Centre universitaire de Mila **Institut de Mathématiques et Informatique**

Première année LMD Informatique 2023-2024

Matière : Algèbre I **Série 2**

Exercice n°1 : Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$. Les relations suivantes sont elles vraies ?

$$\begin{array}{lll} 3 \in A & 3 \subset A & \phi \in A \\ \{\{1,2\}, 3\} = A & \{1,2\} \subset A & A \cup \left\{\phi\right\} = A \end{array}$$

Exercice n°2 : Soient E et F des ensembles. Montrer les propriétés suivantes :
(a) $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
(b) $\mathcal{P}(E \cup F) \subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.
Trouver deux ensembles E et F tels que $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Exercice n°3 : Soient A, B, C trois parties d'un ensembles non vide E. Soient $P(A, B)$ l'assertion

$$\forall x \in E : (x \in A \Longrightarrow x \notin B)$$

et $Q(A, B)$ l'assertion

$$\exists x \in E : (x \in A \wedge x \notin B)$$

1. Traduire $P(A, B)$ en termes de relation entre ensembles.
2. Ecrire *non* $(P(A, B))$ puis la traduire en termes de relation entre ensembles.
3. Que peut-on dire de A et B si elles vérifient $P(A, B)$ et $P(C_E^A, C_E^B)$?
4. Que peut-on dire de A et B si elles vérifient *non* $(Q(A, B))$ et *non* $(Q(B, A))$?

Exercice n°4 : Soient A, B, D trois parties d'un même ensemble E.
(1) Montrer les relations suivantes :
(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(b) $A \subset B \Longrightarrow C_E^B \subset C_E^A$.
(c) $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$.
(d) $A \backslash (B \cap D) = (A \backslash B) \cup (A \backslash D)$.
(e) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
(2) Calculer $A \triangle A, A \triangle \emptyset, A \triangle E$ et $A \triangle C_E^A$.

Exercice n°5 : Dire si les relations suivantes sont réflexives, (anti)-symétriques et/ou transitives :
1. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \mathfrak{R}_1 y \Longleftrightarrow x = -y$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R}_2 y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R}_3 y \Longleftrightarrow |x| = \left|y\right|$.

Exercice n°6 : Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire définie sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, comme suit

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \mathfrak{R} y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 2y = 3k$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{Z}$.
2. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Déterminer la classe d'équivalence de x notée $\dot{x}$.
3. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathfrak{R}$.

Exercice n°7 : On définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation $\mathfrak{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^* : x \mathfrak{R} y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : y = x^n$$

Cette relation peut s'énoncer aussi "y est une puissance entière non nulle de x".

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $A = \{2, 4, 16\}$ une partie de $\mathbb{N}^*$. Etudier suivant la relation $\mathfrak{R}$ l'existence de plus grand élément et plus petit élément de A ($\max(A)$ et $\min(A)$).

<u>Exercice n°8</u> : Supplémentaire
Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ définie par

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathfrak{R}(x',y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?.
2. Soit $A = \{(1,2),(3,1)\} \subset \mathbb{R}^2$, préciser les minorants $Min(A)$, les majorants $Maj(A)$, la borne inférieure $\inf_{\mathbb{R}}(A)$ et supérieure $\sup_{\mathbb{R}}(A)$ de A.

<u>Exercice n°9</u> : Supplémentaire
Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, la relation $\mathfrak{R}$ par

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E) : X\mathfrak{R}Y \Longleftrightarrow X \cap A = Y \cap A$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit X une partie de E. On note $\dot{X}$ la classe d'équivalence de X pour la relation $\mathfrak{R}$. Expliciter $\dot{\phi}, \dot{E}, \dot{A}$ et $\dot{C}_E^A$.

<u>Exercice n°10</u> : Supplémentaire
Soit $E = \mathbb{N}^2$. On définit sur E la relation binaire $\mathfrak{R}$ par

$$\forall (n_1,n_2),(m_1,m_2) \in E : (n_1,n_2)\,\mathfrak{R}\,(m_1,m_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} n_1 \mid m_1 \\ et \\ \exists k \in \mathbb{N} : m_2 = n_2^k \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre sur E.
2. Est-ce que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre total sur E ?