طريقة السمبلكس المقابلة

طريقة السمبلكس المقابلة The dual simplex method:

في بعض الأحيان يُمكن أن تكون قيم المتغيرات الأساسية في عمود الثوابت b_i في جدول السمبلكس سالبة وهذا ما يتعارض مع شرط عدم سالبية المتغيرات، وهنا يُمكن إستخدام طريقة السمبلكس المقابلة لمعالجة هذه الحالة. وطريقة السمبلكس المقابلة لا تختلف كثيراً عن طريقة السمبلكس الإعتيادية التي تناولناها سابقاً، والإختلاف يكمن فقط في تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس والمتغيرة التي تدخل إلى الأساس.

ويُمكن إستخدام طريقة السمبلكس المقابلة لمعالجة الحالات التالية والتي تكون فيها قيمة على الأقل من قيم المتغيرات الأساسية سالبة (والتي تعني وجود حل غير ممكن):

- إيجاد الحل الأمثل بدون إستخدام المتغيرات الإصطناعية؛
- عدم إمكانية تحديد عمود الإرتكاز عند جدول حل أساسي غير أمثل (شرط أن لا يكون الحل غير محدود)؛
- إيجاد القيم المثلى لبرنامج خطي أمثل لكن غير ممكن (عندما تكون جميع عناصر السطر $C_j - Z_j$ موجبة في حالة التقليل أو سالبة في حالة التعظيم، فهذا يعني أن الحل أمثل، لكن تكون هناك على الأقل قيمة من القيم الموجودة في العمود bi سالبة، فهذا يعني أن الحل غير ممكن).

ولا يُشترط لتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة تحويل البرامج الخطية الأولية إلى برامج خطية مقابلة، بل يُمكن إستخدامها مباشرة لحل البرامج الخطية الأولية.

وتتمثل خطوات إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة فيما يلي:

البحث عن صف الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:

صف الإرتكاز يقابل أصغر قيمة من بين القيم السالبة في عمود الثوابت bi، والمتغيرة التي توجد في عمود المتغيرات الأساسية في هذا الصف هي المتغيرة التي تخرج من الأساس. وفي حالة تساوي قيمتين أو أكثر يتم إختيار إحداهما.

البحث عن عمود الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:

يتم تقسيم قيم السطر Δ_j على القيم السالبة فقط المقابلة لها في صف الإرتكاز، وعمود الإرتكاز هو العمود الذي يقابل أكبر قيمة من بين القيم المتحصل عليها من حاصل القسمة في حالة التدنية، أو أقل قيمة من بين القيم المتحصل عليها من حاصل القسمة في حالة التعظيم، والمتغيرة التي تمثل عمود الإرتكاز هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس (يتم تحديد أكبر قيمة أو أقل قيمة من بين جميع القيم سواء كانت سالبة أو موجبة).
وفي حالة تساوي أكبر قيمتين أو أكثر في حالة التدنية، أو تساوي أقل قيمتين أو أكثر في حالة التعظيم، يتم إختيار إحداهما.

ملاحظات:

- يكون الحل مستحيل عندما لا يُمكن تحديد عمود الإرتكاز، وبالتالي عدم إمكانية تحديد المتغيرة المرشحة للدخول إلى الأساس؛
- إذا كانت جميع قيم عمود الإرتكاز أقل من أو تساوي الصفر في حالة جدول حل أساسي غير أمثل متحصل عليه بالحل بطريقة السمبلكس الإعتيادية، فإن الحل يكون غير محدود، وبالتالي لا يتم تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة؛
- عند الإنطلاق في حل برنامج خطي بطريقة السمبلكس المقابلة، يُمكن مصادفة حل أساسي يتطلب تطبيق طريقة السمبلكس الإعتيادية.

مثال:

ليكن لديك البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Max } Z=4X_1+7X_2$$

$$s/c \begin{cases} 2X_1+X_2 \leq 8 \\ 3X_1+4X_2 \leq 11 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

ويُكتب البرنامج الخطي المقابل له كما يلي:

$$\text{Min } Z=8Y_1+11Y_2$$

$$s/c \begin{cases} 2Y_1+3Y_2 \geq 4 \\ Y_1+4Y_2 \geq 7 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

ولتجنب إستخدام المتغيرات الإصطناعية، نحول إشاراتي القيدين من "أكبر من تساوي" إلى "أقل من أو تساوي" بضرب طرفي القيدين بإشارة سالبة كما يلي:

$$\text{Min } Z=8Y_1+11Y_2$$

$$s/c \begin{cases} -2Y_1-3Y_2 \leq -4 \\ -Y_1-4Y_2 \leq -7 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

نحول البرنامج الخطي المقابل إلى الصيغة القياسية ونقوم بحله كما يلي:

$$\text{Min } Z=8Y_1+11Y_2+0Y_3^c+0Y_4^c$$

$$s/c\begin{cases}-2Y_1-3Y_2+Y_3^c=-4\\ -Y_1-4Y_2+Y_4^c=-7\\ Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0,\ Y_3^c\geq 0,\ Y_4^c\geq 0\end{cases}$$

جدول الحل الأساسي رقم 1:

Ci	**Yi**	Y_1	Y_2	Y_3^c	Y_4^c	b_i
0	Y_3^c	-2	-3	1	0	-4
0	Y_4^c	-1	-4	0	1	-7
	Cj	8	11	0	0	
	Z_j	0	0	0	0	
	Δ_j	8	11	0	0	Z=0
	Δ_j/x_{i^*j}	-8	$-\frac{11}{4}$	-	-	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

يُلاحظ أنّه في حالة تطبيق طريقة السمبلكس الإعتيادية سيكون جدول الحل الأساسي الأول هو حل أمثل لأن دالة الهدف في حالة التدنية وجميع قيم Δ_j موجبة أو معدومة، وفي نفس الوقت هو حل غير ممكن لأن المتغيرات الأساسية Y_3^c و Y_4^c تأخذ قيم سالبة. ولمعالجة هذه المشكلة يتم تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة.

جدول الحل الأساسي رقم 2:

Ci	Yi	Y_1	Y_2	Y_3^c	Y_4^c	b_i
0	Y_3^c	-5/4	0	1	-3/4	5/4
11	Y_2	1/4	1	0	-1/4	7/4
	Cj	8	11	0	0	
	Z_j	11/4	11	0	-11/4	
	Δ_j	21/4	0	0	11/4	Z=77/4

ويُلاحظ أن جميع قيم bi في جدول الحل الأساسي الثاني أصبحت كلها تتوفر فيها شرط عدم السالبية، كما أن جميع عناصر Δ_j كلها موجبة أو معدومة وبالتالي فجدول الحل الأساسي الثاني هو جدول حل أمثل وممكن.

ونقطة الحل الأمثل هي: $Y_1 = 0, Y_2 = \frac{7}{4}, Y_3^c = \frac{5}{4}, Y_4^c = 0, Min\ Z = \frac{77}{4}$