Centre universitaire de Mila **Institut de Mathématiques et Informatique**
Première année LMD Informatique 2023-2024
Matière : Algèbre I **Série 3**

<u>**Exercice n°**1</u> : Parmi les relations suivantes, lesquelles définissent des fonctions ?

$$\begin{aligned} a)\Gamma_{\mathfrak{R}_1} &= \{(2,1),(5,1),(8,1),(11,1),(14,1)\} \\ b)\Gamma_{\mathfrak{R}_2} &= \{(1,3),(1,5),(2,5)\} \\ c)\Gamma_{\mathfrak{R}_3} &= \{(1,c),(2,b),(3,a),(4,b)\} \end{aligned}$$

<u>**Exercice n°**2</u> : Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application tel que

$$\forall a,b,c \in E : f(a,b) + f(b,c) + f(c,a) = 0.$$

Montrer que la relation $\mathfrak{R}$ définie sur E par $a\mathfrak{R}b$ si et seulement si $f(a,b) = 0$ est une relation d'équivalence.

<u>**Exercice n°**3</u> : Soit E un ensemble. Montrer les formules suivantes pour toutes parties A, B de E :

1. $\varphi_{C_E^A} = 1 - \varphi_A, \varphi_{A\cap B} = \varphi_A.\varphi_B$
2. $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A.\varphi_B, \varphi_{A\setminus B} = \varphi_A(1 - \varphi_B)$.

<u>**Exercice n°**4</u> :

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que
   (a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.
   (b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (d) $\forall C, D \in \mathcal{P}(F) : C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
   (e) $\forall C, D \in \mathcal{P}(F) : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. Soient l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x - y$ et l'ensemble $A = \{0,1\} \times \{1,2\}$.
   (a) Déterminer $f(A)$. En déduire que f n'est pas injective.
   (b) L'application f est elle surjective.

<u>**Exercice n°**5</u> :Soient $E = [0,1]$, $F = [0,2]$ des intervalles de $\mathbb{R}$, f et g deux applications définies par

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = 2 - x \end{array}, \quad \begin{array}{rccl} g: & F & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & g(x) = (x-1)^2 \end{array}$$

1. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Trouver $f^{-1}(\{0\})$. En déduire que f n'est pas surjective.
3. Montrer que $g \circ f$ est bijective et préciser $(g \circ f)^{-1}$.

<u>**Exercice n°**6</u> : Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

est strictement croissante pour la relation de la divisibilité.