموذج ولابد من الخيار بينها ويكون الاختيار وفق أقل قيمة لهذه المعايير، حيث على سبيل المثال في النماذج الثلاثة أعلاه النموذج الأمثل هو النموذج ذو إبطاء واحد نظرا لاقترانه بأقل قيمة لمعيار $AIC = 1.098$، وتحسب هذه المعايير كالتالي:

$$AIC = \ln\left(\frac{SCR}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

$$SCH = \ln\left(\frac{SCR}{n}\right) + \frac{k\ln(\mathrm{n})}{n}$$

$$HQ = n \times \ln\left(\frac{SCR}{n}\right) + 2k\ln(\ln n)$$

4) اختبار *Park*:

هذا الاختبار كما أشرنا يعمد إلى إدخال اللوغاريتم النيبيري على مربع الأخطاء والمتغير المستقل قيد الدراسة وذلك لغرض تقدير المعادلة الوسيطية التالية:

$$\ln e_t^2 = a_0 + a_1^* \ln x_t + \varepsilon_t$$

حيث نتحصل على النتائج التالية:

$$\ln e_t^2 = -38.695 + 7.939 \ln x_t + \mu_t$$
$$(1.45)$$

ويكون القرار في خصوص ثبات تباين الأخطاء من عدمه مبني حول معنوية المقدرة a_1^* ويتضح جليا من خلال إحصائية ستيودنت المحسوبة (1.45) أنها أصغر من القيمة الجدولية لإحصائية ستيودنت ب $n-2$ درجات حرية حيث تقدر ب 2.045 هذا ما يدل على قبول الفرضية العدمية حيث أن تباين الأخطاء للنموذج المقدر ثابت ومتجانس عبر الزمن عند درجة معنوية 5%.

5) اختبار Gleisjer:

على عكس الاختبارات السابقة هذه الاختبار يعمد إلى وضع القيمة المطلقة للأخطاء كمتغير تابع للمتغير المستقل قيد الدراسة أو المشكوك فيه على عكس الطرق السابقة التي تضع مربع الأخطاء كمتغير تابع، وكما أشرنا الاختبار يعتمد على تقدير ثلاثة معادلات وسيطية يمكننا من خلالها تحديد نوع التباين في حالة عد ثباته، والمعادلات كانت كالتالي:

$$|e_t| = -1.567 + 0.020x_t + \mu_{1t}$$
$$(1.233)$$
$$|e_t| = -3.375 + 1.210\, x_t^{1/2} + \mu_{2t}$$
$$(1.218)$$
$$|e_t| = 2.049 - 16.096\, x_t^{-1} + \mu_{3t}$$
$$(-1.175)$$

بالتالي هذا الاختبار يعتمد أساسا على اختبار معنوية الميول الحدية في المعادلة التي يتضح جليا أنها كلها أصغر من القيمة الجدولية عند 5% (2.045) مما يدل على رفض كل أنواع تباين الأخطاء غير المتجانس مما يؤكد ثبات تباين الأخطاء في النموذج المقدر مؤكدا بذلك على نتائج كل الاختبارات السابقة.

التمرين الرابع:

في الجدول التالي لدينا معطيات لمتغيرين خلال الفترة 1995–2019 على النحول التالي:

t	y	x	t	y	x
1995	188	460	2008	759	3711
1996	192	486	2009	1030	4281
1997	200	561	2010	1368	4563
1998	191	553	2011	1474	4977
1999	232	682	2012	1671	7597
2000	280	1010	2013	2196	8757
2001	297	793	2014	2445	8875
2002	306	840	2015	3287	7612
2003	396	851	2016	3179	7789
2004	420	1117	2017	2780	7893
2005	227	1102	2018	2774	7322
2006	439	1262	2019	2575	7164
2007	564	3532			

المطلوب:

1. اختبر فرضية الارتباط الذاتي للأخطاء مع تصحيح المشكل بعدة طرق إن وجد.

الحل:

أولا نبدأ بتقدير المعادلة التي تربط بين المتغيرين ونختبر فرضية الارتباط الذاتي للأخطاء من خلال اختبار داربن واتسن على النحو التالي معتمدين على مخرجات برنامج Rats9.2:

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Usable Observations                        25
Degrees of Freedom                         23
Centered R^2                        0.8855894
R-Bar^2                             0.8806151
Uncentered R^2                      0.9480855
Mean of Dependent Variable       1178.8000000
Std Error of Dependent Variable  1096.5354151
Standard Error of Estimate        378.8763093
Sum of Squared Residuals         3301586.9287
Regression F(1,23)                   178.0304
Significance Level of F             0.0000000
Log Likelihood                      -182.8614
Durbin-Watson Statistic                0.8647

    Variable                        Coeff       Std Error      T-Stat      Signif
*******************************************************************************
1.  Constant                     -30.4372497  118.1329896     -0.25765  0.79896645
2.  X                              0.3223257    0.0241573     13.34280  0.00000000
```

بالتالي معادلة التقدير هي:

$$\hat{y}_t = -30.4372 + 0.3223x_t$$

نلاحظ من مخرجات البرنامج أن إحصائية داربن واتسن المحسوبة قدرت في حدود $DW = 0.8647$ وهذه القيمة نظرا لبعدها عن 2 فهي تدل على وجود ارتباط ذاتي للأخطاء، الأمر الذي يمكننا التأكد منه من خلال القيم الجدولية عند درجة معنوية 5%، متغير مستقل واحد و25 مشاهدة حيث $d_1 = 1.288$ و$d_2 = 1.454$، الأمر الذي يدل على وقوع الإحصائية المحسوبة بين 0 و d_1 بالتالي مشكل الارتباط الذاتي موجود في أخطاء النموذج المقدر ووجب تصحيحه.

الطريقة الأولى للتصحيح: الطريقة الأولى تتمثل في طريقة داربن واتسن المباشرة حيث نقوم أولا باستخراج قيمة معامل الارتباط الذاتي الذي يساوي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{0.8647}{2} = 0.5676$$

بعد ذلك نقوم بتحويل المتغيرات الأصلية إلى متغيرات ذات شبه فروقات من خلال المعادلات التالية:

$$y_t^* = y_t - \hat{\rho}y_{t-1}$$

$$x_t^* = x_t - \hat{\rho}x_{t-1}$$

حيث نلاحظ أن هذه المنهجية تفقدنا المشاهدة الأولى لكل سلسلة والتي تحسب كالتالي:

$$y_1^* = y_1\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$$

$$x_1^* = x_1\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$$

ومنه تكون البيانات المحولة كالتالي:

t	y	x	y^*	x^*
1995	188	460	154,7812	378,7201
1996	192	486	85,2912	224,904
1997	200	561	91,0208	285,1464
1998	191	553	77,48	234,5764
1999	232	682	123,5884	368,1172
2000	280	1010	148,3168	622,8968
2001	297	793	138,072	219,724
2002	306	840	137,4228	389,8932
2003	396	851	222,3144	374,216
2004	420	1117	195,2304	633,9724
2005	227	1102	-11,392	467,9908
2006	439	1262	310,1548	636,5048
2007	564	3532	314,8236	2815,689
2008	759	3711	438,8736	1706,237
2009	1030	4281	599,1916	2174,636
2010	1368	4563	783,372	2133,104
2011	1474	4977	697,5232	2387,041
2012	1671	7597	834,3576	4772,055
2013	2196	8757	1247,54	4444,943
2014	2445	8875	1198,55	3904,527
2015	3287	7612	1899,218	2574,55
2016	3179	7789	1313,299	3468,429
2017	2780	7893	975,5996	3471,964
2018	2774	7322	1196,072	2841,933
2019	2575	7164	1000,478	3008,033

بعد ذلك نقوم بتقدير المعادلة الجديدة $y_t^* = a_0^* + a_1 x_t^* + \mu_t$ بطريقة المربعات الصغرى العادية مع العلم أن $\mu_t = \varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}$ و $a_0^* = a_0(1-\hat{\rho})$ حيث دائما باستعمال برنامج Rats9.2 نتحصل على النتائج التالية:

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y1
Usable Observations                        25
Degrees of Freedom                         23
Centered R^2                        0.6635592
R-Bar^2                             0.6489313
Uncentered R^2                      0.8504641
Mean of Dependent Variable       566.84716957
Std Error of Dependent Variable  517.47909300
Standard Error of Estimate       306.61178348
Sum of Squared Residuals         2162248.0727
Regression F(1,23)                    45.3627
Significance Level of F             0.0000007
Log Likelihood                      -177.5708
Durbin-Watson Statistic                1.6121

    Variable                        Coeff      Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  Constant                     67.555287489 96.207945342      0.70218  0.48961276
2.  X1                            0.280250391  0.041609913      6.73518  0.00000072
```

نلاحظ من النتائج أعلاه أن النموذج المصحح من الارتباط الذاتي مقبول إحصائية حيث له قدرة تفسيرية جيدة من خلال معامل التحديد المقدر في حدود 0.663 كما أن معلمة المتغير المستقل معنوية عند درجة احتمال 5% إضافة إلى أن النموذج ككل معنوي من خلال قيمة فيشر المحسوبة الكبيرة (45.36)، من جهة أخرى قيمة إحصائية داربن واتسن الآن أصبحت في حدود $DW = 1.612$ هي محصورة بين كلا من d_2 و $4 - d_2$ $(d_1 = 1.288$ و $d_2 = 1.454)$ مما يدل على أن النموذج في هذه الحالة لا يتسم بارتباط ذاتي لأخطاءه، وتتبقى لنا حساب الحد الثابت للمعادلة على النحو التالي:

$$\hat{a}_0^* = \hat{a}_0(1-\hat{\rho}) \rightarrow \hat{a}_0 = \frac{\hat{a}_0^*}{(1-\hat{\rho})} = \frac{67.5552}{(1-0.5676)} = 156.2331$$

الطريقة الثانية: التقدير باستعمال طريقة Hidreth-Lu:

نقوم مباشرة بتقدير المعادلة من خلال استعمال برنامج Rats9.2 والنتائج كالتالي:

```
Regression with AR1 - Estimation by Hildreth-Lu Search
Dependent Variable Y
Usable Observations                      24
Degrees of Freedom                       21
Centered R^2                      0.9495448
R-Bar^2                           0.9447396
Uncentered R^2                    0.9779046
Mean of Dependent Variable     1220.0833333
Std Error of Dependent Variable 1100.0942614
Standard Error of Estimate      258.6050666
Sum of Squared Residuals       1404408.1902
Regression F(2,21)                 197.6055
Significance Level of F           0.0000000
Log Likelihood                    -165.7794
Durbin-Watson Statistic              1.4555
Q(6-1)                               3.7824
Significance Level of Q           0.5811510

    Variable                     Coeff       Std Error      T-Stat      Signif
*******************************************************************************
1.  Constant                 13209.591388  7048.564495      1.87408   0.07490063
2.  X                            0.006335     0.068427      0.09259   0.92710885
*******************************************************************************
3.  RHO                          0.991934     0.051229     19.36267   0.00000000
```

الطريقة الثانية: التقدير باستعمال طريقة Cochrane-Orcutt:

```
Regression with AR1 - Estimation by Cochrane-Orcutt
Dependent Variable Y
Usable Observations                          24
Degrees of Freedom                           21
Centered R^2                          0.9495438
R-Bar^2                               0.9447384
Uncentered R^2                        0.9779042
Mean of Dependent Variable         1220.0833333
Std Error of Dependent Variable    1100.0942614
Standard Error of Estimate          258.6077433
Sum of Squared Residuals         1404437.2625
Regression F(2,21)                     197.6012
Significance Level of F               0.0000000
Log Likelihood                        -165.7796
Durbin-Watson Statistic                  1.4548
Q(6-1)                                   3.7743
Significance Level of Q               0.5823478

    Variable                         Coeff      Std Error      T-Stat     Signif
*********************************************************************************
1.  Constant                     11777.976913  6230.886441    1.89026  0.07260497
2.  X                                0.006549     0.068452    0.09567  0.92469112
*********************************************************************************
3.  RHO                              0.990860     0.051235   19.33944  0.00000000
```

من خلال النتائج المتحصل عليها من كلا الطريقتين نجد أن مشكل الارتباط الذاتي تم تعديلها حيث أن إحصائية داربن واتسن المحسوبة يمكن اعتبارها أكبر من d_2 مما يدل على خلو النموذج من الارتباط الذاتي للأخطاء لكننا فقدنا معنوية المتغير المستقل.