برمجة الأعداد الصحيحة: طريقة قطع المستوى غوموري

مفهوم برمجة الأعداد الصحيحة (integer programming):

برمجة الأعداد الصحيحة هي أسلوب يسمح بالوصول إلى حل أمثل يحقق شرط أن تكون قيم المتغيرات صحيحة. ففي الكثير من الأحيان وعند حل البرامج الخطية تكون المتغيرات الواجب إيجاد قيمها متغيرات كاملة غير قابلة للتجزئة، بمعنى ينبغي أن تكون قيمها عبارة عن أعداد صحيحة، فعلى سبيل المثال لا يُمكن القول أن مصنع لإنتاج السيارات قام بإنتاج سيارة ونصف، وفي هذه الحالة يتم إضافة إلى البرنامج الخطي قيد جديد يتمثل في شرط أن تكون المتغيرات الواجب إيجاد قيمها عبارة عن أعداد صحيحة.

ويُمكن التمييز بين ثلاثة نماذج للبرمجة بالأعداد الصحيحة:

- نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة التام (المطلق): في هذا النموذج تكون جميع متغيرات البرنامج الخطي ذات قيم صحيحة.

$$\text{Max (Min) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ entiers} \end{cases}$$

- نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة المختلط (الجزئي): في هذا النموذج تكون بعض متغيرات البرنامج الخطي ذات قيم صحيحة والبعض الآخر ذات قيم غير صحيحة.

$$\text{Max (Min) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq) \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq) \ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq) \ b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \text{ entiers} \end{cases}$$

حيث: $k < n$

- نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة الثنائي: في هذا النموذج تأخذ إحدى متغيرات البرنامج الخطي أو أكثر إحدى القيمتين 1 أو 0، وبهذا يمكن التمييز بين نوعين من هذا النموذج: نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة الثنائي التام ونموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة الثنائي المختلط. ومن بين مجالات تطبيق نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة الثنائي هي إختيار المشاريع الإستثمارية بحيث تأخذ المتغيرة القيمة 1 في حالة إختيار المشروع والقيمة 0 في حالة عدم إختيار المشروع.

وهناك عدد من الطرق التي يتم إستخدامها لإيجاد حل أمثل للبرامج الخطية بقيم صحيحة للمتغيرات، ومن بين هذه الطرق هناك طريقة قطع المستوى غوموري (**Gomory`s Cutting plane method**).

طريقة قطع المستوى غوموري Gomory`s Cutting plane method:

قُدمت هذه الطريقة من طرف R. E. Gomory سنة 1958. ويُشترط في تطبيق هذه الطريقة أن تكون جميع قيم البرنامج الخطي صحيحة (معاملات المتغيرات في القيود، معاملات المتغيرات في دالة الهدف وقيم الثوابت)، وإذا كانت غير ذلك فيجب تحويلها إلى قيم صحيحة.

ويمر تطبيق طريقة غوموري بعدد من الخطوات:

1- حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس: يتم حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس، فإذا كانت مخرجات الحل الأمثل قيم صحيحة للمتغيرات التي يُشترط فيها أن تكون قيمها كذلك فلا داعي لإستكمال باقي الخطوات، أما إذا كانت مخرجات الحل الأمثل قيم غير صحيحة لهذه المتغيرات فيتم الإنتقال إلى الخطوة الثانية.

2- إضافة قيد غوموري؛

3- إعادة حل البرنامج الخطي؛

4- في حالة عدم الحصول على قيم صحيحة للمتغيرات التي يجب أن تكون قيمها كذلك يتم تكرار الخطوتين 2 و3.

تشكيل وإضافة قيد غوموري :

1- إختيار المتغيرة التي يتم على أساسها كتابة قيد غوموري: من جدول الحل الأساسي الأمثل يتم تحديد المتغيرات التي يشترط أن تكون قيمها صحيحة والتي لم يتحقق فيها هذا الشرط ثم نختار المتغيرة التي تحتوي على أكبر جزء عشري.

لنفترض أن:

X_r : المتغيرة ذات القيمة غير الصحيحة والتي تحتوي على أكبر جزء عشري.

b_k : قيمة المتغيرة X_r .

E_k : الجزء الصحيح من b_k

D_k : الجزء العشري من b_k والذي يجب أن يكون دائما موجبا.

ومنه:

$$b_k = E_k + D_k$$

2- كتابة قيد غوموري: لكتابة قيد غوموري ننطلق من قراءة سطر المتغيرة التي تم إختيارها في الخطوة السابقة كما يلي:

$$b_k = X_r + \sum_{j=h}^{p} a_{kj} X_j$$

حيث:

h : ترتيب أول متغيرة خارج الأساس.

p : عدد المتغيرات خارج الأساس.

$$X_r = b_k - \sum_{j=h}^{p} a_{kj} X_j$$

$$X_r = E_k + D_k - \sum_{j=h}^{p} a_{kj} X_j$$

$$a_{kj} = E_{kj} + D_{kj}$$

حيث:

$0 \leq D_k < 1$

$0 \leq D_{kj} < 1$

$E_k \Rightarrow$ عدد صحيح

$E_{kj} \Rightarrow$ عدد صحيح

$$X_r = E_k + D_k - \left(\sum_{j=h}^{p} E_{kj} X_j + \sum_{j=h}^{p} D_{kj} X_j \right)$$

$$X_r = \left(E_k - \sum_{j=h}^{p} E_{kj} X_j \right) + \left(D_k - \sum_{j=h}^{p} D_{kj} X_j \right)$$

وحتى يكون X_r عددا صحيحا (entier) يجب أن يكون:

$$\left(D_k - \sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j\right) \Longrightarrow \text{عدد صحيح}$$

وبما أن $0 \leq D_k < 1$

فإن:

$$D_k - \sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j \leq 0$$

$$-\sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j \leq -D_k$$

وهو قيد غوموري

ويتم إضافة قيد غوموري إلى جدول الحل الأمثل كما يلي:

- تحويل القيد إلى معادلة بإضافة متغيرة مكملة كما يلي:

$$-\sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j + X_{m+1}^{c} = -D_k$$

حيث m هو عدد المتغيرات

- إضافة المعادلة السابقة إلى جدول الحل الأمثل من خلال إضافة سطر جديد، كما يتم إضافة عمود جديد يمثل المتغيرة المكملة X_{m+1}^{c}

مثال:

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 15x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 52 \\ x_1 + 4x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\ x_1,\ x_2 \text{ entiers} \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل بطريقة غوموري؟

الحل:

جدول الحل الأساسي رقم 3 (الأمثل)

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i
15	X_1	1	0	4/17	-3/17	118/17
10	X_2	0	1	-1/17	5/17	98/17
	Cj	15	10	0	0	
	Z_j	15	10	50/17	5/17	
	Δ_j	0	0	-50/17	-5/17	Z=2750/17

يُلاحظ أن قيمتي X_1 وX_2 قيمتهما ليستا صحيحتان وهو ما يتنافى مع شرط أن تكون قيمتهما صحيحتان.

لدينا:

$$X_1 = 118/17 = 6{,}94$$

$$X_2 = 98/17 = 5{,}76$$

بما أن قيمة المتغيرة X_1 تحتوي على أكبر قيمة عشرية فهي المتغيرة التي يتم إختيارها.

$$b_k = E_k + D_k$$

$$b_1 = E_1 + D_1$$

$$118/17 = 6 + 16/17$$

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i
15	x_1	1	0	4/17	-3/17	118/17
10	x_2	0	1	-1/17	5/17	98/17
	Cj	15	10	0	0	
	Z_j	15	10	50/17	5/17	
	Δ_j	0	0	-50/17	-5/17	Z=2750/17

$$b_k = X_r + \sum_{j=h}^{p} a_{kj} X_j$$

$$6 + \frac{16}{17} = X_1 + \left[\left(\frac{4}{17}\right) X_3^c + \left(-\frac{3}{17}\right) X_4^c\right]$$

$$X_1 = \left(6 + \frac{16}{17}\right) - \left[\left(\frac{4}{17}\right) X_3^c + \left(-\frac{3}{17}\right) X_4^c\right]$$

$$X_1 = \left(6 + \frac{16}{17}\right) - \left[\left(0 + \frac{4}{17}\right) X_3^c + \left(-1 + \frac{14}{17}\right) X_4^c\right]$$

$$X_1 = 6 + \frac{16}{17} - \frac{4}{17} X_3^c + X_4^c - \frac{14}{17} X_4^c$$

$$X_1 = (6 + X_4^c) + \left(\frac{16}{17} - \frac{4}{17} X_3^c - \frac{14}{17} X_4^c\right)$$

$$\frac{16}{17} - \frac{4}{17}X_3^c - \frac{14}{17}X_4^c \leq 0$$

ومنه فإن قيد غوموري يُكتب كما يلي:

$$-\frac{4}{17}X_3^c - \frac{14}{17}X_4^c \leq -\frac{16}{17}$$

ويتم إضافة القيد الأخير إلى جدول الحل الأمثل كما يلي:

$$-\frac{4}{17}X_3^c - \frac{14}{17}X_4^c + X_5^c = -\frac{16}{17}$$

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	X_5^c	b_i
15	X_1	1	0	4/17	-3/17	0	118/17
10	X_2	0	1	-1/17	5/17	0	98/17
0	X_5^c	0	0	-4/17	-14/17	1	-16/17
	Cj	15	10	0	0	0	
	Z_j	15	10	50/17	5/17	0	
	Δ_j	0	0	-50/17	-5/17	0	Z=2750/17
	Δ_j / x_{i^*j}	-	-	50/4	5/14	-	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	X_5^c	b_i
15	X_1	1	0	2/7	0	-3/14	50/7
10	X_2	0	1	-1/7	0	5/14	38/7
0	X_4^c	0	0	2/7	1	-17/14	8/7
	Cj	15	10	0	0	0	
	Z_j	15	10	20/7	0	5/14	
	Δ_j	0	0	-20/7	0	-5/14	Z=1130/7

يُلاحظ أن الجدول هو جدول حل أمثل وممكن لكن قيمتي المتغيرتين X_1 وX_2 مازلتا غير صحيحتين لهذا نكرر تطبيق طريقة غوموري.

لدينا:

$X_1 = 50/7 = 7,14$

$X_2 = 38/7 = 5,43$

بما أن قيمة المتغيرة X_2 تحتوي على أكبر قيمة عشرية فهي المتغيرة التي يتم إختيارها.

$$b_2 = E_2 + D_2$$

$$38/7 = 5 + 3/7$$

$$5 + \frac{3}{7} = X_2 + \left[\left(-\frac{1}{7}\right)X_3^c + \left(\frac{5}{14}\right)X_5^c\right]$$

$$X_2 = \left(5 + \frac{3}{7}\right) - \left[\left(-\frac{1}{7}\right)X_3^c + \left(\frac{5}{14}\right)X_5^c\right]$$

$$X_2 = \left(5 + \frac{3}{7}\ \right) - \left[\left(-1 + \frac{6}{7}\right)X_3^c + \left(0 + \frac{5}{14}\right)X_5^c\right]$$

$$X_2 = 5 + \frac{3}{7} + X_3^c - \frac{6}{7}X_3^c - \frac{5}{14}X_5^c$$

$$X_2 = (5 + X_3^c) + \left(\frac{3}{7} - \frac{6}{7}X_3^c - \frac{5}{14}X_5^c\right)$$

$$\frac{3}{7} - \frac{6}{7}X_3^c - \frac{5}{14}X_5^c \leq 0$$

ومنه فإن قيد غوموري يُكتب كما يلي:

$$-\frac{6}{7}X_3^c - \frac{5}{14}X_5^c \leq -\frac{3}{7}$$

ويتم إضافة القيد الأخير إلى جدول الحل الأمثل كما يلي:

$$-\frac{6}{7}X_3^c - \frac{5}{14}X_5^c + X_6^c = -\frac{3}{7}$$

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	X_5^c	X_6^c	b_i
15	X_1	1	0	2/7	0	-3/14	0	50/7
10	X_2	0	1	-1/7	0	5/14	0	38/7
0	X_4^c	0	0	2/7	1	-17/14	0	8/7
0	X_6^c	0	0	-6/7	0	-5/14	1	-3/7
	Cj	15	10	0	0	0	0	
	Z_j	15	10	20/7	0	5/14	0	
	Δ_j	0	0	-20/7	0	-5/14	0	Z=1130/7
	$\Delta_j / x_{i^* j}$	-	-	10/3	-	1	0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	X_5^c	X_6^c	b_i
15	X_1	1	0	4/5	0	0	-3/5	37/5
10	X_2	0	1	-1	0	0	1	5
0	X_4^c	0	0	16/5	1	0	-17/5	13/5
0	X_5^c	0	0	12/5	0	1	-14/5	6/5
	Cj	15	10	0	0	0	0	
	Z_j	15	10	2	0	0	1	
	Δ_j	0	0	-2	0	0	-1	Z=161

يُلاحظ أن الجدول هو جدول حل أمثل وممكن، وأن قيمة X_2 أصبحت قيمتها صحيحة، لكن قيمة المتغيرة X_1 مازالت غير صحيحة لهذا نكرر تطبيق طريقة غوموري.

لدينا:

$$X_1 = 37/5= 7{,}40$$

بما أن المتغيرة X_1 هي المتغيرة الوحيدة التي قيمتها غير صحيحة فهي المتغيرة التي يتم إختيارها.

$$b_1 = E_1 + D_1$$

$$37/5 = 7 + 2/5$$

$$7 + \frac{2}{5} = X_1 + \left[\left(\frac{4}{5}\right) X_3^c + \left(-\frac{3}{5}\right) X_6^c\right]$$

$$X_1 = \left(7 + \frac{2}{5}\right) - \left[\left(\frac{4}{5}\right) X_3^c + \left(-\frac{3}{5}\right) X_6^c\right]$$

$$X_1 = \left(7 + \frac{2}{5}\right) - \left[\left(0 + \frac{4}{5}\right) X_3^c + \left(-1 + \frac{2}{5}\right) X_6^c\right]$$

$$X_1 = 7 + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} X_3^c + X_6^c - \frac{2}{5} X_6^c$$

$$X_1 = (7 + X_6^c) + \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{5} X_3^c - \frac{2}{5} X_6^c\right)$$

$$\frac{2}{5}-\frac{4}{5}X_3^c-\frac{2}{5}X_6^c \leq 0$$

ومنه فإن قيد غوموري يُكتب كما يلي:

$$-\frac{4}{5}X_3^c-\frac{2}{5}X_6^c \leq -\frac{2}{5}$$

ويتم إضافة القيد الأخير إلى جدول الحل الأمثل كما يلي:

$$-\frac{4}{5}X_3^c-\frac{2}{5}X_6^c+X_7^c=-\frac{2}{5}$$

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	X_5^c	X_6^c	X_7^c	b_i
15	X_1	1	0	4/5	0	0	-3/5	0	37/5
10	X_2	0	1	-1	0	0	1	0	5
0	X_4^c	0	0	16/5	1	0	-17/5	0	13/5
0	X_5^c	0	0	12/5	0	1	-14/5	0	6/5
0	X_7^c	0	0	-4/5	0	0	-2/5	1	-2/5
	Cj	15	10	0	0	0	0	0	
	Z_j	15	10	2	0	0	1	0	
	Δ_j	0	0	-2	0	0	-1	0	Z=161
	Δ_j / x_{i^*j}	-	-	5/2	-	-	5/2	0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	X_5^c	X_6^c	X_7^c	b_i
15	X_1	1	0	2	0	0	0	-3/2	8
10	X_2	0	1	-3	0	0	0	5/2	4
0	X_4^c	0	0	10	1	0	0	-17/2	6
0	X_5^c	0	0	8	0	1	0	-7	4
0	X_6^c	0	0	2	0	0	1	-5/2	1
	Cj	15	10	0	0	0	0	0	
	Z_j	15	10	0	0	0	0	5/2	
	Δ_j	0	0	0	0	0	0	-5/2	Z=160

يُلاحظ أن الجدول هو جدول حل أمثل وممكن، وأن قيمتي X_1 و X_2 صحيحتان وهو ما يحقق الشرط المطلوب، ومنه فإن نقطة الحل الأمثل هي كما يلي:

$$X_1 = 8, X_2 = 4, X_3^c = 0, X_4^c = 6, X_5^c = 4, X_6^c = 1, \text{Max Z} = 160$$